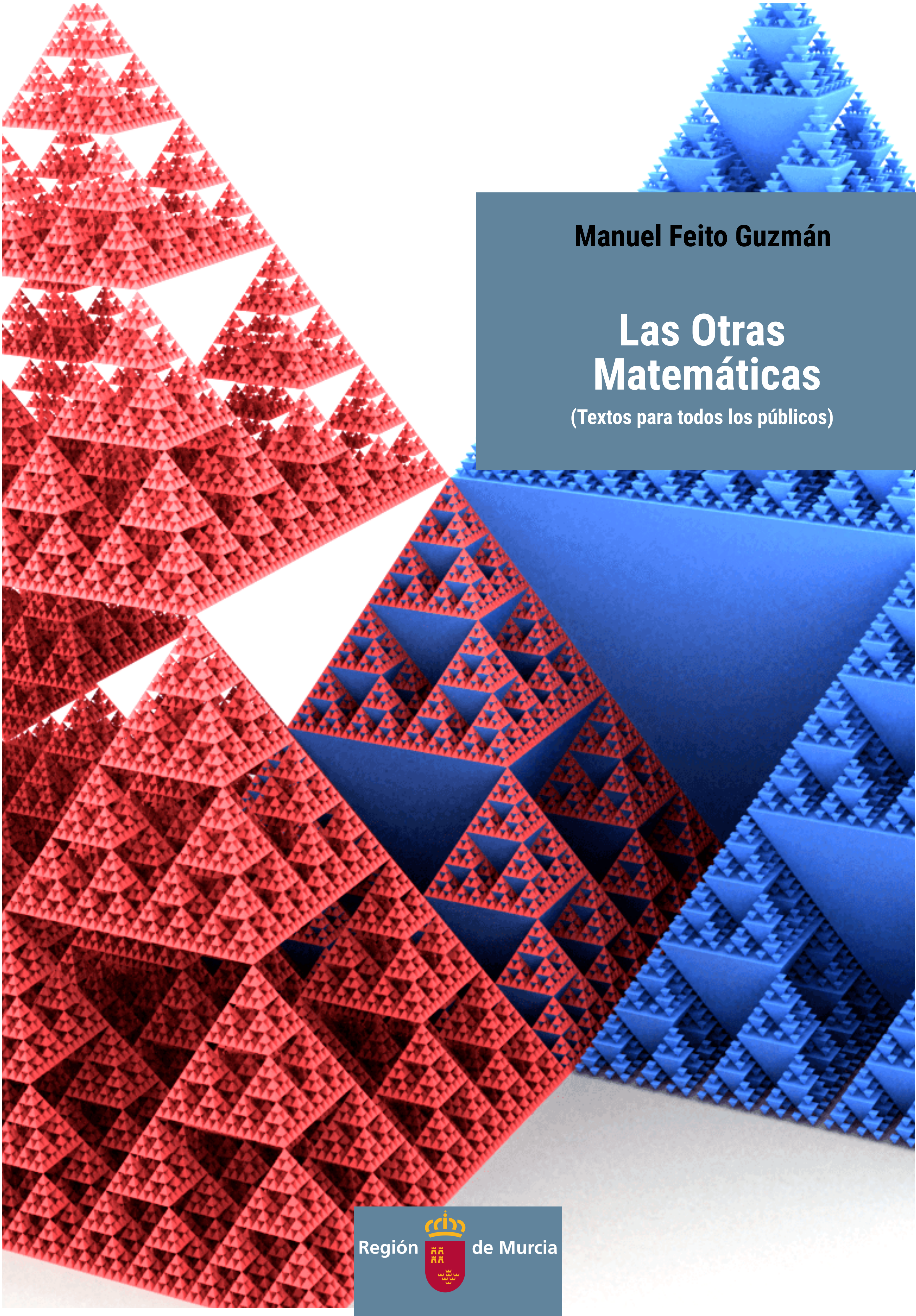


Manuel Feito Guzmán

Las Otras Matemáticas

(Textos para todos los públicos)

Región de Murcia

Manuel Feito Guzmán. Profesor de Matemáticas del IES Santa María de los Baños de Fortuna (Murcia) y Doctor en Física por la Universidad Complutense de Madrid. Tras unos años dedicados a la investigación científica con una decena de artículos en revistas internacionales de reconocido prestigio, en la actualidad trabaja en la didáctica y divulgación de las matemáticas, y cuenta con diversas publicaciones en este campo, así como un Máster en Educación y Nuevas Tecnologías.

Publicaciones recientes de la Consejería de

Educación, Juventud y Deportes

www.educarm.es/publicaciones

Guía para el docente. Google Suite (Meet, Sites y Classroom). Guías para la enseñanza online: estrategias de enseñanza y evaluación / Ramón Formoso Martínez

Guía para el docente de Formación Profesional. Guías para la enseñanza online: estrategias de enseñanza y evaluación / Francisco José Hernández Pérez (coord.)

Los sueños. XIII Certamen Internacional de Relatos "En mi verso soy libre" / Ana María Ferrer Mendoza y Juana María Sánchez García (coords.)

El Alma en el Limes (Arte en el Aula) / Juan Francisco Jordán Montés

Redibujando a José Lucas / Víctor Lucas Bermúdez

Las Otras Matemáticas
(Textos para todos los públicos)

Manuel Feito Guzmán

Región de Murcia
Consejería de Educación y Cultura

Región de Murcia
Consejería de Educación
y Cultura

Promueve:
© Región de Murcia
Consejería de Educación y Cultura
Secretaría General. Servicio de Publicaciones y Estadística

Edita:
© Región de Murcia
Consejería de Educación y Cultura
Secretaría General. Servicio de Publicaciones y Estadística
www.educarm.es/publicaciones

I.S.B.N.: 978-84-09-26919-8
1a Edición, Diciembre 2020

Índice de contenidos

ALOJA

1. Agradecimientos

Muchos de los textos recogidos en este libro parten de anécdotas y curiosidades matemáticas que he ido contando en las clases del instituto. Surgieron de forma más o menos improvisada ante alguna pregunta de un estudiante que me retrotrajo a historias que yo había leído en libros, en blogs o que recordaba de los años de carrera y doctorado. A mis alumnos debo, pues, el primer empujón que me llevó a escribir estos textos.

Estoy en deuda también con el profesorado de los distintos departamentos del IES SMB de Fortuna —y también con el personal de servicio del Centro— que de forma voluntaria participó en el juego-concurso diseñado en torno a los textos. Verlos leer cada semana una nueva propuesta de matemáticas fue, sin duda, un elemento motivador para la preparación y redacción de *La vuelta matemática al Mundo*.

Doy las gracias a Miguel por la lectura concienzuda del primer borrador de este libro con sus pertinentes sugerencias y correcciones; aunque los agradecimientos a él y a Carmen más sentidos son por todo lo demás. Para la revisión de la redacción de los textos en inglés he contado con la inestimable ayuda de Germán. Por último, agradezco a María Ángeles, a Elena, a María José y a Lola sus ilustraciones en este trabajo.

2. ¿DE QUÉ VA ESTO?

Los textos aquí presentados constituyen un recurso que admite distintos usos en el aula. Están pensados para estudiantes de cualquier nivel de educación secundaria, incluso para alumnos pertenecientes al programa bilingüe de inglés, pues una buena parte de ellos están redactados en ese segundo idioma. Debe ser el docente el encargado de la selección de los textos para maximizar su utilidad dentro de cada grupo-clase. Las frases en negrita ayudan a una lectura rápida de los mismos y permiten también fijar los conceptos claves presentados en ellos.

Son textos que pueden trabajarse directamente en el aula o que pueden usarse como material complementario de trabajo en casa (tal vez en un entorno de clase invertida o *flipped classroom*). Son también adecuados para ser enfocados desde la perspectiva de algún tipo de gamificación, como la propuesta que se detalla aquí de *La vuelta matemática al Mundo*. Por último, queremos destacar que la redacción escogida y la temática en sí de los textos aborda de manera natural el tratamiento de las distintas competencias, y se abre a la transversalidad y multidisciplinariedad que han de guiar siempre el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Señalamos, además, que estos textos, pese a poder leerse de forma independiente, contienen numerosas referencias cruzadas entre ellos —más de un centenar— que hacen que, al finalizar la lectura de este trabajo, se tenga una visión mucho más global.

En este trabajo pretendemos dar una visión de las matemáticas distinta de la que habitualmente se ofrece a los estudiantes en el día a día de clase de un instituto de educación secundaria. De ahí el nombre de *Las otras matemáticas*. Los textos aquí propuestos son, además, para todos los públicos, pues cualquiera con unos conocimientos elementales de matemáticas puede asomarse a ellos. Sin embargo, las ideas que se desarrollan no son, ni mucho menos, elementales. Acercar la complejísima hipótesis de Riemann (texto §8) o el esquivo problema de P vs NP (texto §16) a "todos los públicos" no es tarea fácil. Más aún, hemos tratado de huir de los contenidos más manidos en la literatura de divulgación matemática (aunque no hemos podido resistirnos a algunos de ellos: §7, §13, §29) y nos atrevemos incluso a afirmar que es probable que algunas de las ideas, aquí expuestas, no hayan sido presentadas anteriormente en el contexto de la divulgación orientada a estudiantes de secundaria (valga como ejemplo la paradoja de Parrondo contada en §30).

En las siguientes páginas abundan las anécdotas: un conocido científico que traduce un texto directamente del árabe pese a no tener ni idea del idioma (§3), un prolífico matemático sin casa al que dan cobijo colegas de todo el mundo por el honor de trabajar con él (§5), otro —no menos extravagante— que renuncia a un premio de un millón de dólares tras realizar la demostración más importante del siglo XXI (§26), y un montón más de historias sorprendentes. Junto a grandes matemáticos como Euclides (§11), Arquímedes (§9), Euler (§36), Gauss (§24), Riemann (§8) o Ramanujan (§7), se cuelan por aquí algunos nombres más alejados de la ciencia como Jorge Luis Borges (§32) o Ernesto "Che" Guevara (§20).

Los personajes que pasan por estos textos y sus historias confieren a las matemáticas una dimensión humana y un contexto real, aportando de este modo una visión complementaria a los contenidos propios de la asignatura de Matemáticas de secundaria. De hecho, muchas de las anécdotas aquí referidas son un recurso valioso para el profesorado, que puede utilizarlas para romper la monotonía y repetición que, a veces, se instala en el aula. Si en un 2º curso de ESO es necesario hacer decenas de ecuaciones de primer y segundo grado para que el alumnado adquiera soltura de cálculo —y efectivamente creemos que es necesario—, no es menos cierto que la delirante historia de la ecuación de tercer grado (§13) puede servir de revulsivo para activar la dinámica de la clase y motivar al alumnado. O los números polidivisibles de §35 pueden ser la excusa perfecta para repasar los criterios de divisibilidad de una manera más creativa.

Por otra parte, se habla mucho de la necesidad de aplicar las matemáticas en contextos reales con el objetivo de alcanzar un aprendizaje significativo. El enfoque habitual de los libros de texto es el de plantear problemas con enunciado, del tipo "halla la altura de una farola sabiendo que proyecta una sombra de..." o "encuentra la edad de María si dentro de diez años su padre tendrá el triple de años que..." Pero, ¿ciertamente creemos que esas son situaciones reales? Por contra, aquí proponemos algunas aplicaciones menos forzadas, menos ficticias, en definitiva, más reales. La aplicación de las progresiones geométricas en los textos §25 (sobre cómo funciona la música) y §31 (sobre cómo funciona una cámara réflex) son dos buenos ejemplos orientados a descubrir las matemáticas a la realidad.

Adicionalmente, algunos de los textos ahondan en la interdisciplinariedad de las matemáticas con otras ciencias y ramas del conocimiento: ¿cuántos colores hacen falta para colorear los distintos países de un mapa? (§6), ¿por qué las torres de alta tensión son estructuras metálicas con formas triangulares? (§10), ¿cómo podríamos medir longitudes sobre la superficie de un romanescu? (§19).

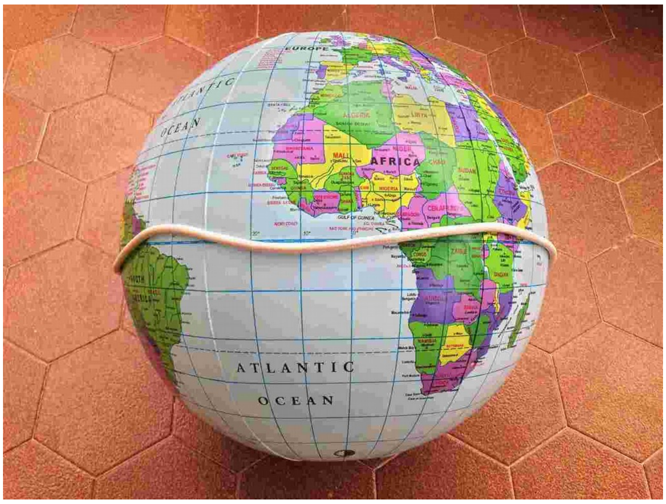
Una educación matemática que se ciñera, exclusivamente, a los estándares de aprendizaje del currículo oficial de secundaria sugeriría al estudiante una matemática como saber cerrado, completo y por ende con algo de “antiguo”. Lejos de esta idea errónea, reconocemos aquí una matemática como campo en continua evolución con multitud de cuestiones abiertas todavía pendientes de resolver. Así, por ejemplo, en los textos §8, §9, §16, §17, §23, §26, §29 y §33 se enuncian problemas que siguen a la espera de que un futuro matemático o matemática consiga dar con la clave que conduzca a su resolución. Sin duda que se trata de problemas tremendamente complejos, pero en estas páginas nos hemos acercado a enunciar estas cuestiones candentes que traen de cabeza a las mentes matemáticas más preclaras de la actualidad.

Por último no debemos olvidarnos de que una de las tareas más importantes, a la que debe enfrentarse el docente de la materia de Matemáticas, es la de guiar al discente hacia el descubrimiento de la belleza intrínseca de esta ciencia exacta. No es la suma de fracciones lo que apasiona a los matemáticos. Ni las multiplicaciones de polinomios. Lo que realmente amamos es la belleza abstracta que se manifiesta en la lógica perfecta de unos razonamientos tan sublimes que culminan, en un éxtasis matemático, con la demostración de teoremas: esas verdades eternas e inmutables. Y de esto también hablamos aquí (§3, §11).

3. TEXTOS EN CASTELLANO

En esta sección se presentan 25 textos en castellano que contienen multitud de anécdotas, historias, curiosidades y aplicaciones de las matemáticas.

3.1. Adiós intuición, hola matemática



Cuando la intuición falla, las matemáticas vienen a echarnos un cable. Y de eso vamos a hablar: de **cables**. **Imaginad uno larguísimo que diera la vuelta al planeta**, pongamos por el ecuador, de manera que los dos extremos se tocaran a malas penas, o sea, sin que sobrara nada. **Imaginad ahora que separamos el cable un solo centímetro de la superficie de la Tierra** a lo largo de toda su extensión. Entonces el cable se va a quedar corto y los extremos ya no llegarán a tocarse. Falta cable, eso está claro, pero cuánto. Así a ojo, habiendo separado solo 1 centímetro el cable, **¿cuánto diríais, más o menos, que nos faltaría para volver a unir los extremos?**

¿Ya? ¿Habéis hecho una apuesta? Pues ahora vamos a las cuentas. Adiós intuición, hola matemática.

Veamos, el cable alrededor del ecuador forma una circunferencia cuya longitud, que denotaremos por la letra ℓ minúscula, viene dada por la fórmula

$$\ell = 2\pi r, \quad (1)$$

donde π es el número pi (del que ya hablamos más en §16 y en §18) y r es el radio de la Tierra. El (1) entre paréntesis es para nombrar esta primera ecuación que luego vamos a usar.

Si separamos el cable de la Tierra ahora tendremos un radio mayor, que podemos llamar R mayúscula, y la nueva circunferencia tendrá por longitud

$$L = 2\pi R. \quad (2)$$

Como R es un centímetro mayor que r podemos escribir

$$R = r + 1, \quad (3)$$

con lo que la ecuación (2) quedaría como $L = 2\pi(r+1)$. O bien, usando la propiedad distributiva para quitar el paréntesis:

$$L = 2\pi r + 2\pi. \quad (4)$$

Y como $2\pi r$ es precisamente la longitud del cable pegado a la Tierra, como vimos en la ecuación (1), entonces podemos escribir la ecuación (4) como:

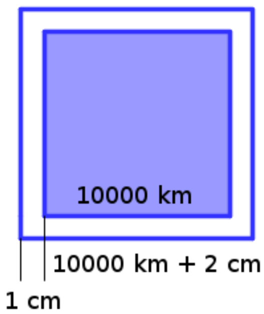
$$L=\ell+2\pi \quad (5)$$

¿Y qué nos dice esta ecuación última? Pues que la longitud del cable separado, **L mayúscula, solo se diferencia de la longitud del cable pegado, ℓ minúscula, en 2π**. Como π vale aproximadamente 3,14, la diferencia es aproximadamente de 6,28. Y como diría la profesora de física y química, ¿6,28 qué?, ¿peras, manzanas, euros? Pues está claro, en la ecuación (3) el 1 era en realidad 1 centímetro, así que ahora este 6,28 son **6,28 centímetros**.

¡Ajá! ¡Menos de 7 cm de diferencia! ¿Funcionó vuestra intuición? ¿Sí?, bien. ¿No?, **¿pensabais que 1 solo centímetro a lo largo de los miles de kilómetros del ecuador se iba a ir acumulando y que nos faltaría un montón de cable al final?**

Pero las ecuaciones dicen todavía más cosas. Si os fijáis con cariño en la ecuación (5) veréis que el resultado no depende del radio. De hecho, tampoco hemos usado en ningún momento el valor del radio de la Tierra. Así que esos 6,28 centímetros serían también la longitud que nos faltaría si primero ajustamos el cable alrededor de una moneda y luego lo separamos 1 cm por todos lados. Da igual el tamaño de la circunferencia.

Por si todavía queda algún escéptico que confía más en su intuición errónea que en las matemáticas, os pongo todavía un ejemplo más claro, con números, para que no haya que marearse con fórmulas. Y para que sea más fácil, en vez de un planeta esférico vamos a imaginarnos un planeta plano y cuadrado. Pongamos que tiene 10.000 kilómetros en cada lado y que le colocamos el cable alrededor, o sea, que gastamos 40.000 km de cable. Ahora separamos el cable 1 centímetro por todos los lados, ¿cuánto cable necesitaríamos? Pues los 40.000 km de antes y 8 centímetros más como podéis ver en la imagen de abajo. Es verdad que esta vez no salen los 6,28 centímetros de las circunferencias, pero 8 centímetros es bastante parecido. Desde luego no son kilómetros y kilómetros de cable extra.



Y si todo esto no ha humillado aún vuestra intuición, esperad a leer §4 y §30.

3.2. Halley: un cometa de un hombre perseverante

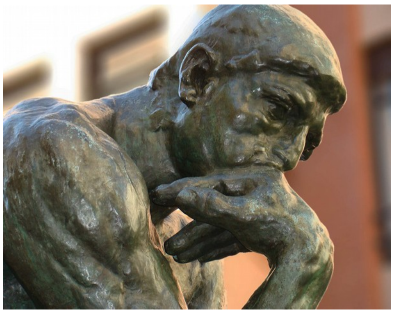
Edmond **Halley** (1656-1742) fue un matemático, físico y astrónomo inglés que pasó a la historia por ser el primero en determinar **el periodo de un cometa**, es decir, cada cuántos años pasa cerca de la Tierra y, por lo tanto, podemos observarlo en el cielo a simple vista.

A ese cometa se le conoce, en su honor, como “cometa Halley”. Su periodo es de unos 75 años y la última vez que pudimos observarlo fue en **1986**. Así que tendremos que esperar hasta **2061** para volver a verlo por aquí cerca.

Edmond Halley fue un científico generoso y perseverante. Gracias a su insistencia y a su apoyo económico se publicaron los famosísimos *Principia* de **Isaac Newton**: uno de los libros científicos más relevantes de la historia.

Pero lo siguiente sí que es una muestra de perseverancia. En aquellos años, se acababa de encontrar **una copia en árabe de un trabajo del físico y matemático griego Apolonio**. El astrónomo Edward Bernard, gran conocedor del árabe, empezó a traducir la copia de Apolonio, pero murió cuando llevaba solo 13 páginas. Halley se propuso seguir la traducción. Eso sí, **Halley no tenía ni idea de árabe**. Pero lo tradujo. ¿Cómo? Estudió con detalle las 13 páginas de la traducción que ya estaba hecha y comenzó, poco a poco, a reconocer palabras por el contexto. Luego fue sacando el significado de palabras nuevas por la argumentación y así, **con esfuerzo y perseverancia, completó la traducción**.

3.3. Pero... ¿qué es eso de una proposición?



En matemáticas, **una proposición es una afirmación que puede ser demostrada lógicamente partiendo de axiomas, postulados o de otros resultados que previamente han sido también demostrados**. Es decir, una proposición es lo mismo que un teorema matemático, solo que algo menos importante **(se suele reservar el nombre de "teorema" para los grandes resultados)**.

Puesto que las proposiciones –y sus hermanos mayores los teoremas– pueden ser demostrados, eso nos asegura su validez inmutable. Son verdades eternas. **El teorema de Pitágoras es y será siempre cierto**. Y esto es algo muy particular de las matemáticas, que las distingue de las ciencias experimentales. Porque en física, por ejemplo, las cosas son como son..., pero a veces llega alguien y encuentra una teoría más exacta y echa por tierra todo lo anterior. Con el teorema de Pitágoras eso no puede ocurrir. **Está ahí ya para siempre.**

Así que el punto clave de **toda proposición** es que sea matemáticamente cierta, o sea, verdad de la buena. Y para ello no queda más remedio que **demostrarla con argumentos irrefutables**. Vamos a ver un ejemplo con una proposición que no encontraréis en ningún libro, porque es tan tonta que probablemente no tiene ningún interés. Esta es la proposición:

Entre el número 10 y el número 20, ambos inclusive, hay más números compuestos que primos.

Tenéis que recordar que los números primos son aquellos números naturales mayores que 1 que solo se pueden dividir de forma exacta entre ellos mismos y entre el número 1. Los primeros números primos son 2, 3, 5, 7, 11... Por contra los compuestos son los números mayores que 1 que sí que tienen más divisores. Los primeros números compuestos son 4, 6, 8, 9, 10...

Bien, pues vamos a demostrar la proposición... y lo vamos a hacer de dos formas distintas, que no se diga.

<u>Demostración 1:</u>

El 10 es compuesto (aparte de por 10 y por 1, puede dividirse entre 2 y también entre 5). Y podemos ir haciendo lo mismo hasta el 20 para ver si el resto de números son primos o compuestos. Con la descomposición factorial se ve muy claro:

$10=2\cdot5$ (compuesto); 11 primo; $12=2^2\cdot3$ (compuesto); 13 primo; $14=2\cdot7$ (compuesto); $15=3\cdot5$ (compuesto); $16=2^4$ (compuesto); 17 primo; $18=2\cdot3^2$ (compuesto); 19 primo; $20=2^2\cdot5$ (compuesto).

La conclusión de lo anterior es que entre 10 y 20 hay más números compuestos (10, 12, 14, 15, 16, 18, 20) que primos (11, 13, 17, 19), que es lo que queríamos demostrar.

Demostración 2:

• Como los números pares y los impares se van siempre alternando, resulta que en el conjunto de números entre el 10 y el 20, ambos inclusive, hay más pares que impares (puesto que tanto el 10 como el 20 son pares).

• Todos los números pares son compuestos (salvo el 2, que no está en nuestro conjunto) ya que pueden dividirse de manera exacta entre 2 (y no solo entre ellos mismos y entre 1, que era el requisito para que fueran primos).

Uniendo las dos afirmaciones anteriores se deduce inmediatamente lo que queríamos demostrar: hay más números compuestos que primos en el intervalo entre 10 y 20 porque hay más pares y acabamos de ver que esos pares son compuestos.

Pues ahí están las dos demostraciones. **Ambas son perfectamente válidas pero parece claro que la segunda es más elegante**. Y no solo eso, sino que tiene ventajas innegables. En primer lugar, **es más rápida,** puesto que no hay que ir probando uno a uno los números. De hecho, la demostración 2 **no involucra ninguna operación**. Y en segundo lugar, la demostración 2 **puede generalizarse** a otros casos: por ejemplo, siguiendo el mismo razonamiento podemos demostrar esta otra proposición:

Entre el 1802 y el 1818, ambos incluidos, hay más compuestos que primos.

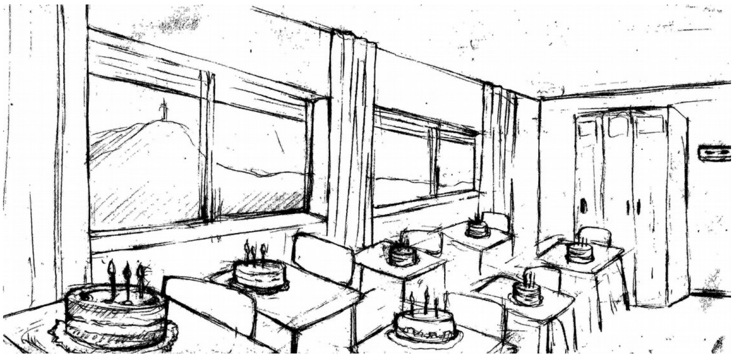
O incluso esta otra más general:

En el conjunto de números comprendidos entre n y m, ambos incluidos, siendo n y m números pares (distintos de 2), hay más números compuestos que primos.

¿Veis por qué hay que decir que *n* tiene que ser distinto de 2?

Así que definitivamente nos quedamos con la segunda demostración, que es más elegante y mejor que la primera **demostración por "fuerza bruta"**. Sin embargo, hay veces que para algunas proposiciones los matemáticos no encuentran una **demostración "directa"** como la segunda y se se ven abocados a usar un método exhaustivo como el primero. Quizá el caso más famoso de demostración por fuerza bruta sea el del *Teorema de los cuatro colores,* §6. Y por cierto, hay más formas de demostrar las cosas, como por ejemplo el **método de "reducción al absurdo"** que tan genialmente utilizó Euclides para demostrar la infinitud de los números primos, §11.

3.4. El sorprendente caso del problema del cumpleaños



Una clase de tamaño normal en un instituto de secundaria, digamos de 30 alumnos. Un profesor de matemáticas alegre que propone al principio de curso hacer una pequeña celebración el día del cumpleaños de cada uno. O sea, 30 fiestas... ¡Espera! A lo mejor son menos fiestas de cumpleaños, porque puede darse **la casualidad de que dos alumnos de la clase cumplan años el mismo día**. No hay gemelos en la clase, así que eso parece mucha casualidad... ¿o no tanta?

Pues vamos a calcular cuál es esa probabilidad de forma exacta. Pero antes hay que repasar algunas cosas:

• Aunque normalmente decimos que la probabilidad de que llueva es del 75%, **los matemáticos nunca dan la probabilidad en tanto por ciento, sino en "tanto por uno"**. Diríamos entonces que la probabilidad es 0,75. Así que algo que ocurra seguro (100%) tiene una probabilidad de 1.

• Si la probabilidad de que llueva es del 75% (perdón, hemos dicho que se dice en tanto por uno: 0,75), entonces la probabilidad de que no llueva es del 25% (perdón de nuevo: 0,25). Así que **la probabilidad de una cosa se puede obtener calculando la de lo contrario y restándosela al número 1**.

• Si lanzamos un dado y nos preguntamos por la probabilidad de que salga un número par, la probabilidad será 3/6 = 0,5 porque hay 3 casos favorables que nos valen (los números pares: 2, 4 o 6) de 6 casos posibles (1, 2, 3, 4, 5 o 6). Esto funciona siempre que el dado no esté trucado (en general, se dice que los *sucesos elementales* han de ser *equiprobables*) y se llama **regla de Laplace** (la volveremos a usar en §18 para calcular el número π a cañonazos):

$$probabilidad = \frac{n^o\, de\, casos\, favorables}{n^o\, de\, casos\, posibles}$$

• Si en vez de 1 dado tiramos 3 dados y queremos que salga un número par en los tres a la vez, entonces la probabilidad de que eso ocurra se obtiene **multiplicando las probabilidades de cada uno de ellos por separado**, lo que da 0,5·0,5·0,5=0,125. Esta regla de multiplicar las probabilidades funciona siempre que los "experimentos" individuales sean independientes uno de otro.

Volvamos a nuestra clase de 30 alumnos. Queríamos saber la probabilidad de que hubiese al menos dos personas que cumplieran años el mismo día. Vamos a hallar primero lo contrario, es decir, la probabilidad de que nadie cumpla años el mismo día, y luego se la restamos a 1.

Podríamos hacerlo de la siguiente forma. **El primer alumno dice su fecha**. El segundo alumno habla a continuación. Lo normal es que no cumpla años el mismo día que el primero. De hecho, le valen para no coincidir 364 días de los 365 días del año. Así que, de acuerdo a la regla de Laplace, **la probabilidad de no coincidir para el segundo alumno será 364/365**. Y ya hay dos fechas cogidas. El tercer alumno tiene entonces 363 días favorables de los 365 días posibles del año: una probabilidad de 363/365. **Y cuando llegamos al último alumno, ya habría 29 fechas cogidas y quedarían libres, por tanto, 336, con lo que su probabilidad de no coincidir es de 336/365.**

Pues ahora ya está casi. La probabilidad de que cada uno de ellos tenga una fecha única la podemos obtener multiplicando las probabilidades anteriores, es decir,

$$\mathbf{364/365 \cdot 363/365 \cdot \cdots \cdot 336/365}$$

El resultado que da esta cuenta es 0,294. Eso, en porcentaje, es un 29,4%. Y la probabilidad de lo contrario, a saber, de que SÍ haya gente en la clase que cumpla años ese mismo día, es del 70,6%.

Así que hay casi un 71% de que SÍ haya coincidencias frente a un 29% de que NO. El resultado puede parecernos sorprendente y por ello que incluso se conoce este problema como **la paradoja del cumpleaños**. De hecho, haciendo el mismo razonamiento, puede verse que, a partir de solo 23 alumnos en la clase, es más probable que dos o más celebren el cumpleaños el mismo día a que no lo hagan. Y a partir de grupos de 41 personas la probabilidad se eleva ya a más del 90%.

Por último, habría que señalar algunos detalles si queremos profundizar un poco:

• No hemos tenido en cuenta que los años pueden ser bisiestos. Pero considerar que a veces los años son de 366 días en lugar de 365 no aporta mucho cambio.

• Cuando se trata de nacimientos, las fechas en que ocurren no son equiprobables. Aunque no hay mucha diferencia, en algunos meses del año la natalidad es superior. S*tricto sensu* no podríamos haber aplicado la regla de Laplace por aquello de que los sucesos tenían que ser equiprobables. Pero en cualquier caso la aproximación es bastante acertada e incluso tener en cuenta estas sutilezas haría que todavía fuese más probable la coincidencia.

• En realidad, si pensamos que es relativamente frecuente que haya gemelos en una misma clase, las probabilidades de coincidencias serían todavía mayores.

• No es difícil escribir la fórmula que nos da la probabilidad de coincidencia para una clase de n alumnos. Para n mayor o igual que 366 seguro que ya hay coincidencia (sin tener en cuenta años bisiestos) y la probabilidad sería 1. **Para valores de n comprendidos entre 1 y 365 la fórmula es:**

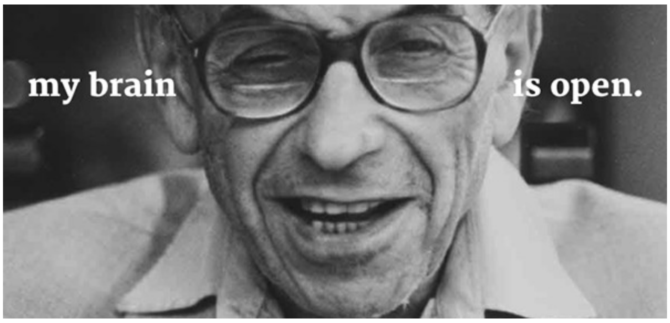
$$1 - \frac{365!}{(365-n)!\, 365^n}$$

donde el signo de exclamación es el factorial (por ejemplo, el factorial de 6 es 6! = 720 porque 6·5·4·3·2·1=720).

• La fórmula anterior queda muy bien, pero no es demasiado práctica porque el factorial de 365 es un número tan gigantesco que no cabe ni en la calculadora. Por suerte, se compensa en parte con el factorial del denominador para valores bajos de n (es lo que nos pasó en nuestro ejemplo con $n = 30$). Para valores altos de n la cosa se complica y conviene usar aproximaciones a la función factorial.

En fin, de vuelta a nuestra clase resulta que **probablemente el alegre profesor de matemáticas se perderá alguna fiesta de cumpleaños** porque habrá que juntar dos el mismo día. O incluso a lo mejor cumplen años los 30 alumnos a la vez y hay una única fiesta antológica... aunque eso ya parece muy muy muy improbable... ¿o no tanto?, ¿qué pensáis?, ¿sabríais calcular esa probabilidad? Porque, después de lo que acabamos de contar y de lo de la cuerda alrededor del mundo que vimos en §1, parece que ya **no puede uno fiarse mucho de su intuición**.

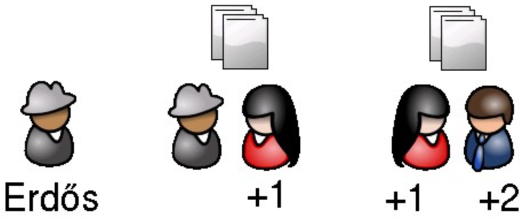
3.5. Paul Erdös y su número



Paul Erdös fue un matemático húngaro del siglo XX. Se le considera, junto a Leonhard Euler, el matemático **más prolífico de todos los tiempos**, es decir, el que más trabajos matemáticos ha realizado (más de 1500 publicaciones).

Las posesiones materiales no significaban nada para Erdös, que solía donar los premios que recibía o los reinvertía como nuevos premios por la solución de problemas que él mismo proponía. Pasó la mayor parte de su vida viajando entre conferencias científicas y casas de colegas matemáticos alrededor del mundo. **No tenía hogar.**

Erdös colaboró con más de 500 matemáticos hasta su muerte en 1996. Se dice que un matemático tiene **NÚMERO DE ERDÖS** igual a 1 si ha firmado un artículo junto a Paul Erdös. Un matemático tiene número de Erdös 2 si ha hecho un artículo junto a un matemático que trabajó directamente con Erdös y así sucesivamente.

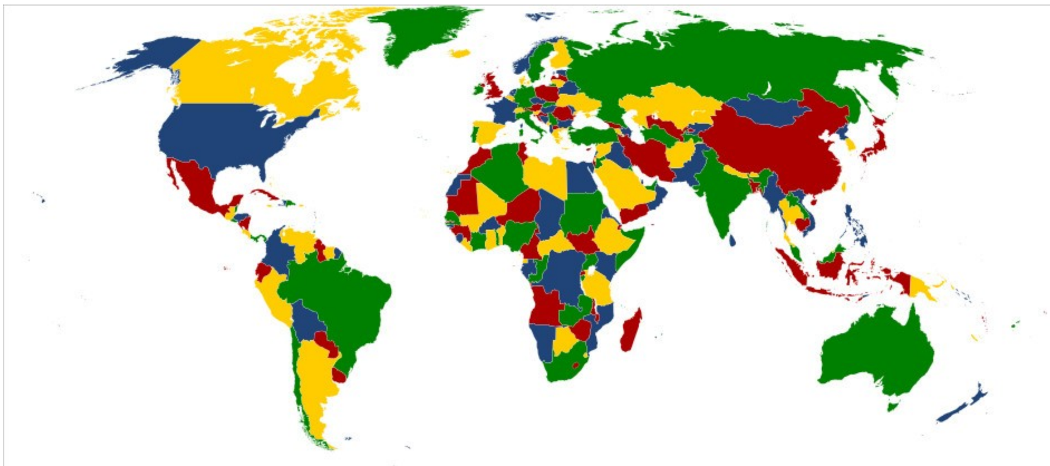


En 2004, un investigador con un número de Erdös 4 subastó en eBay la posibilidad de colaboración para obtener un número de Erdös de 5. La oferta final fue de unos 1000 euros.

Por cierto, el autor de este trabajo tiene también **un honroso número de Erdös 4**, puesto que es coautor con Hugo Touchette (Erdös 3), quien es coautor con Thomas Prellberg (Erdös 2), el cual es coautor con Peter J. Cameron (Erdös 1), coautor, a su vez, con Paul Erdös.

Y claro, el propio Erdös es el único que tiene número de Erdös 0.

3.6. Un mundo en cuatricromía: el teorema de los cuatro colores



¿**Cuántos colores hacen falta para colorear un mapa** sin que dos países o regiones adyacentes tengan el mismo color? **¡Cuatro nada más!** ¿Seguro? Pues sí, segurísimo porque hay un teorema matemático para ello. El *teorema de los cuatro colores* fue conjeturado en 1852, pero **la demostración** no llegó hasta mucho mucho más tarde: un siglo y cuarto después. Y además, **vino cargada de polémica…**

Antes de nada, veamos qué dice el teorema de los cuatro colores. En lenguaje sin demasiados tecnicismos es algo así:

Cualquier mapa geográfico con regiones continuas se puede colorear con cuatro colores diferentes de forma que no queden países fronterizos con el mismo color.

Hay que tener en cuenta algunos aspectos básicos:

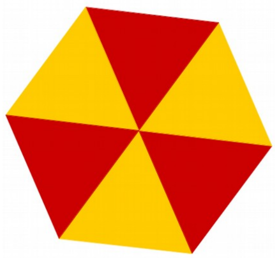
• Los países pueden modelizarse mediante lo que los matemáticos llaman **grafos**. Así que realmente el teorema de los cuatro colores puede formalizarse en un lenguaje mucho más complicado..., pero, vamos, al final, viene a decir lo mismo.

• Cuando se dice "cualquier mapa", se refiere efectivamente a cualquiera, **bien sea un mapa real, o bien un mapa imaginario rarísimo que se nos ocurra dibujar.**

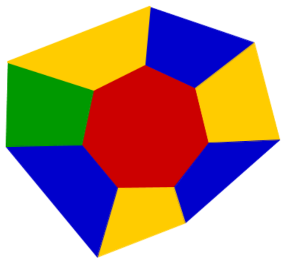
• Los países han de ser "continuos" (los matemáticos dirían **"simplemente conexos"**), lo que quiere decir que no deben estar formados por regiones geográficas separadas (como ocurre, por ejemplo, con Alaska y el resto de EEUU), pues de lo contrario podría darse el caso de que dos partes de un mismo país no pudieran pintarse con el mismo color. De todas formas el mapa del mundo actual es tan simple (desde un punto de vista de grafos matemáticos) que, aunque haya algunas regiones aisladas del resto de su país, aun así es suficiente con cuatro colores para asegurar que todas las partes de un mismo país son del mismo color.

• **El agua no se colorea, se deja en blanco**. En caso contrario necesitaríamos, en general, un color más.

• Los países **pueden tener un punto en común del mismo color, pero no una línea**. Es lo que ocurre en el siguiente mapa imaginario con 6 países con forma triangular y que con solo 2 colores pueden distinguirse claramente.



Como en el ejemplo anterior, hay casos en los que necesitamos menos de cuatro colores. Lo que el teorema dice es que con cuatro colores seguro que tenemos suficiente para cualquier mapa continuo. Nunca jamás vamos a necesitar un quinto color si elegimos con buen criterio el color para cada país... ¿Y es muy difícil pensar en un mapa en donde necesitemos usar todos los colores, o sea, los cuatro? Pues no, es lo que ocurre cuando tenemos un país con un número impar de vecinos con frontera entre sí:



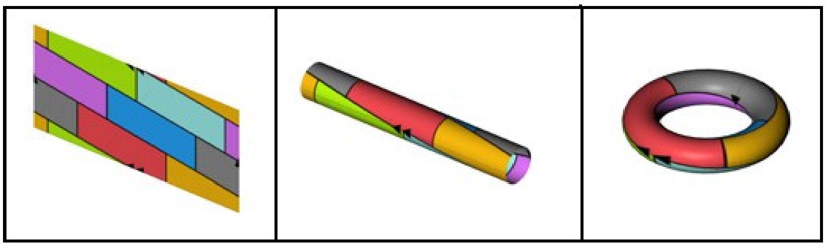
Pero claro, un teorema necesita una demostración para dejar de ser una mera conjetura, §3. Y, como dijimos al principio, esa demostración costó mucho tiempo. Desde que **Francis Guthrie conjeturó en 1852 que cuatro colores eran suficientes**, se sucedieron bastantes supuestas demostraciones que resultaron ser erróneas a la postre. Hasta que **en 1976, K. Appel y W. Haken consiguieron reducir el problema a algo menos de 1500 configuraciones.** Aunque usaron conceptos complicados de teoría de grafos, eso quería decir, en el fondo, que era como si todos los mapas imaginables fueran, o bien casos que ya se sabía que necesitaban 4 o menos colores, o bien casos que pudieran clasificarse en uno de los 1500 mapas reducidos que ellos propusieron. Con lo cual, solo hacía falta estudiar esos 1500 mapas...

Pero seguían siendo muchos mapas para colorear. Lo bueno es que ya no se trataba de probar con infinitos mapas imaginables, como al principio, sino que ahora había que "colorear" un número finito. Y **1500 mapas podían ser mucho para una persona, pero no para un ordenador** con la potencia de cálculo de los que ya se estaban construyendo por aquella época. En concreto, el ordenador estuvo haciendo cálculos durante 1200 horas, o sea, **¡50 días completos!** Y al final la conclusión fue la sospechada: todos los mapas podían ser coloreados con 4 colores o menos.

La demostración fue más que polémica. Primero, porque **no era una prueba elegante** como las demostraciones por reducción al absurdo clásicas, §11, o las contundentes demostraciones directas de toda la vida, §3. Era una demostración por fuerza bruta. Y segundo, porque **los cálculos eran tantos que ni siquiera un humano podría reproducirlos** en un tiempo razonable. **Dependía directamente de una máquina**. ¿Y si la máquina estaba mal programada? ¿Y si una operación fallaba porque un circuito sufría una subida de tensión?

Sea como fuere, la comunidad matemática acabó aceptando como válida la demostración. Y años después, en 1997 y en 2005, nuevas pruebas, también informáticas (¡ay!), corroboraron una vez más el teorema de los cuatro colores.

Antes dijimos que "nunca jamás" íbamos a necesitar un quinto color. Bueno, eso de nunca jamás suena demasiado definitivo ¿no? Lo cierto es que este es un resultado que vale para mapas en un **plano bidimensional** (como los ejemplos que mostramos aquí) o incluso para **mapas curvos sobre una esfera** (pensemos en una bola del Mundo con la esfera terrestre). Se dice que el *número cromático* **de estas superficies es 4**. Pero hay otras superficies más complejas. Por ejemplo, si encontráramos un planeta con forma de Donuts (esa forma se llama en matemáticas un *toro*) y tuviéramos que hacer un mapa con sus regiones (puestos a imaginar, pensemos que en ese planeta sus habitantes también tuvieran una organización en países y regiones como nosotros), entonces es posible que con 4 colores no tuviéramos suficiente, porque **el número cromático de un toro es 7**. Es decir, que, si en el Planeta Toro deciden hacer una división geográfica con mala idea, como la de la imagen de abajo, harían falta 7 colores para separar los países. Pero no más, ¡eh!



3.7. Ramanujan y la matrícula de un taxi

Ramanujan fue un genial matemático de principios del siglo XX. Nació en **la India** y allí apenas pudo estudiar porque no tenía libros. **Sin casi formación** matemática, era capaz de intuir fórmulas que permitían encontrar resultados interesantísimos, como la que se ve abajo, que permite en cada iteración de la **serie infinita** obtener 8 decimales más del **número pi**.

$$\pi=\frac{9801}{2\sqrt{2}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!(1103+26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}\right]^{-1}$$

Ramanujan envió cartas mostrando sus "descubrimientos" a varios matemáticos importantes del Reino Unido, pero casi nadie les dio importancia..., excepto **G. H. Hardy**, que quedó impresionado por aquellas extrañas fórmulas que resultaban ser ciertas. Así que Hardy invitó a Ramanujan a trabajar con él en Reino Unido.

Allí, la salud del matemático indio, que siempre había sido delicada, empeoró. Cuentan que, estando Ramanujan ingresado en el hospital, recibió la visita de su amigo Hardy, que le dijo:

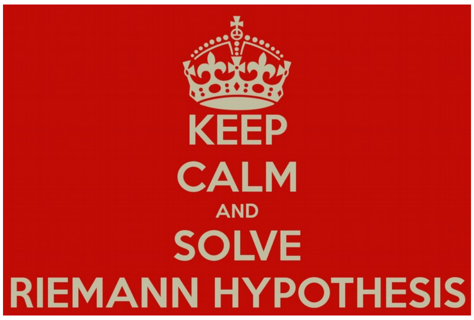
He venido en un taxi con el número 1729, un número nada interesante.

Y Ramanujan le respondió:

¡No! ¡Es un número muy interesante! Es el número entero positivo más pequeño que puede expresarse como la suma de dos cubos de dos formas distintas.

En efecto: una forma es $1^3+12^3=1729$, y la otra es $9^3+10^3=1729$. Pero... ¿cómo se dio cuenta de eso Ramanujan así de repente? Cosas de genios. Desde entonces, al número 1729 se le conoce como **"taxicab number"**.

3.8. La hipótesis de Riemann



La hipótesis de Riemann es una conjetura formulada por Bernhard Riemann en 1859. Constituye uno de los Problemas del Milenio (de esos pendientes de resolver; incluso te dan un millón de dólares si logras encontrar la solución, §26). De hecho, entre los matemáticos es casi unánime la idea de que se trata de **uno de los problemas más difíciles** de abordar (por no decir el que más). Aun así, vamos a intentar explicar en qué consiste la conjetura de Riemann en las siguientes líneas.

Tiene que ver con las soluciones de una determinada ecuación. Pero hagamos antes un poco de memoria de algunos conceptos básicos.

Todos sabemos resolver ecuaciones sencillas, como, por ejemplo, la siguiente ecuación de segundo grado:

$$x^2-5x+6=0.$$

Tiene dos soluciones: $x=2$ y $x=3$ (se pueden comprobar sustituyendo en la ecuación y viendo que se cumple la igualdad). Los matemáticos prefieren decir que *2* y *3* son los ceros de la función $f(x)=x^2-5x+6$. En otras palabras, si escribimos la ecuación anterior como

$$f(x)=0$$

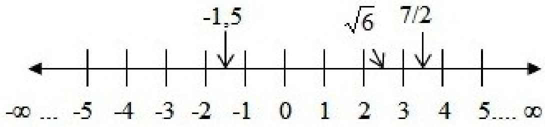
podemos afirmar que al sustituir x por *2 nos da 0*, o lo que es igual, $f(2)=0$. Y lo mismo para $f(3)$. Así que **resolver una ecuación es encontrar los ceros de una determinada función**.

Pues bien, **la hipótesis de Riemann se refiere a los ceros de una función** concreta, o, equivalentemente, a las soluciones de la ecuación:

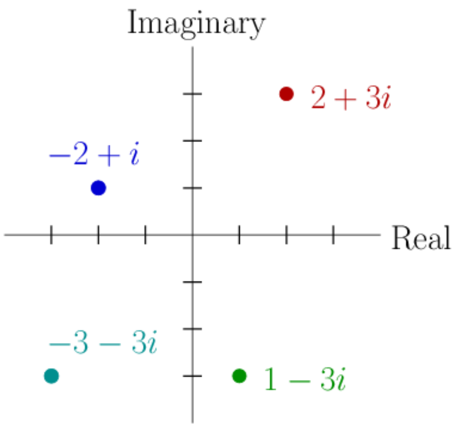
$$\zeta(s)=0,$$

donde $\zeta(s)$ **es la llamada función zeta de Riemann**. Dicha función es bastante más complicada que la $f(x)$ anterior y no vamos a definirla en detalle. Lo más significativo es que $\zeta(s)$ es una función donde en vez de números reales aparecen **números complejos** (por eso normalmente utilizamos la letra s —o a veces z— en lugar de x). ¿Números complejos? Seguimos con el repaso.

Los números reales son los que estamos acostumbrados a manejar y que se representan en la recta numérica:

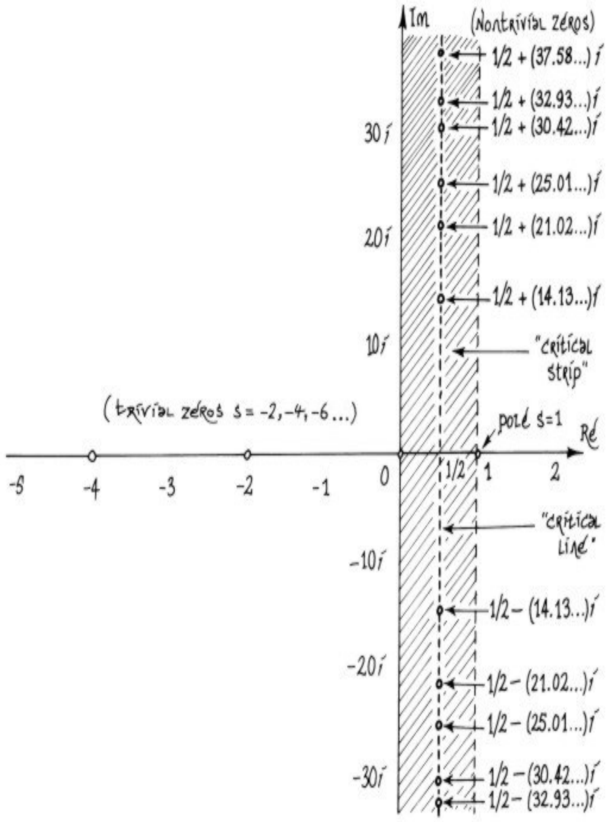


Sin embargo, los números complejos tienen dos coordenadas (una se llama **parte real** y la otra **parte imaginaria**) y por tanto no se pueden representar en una recta, sino que hay que hacerlo en **un plano**. Por ejemplo, en el siguiente plano se han representado cuatro números complejos: el de coordenadas *(2,3)*, que también se escribe como *2+3i,* el de coordenadas *(-2,1)*, que también se escribe como *-2+i,* el número *(-3,-3)=-3-3i* y el número *(1,-3)=1-3i*.



Volvamos a nuestra ecuación *ζ(s)=0* (o a los ceros de la función zeta de Riemann, si os gusta más decirlo así ahora). Esta ecuación **tiene infinitas soluciones**. Definitivamente está claro que es más complicada que la sencilla ecuación del principio *f(x)=0*, que tenía solo dos soluciones. Además no olvidemos que se tratan de soluciones complejas, es decir, de puntos del plano.

La pregunta clave es: ¿Y si representamos las soluciones en el plano, (dónde caen los ceros de la función zeta de Riemann)? La respuesta no es evidente, pues no se conocen todos los ceros de *ζ(s)*. Aparte de los llamados **ceros triviales: los enteros pares negativos**, o sea, los números de coordenadas *(-2,0)*, *(-4,0)*, *(-6,0)*... en el plano complejo, se sabe que el resto de los ceros (llamados **ceros no triviales**) han de estar necesariamente situados en la franja sombreada del gráfico de abajo, es decir, **su parte entera debe estar entre** *0* **y** *1*.



Y por fin hemos llegado a poder formular la **hipótesis de Riemann**, que trata de afinar mucho más la franja sombreada para dar una zona más concreta de donde están los ceros. La conjetura dice así:

Los ceros no triviales de la función zeta de Riemann tienen todos parte real igual a 1/2.

Gráficamente eso quiere decir que los ceros estarían todos sobre la línea discontinua vertical dibujada arriba en el plano complejo. Si la hipótesis fuera falsa, entonces existiría algún cero no trivial fuera de esa línea (aunque dentro de la franja sombreada, eso seguro), pero de momento todos los ceros que se han encontrado (incluso con ayuda de potentes ordenadores) siempre están sobre la línea crítica. Sin embargo, hace falta una demostración matemática rigurosa que nos asegure que siempre va a ser así, y que nunca se encontrará un cero no trivial fuera de la línea crítica de números complejos con parte real igual a 1/2. (Si no tenéis claro qué es eso de una "demostración" echad un vistazo a §3.)

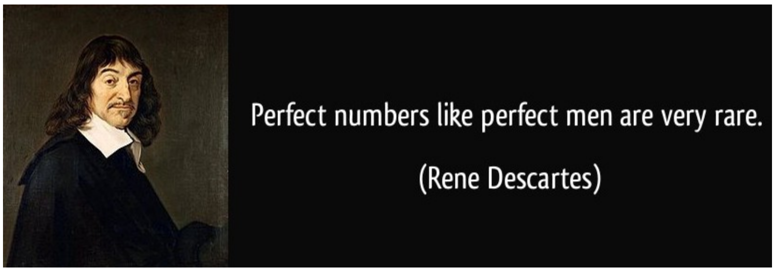
¿Y por qué es importante todo esto para los matemáticos? **La función zeta de Riemann está fuertemente relacionada con los números primos** (Euler fue el primero en darse cuenta de este hecho, §36). Entender los ceros de la función zeta de Riemann conduciría a resultados fundamentales sobre cómo están distribuidos los números primos... y no olvidemos que **los números primos son los ladrillos de las matemáticas**, pues todos los números compuestos pueden expresarse como producto de primos. Así, Hilbert incluyó la hipótesis de Riemann como el octavo problema de su famosa lista de problemas sin resolver a principios del s. XX, y afirmó que demostrar la conjetura de Riemann implicaría, en particular, demostrar la conjetura de los primos gemelos, §33.

La criptografía actual se basa en las matemáticas de los números primos. Cada vez que hacemos una compra por Internet o enviamos un mensaje esta información se cifra para que terceras personas no puedan acceder a ella. **Si tuviéramos un conocimiento completo de cómo se distribuyen los números primos, entonces, todo el sistema de claves**

de la World Wide Web se derrumbaría. Las técnicas que condujeran a la demostración de la hipótesis de Riemann no solo constituirían un hito en la historia de las matemáticas, sino que podrían conllevar un cambio en la forma del cifrado de la información en un mundo cada vez más conectado. Pero por suerte, o por desgracia, **parece que está más cerca el desarrollo pleno de la llamada criptografía cuántica (no basada en los números primos) que la demostración de la hipótesis de Riemann.**

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p\ prime}\frac{1}{1-p^{-s}}$$

3.9. Los ¿perfectos? números perfectos



Los **números perfectos** son aquellos que **se obtienen sumando sus divisores propios** (o sea, sus divisores sin contar el propio número). Por ejemplo, el número 6 es perfecto porque los divisores propios del 6 son 1, 2 y 3, y sumando estos se obtiene precisamente el número 6. Los tres números perfectos más pequeños son 6, 28 y 496:

$$6 = 1 + 2 + 3$$

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$$

Pero... **¿por qué estos números se llaman perfectos?**

El origen de los números perfectos se remonta a **la Escuela Pitagórica**, y ya aparecen algunos resultados importantes sobre los mismos en los *Elementos* de Euclides, §11, probablemente recogidos de algún texto pitagórico anterior. Los antiguos griegos conocían los cuatro primeros números perfectos (el cuarto es 8128, recogido por Nicómaco de Gerasa hacia el año 100). Pitágoras y los suyos se empeñaron en darle una explicación casi religiosa a esos números. Su belleza y armonía los hacían perfectos. **San Agustín** afirmó que Dios hizo el mundo en 6 días porque eligió un número perfecto. El siguiente número perfecto, 28, coincide mágicamente con el ciclo lunar. Y así, a lo largo de la historia, siempre aparecía una explicación mística de los números perfectos.

Nicómaco propuso, sin demostrar, una seria de afirmaciones en relación a los números perfectos. Algunas se han revelado falsas y otras están pendientes de demostrar (aunque parecen bastante plausibles). Estas son:

- *El número perfecto n-ésimo tiene n dígitos [FALSO]*. Aunque los primeros números perfectos lo cumplen [el primero (6) tiene una cifra, el segundo (28) tiene dos cifras, el tercero (496) tiene tres cifras...] la afirmación es falsa para el quinto número perfecto (33550336).

- *Todos los números perfectos son pares [CONJETURA]*. Hasta ahora se ha encontrado medio centenar de números perfectos (los últimos tienen millones de dígitos) y todos ellos son pares. ¿Habrá alguno impar? No se sabe.

- *Todos los números perfectos acaban en 6 o en 8 alternativamente [FALSO, AL MENOS PARCIALMENTE]*. Es cierto que todos los números perfectos pares acaban en 6 o en 8, aunque no ocurre alternativamente. Además, si hubiera números perfectos impares, dejaría de ser cierto. La demostración para números pares se puede deducir del siguiente resultado.

- *Cualquier número perfecto es de la forma $2^{p-1}(2^p - 1)$, para $p > 1$, siendo $2^p - 1$ un número primo. [CONJETURA***]***. La fórmula anterior ya es mencionada por Euclides, §11. Para números perfectos pares, Euler, §36, demostró que esta afirmación sí es cierta, pero queda por demostrar que también es cierta para números perfectos impares (o bien demostrar que todos los números perfectos son pares, lo que sigue siendo una conjetura como ya se ha indicado). Por cierto, un número primo de la forma $2^p - 1$ se llama primo de Mersenne y, para que $2^p - 1$ sea primo, es necesario que *p* también sea primo.

- *Hay infinitos números perfectos [CONJETURA]*. Otra conjetura que nos recuerda a la conjetura de los primos gemelos, §33, que a su vez tiene mucho que ver con la difícil hipótesis de Riemann, §8.

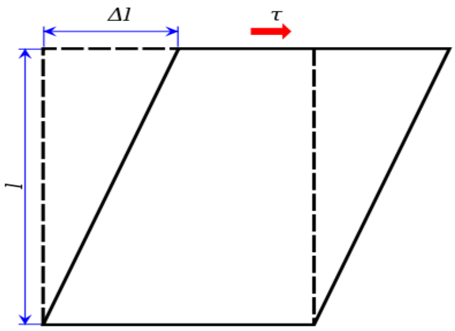
Podríamos seguir llenando páginas y páginas con propiedades de los números perfectos. Así que **se podrá discutir todo lo que se quiera sobre si estos números son divinamente perfectos o no, pero de lo que no cabe duda es de que son endiabladamente complicados.**

3.10. Triángulos en torres eléctricas

Seguro que todos reconocéis en la foto una **torre eléctrica de alta tensión**, de esas que están por todas partes. Si os fijáis la próxima vez que encontréis una por lo carretera, veréis que tienen un montón de **triángulos metálicos**. Triángulos grandes, triángulos pequeños dentro de los grandes..., pero solo triángulos. ¿Por qué no aparecen otras formas poligonales como cuadrados o rectángulos? **¿Por qué solo triángulos?**

Estas torres eléctricas deben tener una estructura estable que soporte los vientos, los cambios de temperatura o incluso movimientos de tierra moderados. Pues bien, resulta que **los triángulos son los únicos polígonos "rígidos"**, tal y como estudió el matemático francés **Augustin Cauchy** a principios del siglo XIX.

Esto quiere decir que, **aunque sus esquinas estén articuladas** (pues la estructura se forma atornillando puntales rectos), **no pueden moverse sin deformar ninguno de los lados**, lo que les confiere gran estabilidad. Sin embargo, con el resto de polígonos no sucede así, como se ve, por ejemplo, en este rectángulo, que se convierte en un romboide fácilmente modificando las esquinas, pero sin deformar los lados:

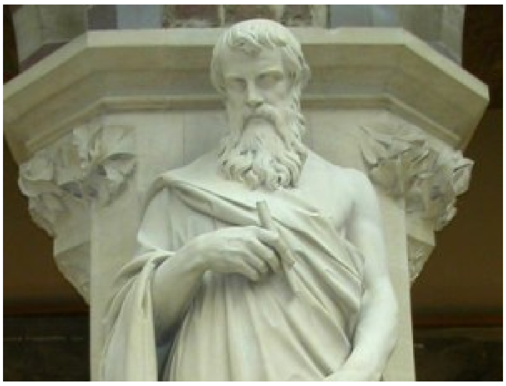


Así que una torre hecha de rectángulos (o cualquier polígono que no sea un triángulo) se derrumbaría en cuanto una esquina se aflojara un poquito...

Y no solo las torres eléctricas, muchas otras estructuras se construyen a base de triángulos para asegurar la estabilidad, como, por ejemplo, el puente de la imagen.

¿Os imagináis qué pasaría si no estuvieran las traviesas diagonales?

3.11. Euclides, sus *Elementos* y la infinitud de los números primos



Euclides, hacia el año 300 a. C., fue de los primeros que empezaron a utilizar el **razonamiento matemático** de forma similar a como se realiza hoy en día. **Los** *Elementos***, su obra maestra, está formada por 13 libros** con 465 proposiciones (esto es, verdades matemáticas) que son demostradas con una lógica impecable a partir de una serie de postulados iniciales básicos sobre los que Euclides construye toda su obra. Y ese es su mérito: haber dado forma y estructura lógica a los resultados matemáticos que se conocían en su momento pero que solo estaban expresados de forma vaga.

Una de las técnicas utilizadas por Euclides en sus razonamientos es la conocida como **"reducción al absurdo"**. Consiste en demostrar que una proposición matemática es verdadera probando que, si no lo fuera, conduciría a una contradicción. Vamos a verlo con más detalle.

En una demostración por *reducción al absurdo* hay que **partir de una hipótesis contraria a lo que se quiere demostrar** y, a través de una **cadena de razonamientos acertados**, llegar a una **conclusión falsa**, inconsistente o absurda. El fallo que ha conducido a esa conclusión final errónea ha de haber sido la hipótesis de partida (pues los razonamientos intermedios son acertados). Por consiguiente, queda así demostrado que la hipótesis cierta es la opuesta a la inicial (que era la contraria a lo que queríamos demostrar) y por tanto la hipótesis cierta es lo que realmente queríamos demostrar.

Entre las grandes proposiciones y **teoremas, §3,** que **Euclides demostró magistralmente,** se encuentran resultados que nos suenan a todos de las clases del instituto, como por ejemplo:

- **Los ángulos de un triángulo suman 180°.**
- En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos (**Teorema de Pitágoras**).
- **Hay infinitos números primos.**

Estos resultados son conocidísimos... pero ¿son realmente ciertos? Claro que sí: no nos engañaron los profesores (bueno, el de los 180° tiene más miga de la que parece, §24). Ahora bien: ¿cómo se demuestra que estas proposiciones son ciertas? ¿Sabríais vosotros demostrarlas? Mmmh... no es fácil ¿verdad? Pues Euclides lo hizo hace 2300 años (!!!).

Presentamos a continuación una demostración de la infinitud de los números primos (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17...). La demostración es por reducción al absurdo.

Supongamos que el conjunto de los números primos es finito, siendo el primo mayor M. Así pues, escribimos ese conjunto como:

$$\{2, 3, 5, 7, \ldots, M\}$$

Consideremos el número que se forma multiplicando todos los números del conjunto anterior y sumándole 1 a dicho resultado, es decir:

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots M + 1$$

Este número que acabamos de construir es mayor que M (pues se ha multiplicado el propio M por números mayores que 1).

Como ese número es mayor que M no puede estar en el conjunto de los números primos {2, 3, 5, 7, …, M} (cuyo máximo era M). Por tanto no es primo, es decir, es compuesto.

Como el número $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots M + 1$ es compuesto entonces puede factorizarse en números primos, es decir, tendrá en su factorización algún factor primo del conjunto {2, 3, 5, 7, …, M}.

Para mayor claridad vamos a suponer que el número compuesto $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots M + 1$ tiene al número primo 3 en su factorización (es decir, que es divisible entre 3). El argumento que viene a continuación podría hacerse con cualquier otro número del conjunto de primos {2, 3, 5, 7, …, M} aunque no fuera el 3.

Como tiene al 3 en su factorización, podremos escribir el número $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots M + 1$ como producto del 3 por otro número natural que llamaremos q. Esto es:

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots M + 1 = 3 \cdot q$$

Dejando el 1 a la izquierda en la igualdad obtenemos

$$1 = 3 \cdot q - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots M$$

Sacando factor común el 3:

$$1 = 3 \cdot (q - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdots M)$$

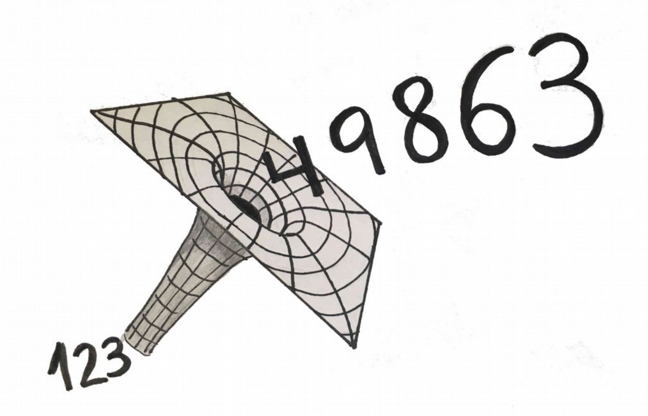
Acabamos de llegar a la conclusión que el número 1 se puede poner como el producto de 3 por otro número natural (el del paréntesis), lo que es absurdo: ¡1 no puede ser menor que el resultado de multiplicar 3 por algo! Nótese que sería igualmente absurdo si en vez de con el 3 lo hubiéramos hecho con el 5 o el 7 o cualquier otro primo del conjunto {2, 3, 5, 7, …, M}.

Como los razonamientos que hemos ido haciendo son todos correctos, lo único que explica que hayamos llegado a una conclusión absurda (errónea) es que la hipótesis de partida no fuera correcta.

Por lo tanto, la hipótesis correcta tiene que ser la contraria de aquella con la que iniciamos la demostración, es decir, la hipótesis correcta es que el conjunto de los números primos NO es finito (o sea, que es infinito). QED.

Por cierto, QED significa *quod erat demonstrandum*, y se suele poner cuando termina una demostración más o menos larga, por si alguno está tan perdido que ni se ha enterado de que ha llegado al final de la prueba del teorema.

3.12. Números agujeros negros

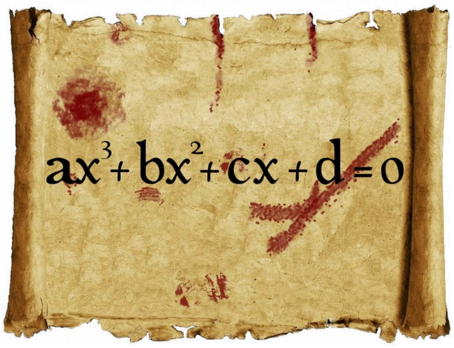


Los agujeros negros son objetos del espacio-tiempo tan densos que no dejan escapar ni tan siquiera la luz. Atrapan todo lo que hay a su alrededor. Pues bien, también hay números que se comportan así: atraen a todos los demás números hacia ellos.

El **número 123** es uno de esos agujeros negros numéricos. Vamos a ver por qué. Tomamos un número natural cualquiera de tres o más cifras y contamos cuántas de ellas son pares y cuantas impares, y con estos datos construimos un número de la siguiente forma: colocamos primero la cantidad de cifras pares que tenía el inicial, después la cantidad de cifras impares y después la cantidad total de cifras que tenía. Con el número obtenido hacemos lo mismo, y así sucesivamente. Sea cual sea el número inicial siempre terminaremos en el 123, y no saldremos de él.

Por ejemplo, pensemos en el número 49863. Tiene 3 cifras pares (el 4, el 8 y el 6) y 2 impares (el 9 y el 3). Como tiene 5 cifras, con él obtendríamos el número 325. Hacemos lo mismo con éste: 1 dígito par (2) y 2 impares (3 y 5). Como tiene 3 cifras, obtenemos con él el 123. Y ahora el 123 tiene una par (el 2), dos impares (el 1 y el 3) y tres dígitos, obteniendo así el número 123 de nuevo. **Por tanto el 123 se ha tragado al 49863 como si fuera un agujero negro**.

3.13. La ecuación cúbica: de traca



Hablando mal y pronto podemos decir que resolver una ecuación es encontrar los valores de x que hacen que se cumpla la igualdad. Por ejemplo, para la ecuación $4x^2 - 3x - 10 = 0$ tenemos que las soluciones son $x = 2$ y también $x = -5/4$. Vemos que al cambiar la x por el valor 2 se cumple la igualdad. Y lo mismo pasa para $x = -5/4$. Esta ecuación es de segundo grado porque lleva x^2 (los matemáticos las llaman **ecuaciones cuadráticas**) y para obtener las soluciones anteriores **basta aplicar la fórmula que seguro que habéis estudiado alguna vez en el instituto**... esa de:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

donde a es el número que aparece delante de la x^2, b es el número que aparece delante de la x, y c es el número suelto. O si queréis hablar un poco mejor, son los coeficientes del término cuadrático, del término lineal y el término independiente. En nuestro caso: $a = 4$, $b = -3$, $c = -10$. Con la fórmula anterior podemos resolver cualquier ecuación de 2º grado poniendo en lugar de a, b, c los valores que correspondan.

Esa fórmula se conoce desde hace muchos muchos años. Tantos que no se sabe ni quién fue el primero en usarla. La fórmula es muy bonita, pero no es la panacea, porque solo vale para ecuaciones de segundo grado. ¡Ajá!, **¿y qué ocurre con las ecuaciones de tercer grado, es decir, las que llevan incluso un término con x^3 y que los matemáticos llaman ecuaciones cúbicas?**

Pues nada, porque por suerte **hay otra fórmula**, que también es muy chula, pero que no la vamos a escribir porque es un poco larga. **¿Y se sabe quién descubrió esa fórmula? Mmmh, sí que se sabe y la historia no tiene desperdicio**. Varios son los culpables.

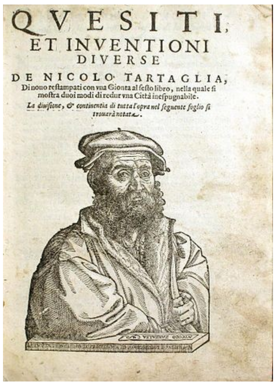
Empecemos por **Scipione del Ferro**. Este matemático italiano de la **Universidad de Bolonia** fue el primero en encontrar un método para resolver ecuaciones cúbicas del tipo que llaman deprimidas, que son las que no llevan x^2, como por ejemplo $2x^3 + x - 7 = 0$.

Del Ferro, en vez de lanzarse como loco a publicar este importante hallazgo, prefirió **guardarse la "fórmula" en secreto**. ¿Por qué? Bueno, porque era el **año 1500** más o menos y entonces los conocimientos se reservaban para poder usarlos como armas arrojadizas contra otro matemático: "Mira lo que sé yo, anda, si quieres quitarme la plaza en la universidad tendrás que saber tanto como yo". No había oposiciones por aquella época y las cátedras eran tan golosas como ahora. Otras veces se enfrentaban en estos retos por el dinero que sacaban de las apuestas. En ambientes académicos eran casi como las finales de fútbol de ahora. Un espectáculo.

Por cierto, que hemos puesto entre comillas la palabra "fórmula". Hay que tener en cuenta que el lenguaje algebraico estaba empezando a dar sus primeros pasos por aquel entonces, y más que fórmulas eran "recetas" dichas de palabra: "coge el número tal y hazle tal operación, después súmale..." Además, solían considerar solo números positivos en busca siempre de interpretaciones geométricas.

Total, que el bueno de del Ferro se guardó su secreto hasta casi el lecho de muerte, y **solo se lo confesó entonces a uno de sus alumnos**. Tal vez debió de pensar que en la tumba de poco le iba a servir. El alumno, bastante mediocre como se verá después, se llamaba **Antonio María Fior**.

En cuanto Fior empezó a alardear de conocer la fórmula **se organizó una contienda matemática entre él y nada menos que Tartaglia**, uno de los grandes matemáticos del Renacimiento y experto en este tipo de duelos.



Antes de seguir, conviene decir en honor de Tartaglia que su nombre verdadero era Niccolo Fontana, pero se quedó con el apodo de Tartaglia (tartaja, tartamudo) desde que de niño sufrió una herida de sable en la cara durante la invasión francesa de su ciudad natal de Brescia (Italia) que le ocasionó un defecto en el habla. Peor suerte corrió su padre que murió en la batalla. Cosas de la época. Pero volvamos al duelo.

Antonio Fior partía como favorito gracias a su fórmula secreta para resolver ecuaciones cúbicas deprimidas. Cada uno de los combatientes propuso al otro 30 problemas matemáticos que debían ser resueltos el 13 de febrero de 1535. Fior eligió 30 ecuaciones cúbicas deprimidas para "lanzarle" a Tartaglia, mientras que Trataglia le propuso 30 problemas variados. El que ganara se llevaría el dinero de la apuesta y el prestigio. Ganó Tartaglia 30-0. Y es que Tartaglia, que al principio solo sabía resolver ecuaciones cúbicas sin el término lineal (como, por ejemplo, $2x^3+4x^2-5=0$), debía haber conseguido también aprender a resolver ecuaciones cúbicas deprimidas (sin el término cuadrático) en algún momento previo.

Y todavía hay más. En medio de esta locura matemática aparece el más excéntrico de todos los matemáticos: **Gerolamo Cardano**. Astrólogo, jugador empedernido y médico de reconocido prestigio, fue acusado en Bolonia de herejía en 1570. Hijo ilegítimo de infancia enfermiza, se cuenta de él que gustaba de inflingirse dolor a sí mismo, que orinaba litros y litros cada día, que era insomne, que predecía el futuro o que nació muerto, pero que volvió a la vida tras bañarse en vino. Su mujer fue envenenada por su propio hijo, que fue subsiguientemente ejecutado. En fin, más cosas de la época.

El caso es que tras el abrumador triunfo de Tartaglia en el famoso duelo con Fior, Cardano invita al flamante ganador a su casa con la promesa de ayudarle a salir de sus continuos apuros económicos, y le pide a cambio que por favor le cuente cómo resolver ecuaciones cúbicas deprimidas. **Cardano jura solemnemente a Tartaglia guardar el secreto** y este acaba cediendo tras muchas presiones del obsesivo médico.

Con el método para resolver ecuaciones cúbicas deprimidas (o sea, sin la x^2), Cardano es capaz ya de resolver ecuaciones cúbicas totalmente generales (como, por ejemplo, $x^3+x^2+x+1=0$), pues había encontrado una forma de transformar estas ecuaciones generales en otras deprimidas. Pero se ve imposibilitado para publicar sus resultados, pues la solución pasa por reducirlas a ecuaciones deprimidas. Aunque el excéntrico matemático y médico no tenía problemas económicos, y se encontraba en una posición cómoda para permitirse el lujo de publicar resultados (no como el pobre Tartaglia, que había de ganarse las habichuelas a base de duelos matemáticos), la promesa hecha a Tartaglia lo ataba de pies y manos.

Sin embargo, **Cardano, ansioso por publicar, encuentra una salida**. Sostiene que la solución de la ecuación cúbica deprimida que utiliza en su resolución de la ecuación general no es la de Tartaglia, sino la de del Ferro. Es posible que el manuscrito original de del Ferro hubiera sido heredado por su yerno Annibale Nave (quien reemplazó a del Ferro como catedrático en la Universidad de Bolonia) y que finalmente acabara en las manos de Cardano, liberándole de la promesa a Tartaglia, porque al fin y al cabo ahora tenía unas fuentes alternativas. Cardano publica los resultados en su libro ***Ars Magna*** en 1545.

Tartaglia arde de rabia al enterarse de la afrenta de Cardano y comienza una gran pelea dialéctica entre ellos, insultos incluidos. Le escribe cartas encendidas a Cardano, que se niega a contestar directamente, dejando la correspondencia en manos de su secretario **Ludovico Ferrari**.

¿Y este qué pinta en la historia? Pues mucho. Resulta que Ferrari llega con 14 años a casa de Cardano como sirviente. Su interés por los trabajos del prestigioso médico y matemático van en aumento, de ese modo Ferrari pasa así de sirviente a secretario, de secretario a alumno, y finalmente de alumno a colega del propio Cardano. **El nivel matemático de Ludovico Ferrari supera a su maestro y llega a resolver ecuaciones cuárticas generales** (con x^4 también) con un método que consiste en reducirlas otra vez a ecuaciones cúbicas deprimidas. De hecho, la demostración de Ferrari apareció también en el *Ars Magna*.

En 1548, Tartaglia recibe una oferta para dar clases en Brescia. Al fin una oportunidad para salir de su mala racha. Pero a Tartaglia le quedaba un último reto pendiente para poder optar a la plaza: debía combatir con Ferrari sobre las ecuaciones de tercer y cuarto grado. El 10 de agosto de 1548 se produce el asalto y, esta vez, el genial Tartaglia se ve superado por su adversario, perdiendo así sus últimas esperanzas de prosperidad. Murió igual de pobre que nació.

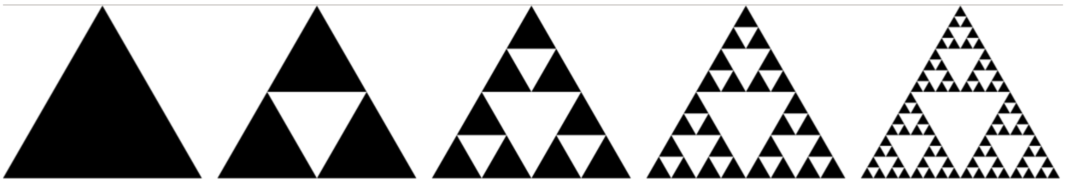
La verdad es que Ferrari tampoco acabó sus días muy bien que digamos. Justo el año en que se le ofreció la plaza en la Universidad de Bolonia (1565) murió envenenado con arsénico, probablemente a manos de su propia hermana. En cuanto a Cardano, puede decirse que creyó a muerte en la astrología, cuyas cábalas predecían que el día de su muerte sería el 20 de septiembre de 1576. Se cuenta que se suicidó ese día para hacer correcta la predicción.

Y después de este culebrón ya sabemos al menos que hay métodos para resolver ecuaciones generales no solo de grado 3, sino incluso de grado 4. Las fórmulas son bastante largas como para ponerlas aquí, pero lo importante es que existen. **Ahora bien, ¿qué pasa con las ecuaciones de grado 5?**

Pues para eso hay que esperar hasta el siglo XIX, cuando un matemático noruego (**Abel**) y otro francés (**Galois**) demostraron que las ecuaciones quínticas generales (con x^5) no tienen fórmula algebraica para resolverlas (hablando un poco mejor: **no son resolubles por radicales**). Y de hecho se deduce de sus resultados que **tampoco puede haber un método exacto para las ecuaciones generales de mayor grado**.

Por cierto, que Abel murió jovencísimo de tuberculosis, con 26 años... aunque la traca final de toda esta historia es para Galois que murió, con tan solo 20 años, de las heridas causadas por un duelo a pistolas (un duelo de verdad, por un asunto de faldas, nada que ver con los duelos académicos de Tartaglia y cía.). Suerte que la noche de antes se dedicó a escribir buena parte de sus grandes aportaciones matemáticas en una correspondencia arrebatada, que ha quedado como legado de uno de los mejores matemáticos de todos los tiempos pese a su brevísima vida.

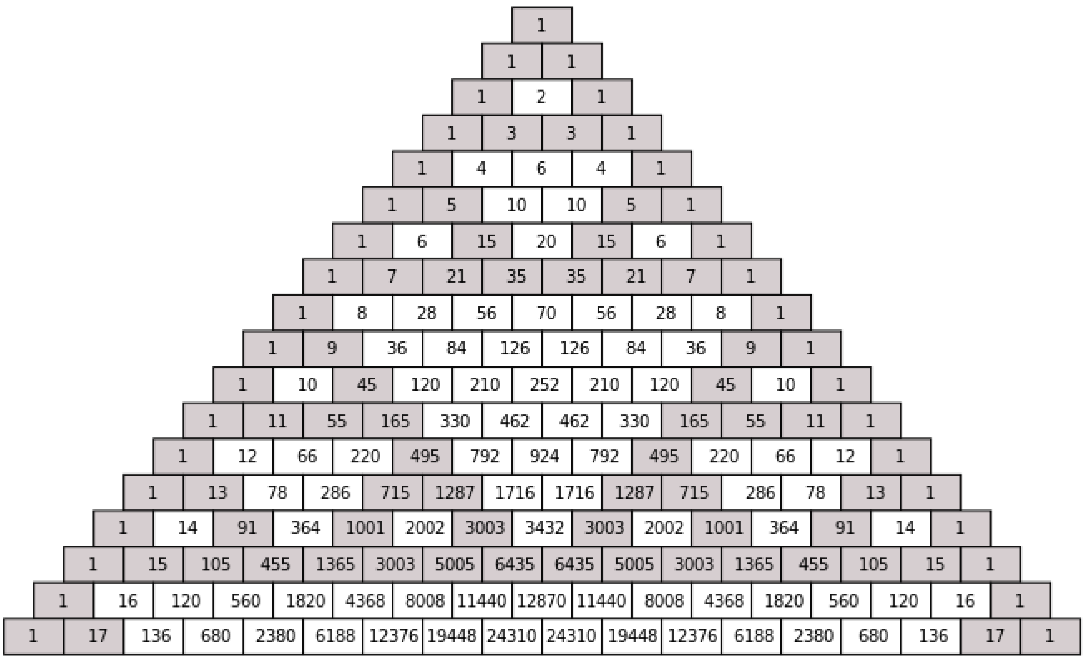
3.14. Pares o nones: el triángulo de Sierpinski y el de Pascal



El **triángulo de Sierpinski** se forma siguiendo el proceso de la imagen de arriba una y otra vez hasta el infinito. Esa forma repetitiva es lo que se llama un **fractal**. Más concretamente se construye así:

1. Se empieza con un triángulo equilátero.
2. Se divide en 4 triángulos equiláteros iguales y se quita el central.
3. Se repite el paso anterior con cada uno de los triángulos que quedan… y así infinitamente.

Por otra parte, el **triángulo de Pascal** está formado por filas de números, siendo los laterales siempre el 1 y obteniéndose **los demás números como suma de los dos superiores** como se ve a continuación para las primeras filas (habría infinitas):



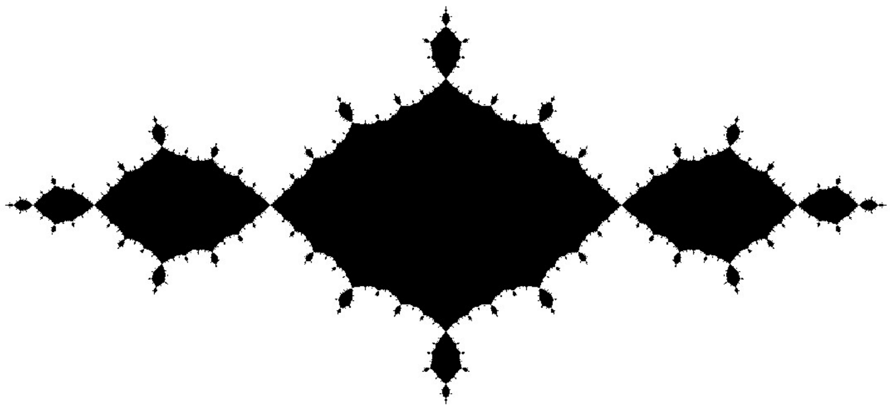
La pregunta que nos interesa aquí es **¿qué números son más frecuentes** en el triángulo de Pascal: **los pares o los impares?** Y de paso, **¿qué tiene que ver el triángulo de Pascal con el de Sierpinski?**

En la imagen anterior del triángulo de Pascal se han sombreado los números impares mientras que los pares se han dejado en blanco. Se aprecia un cierto patrón, que recuerda a la construcción del **triángulo de Sierpinski** que vimos al principio. Es más, si nos fijamos con detalle en el **triángulo de Sierpinski veremos que tiene exactamente la misma forma que el triángulo de Pascal**, donde los números pares se han pintado en blanco y los impares de gris.

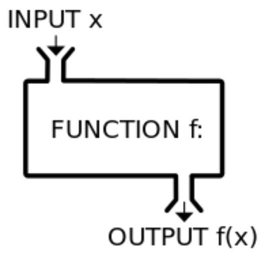
Así que, volviendo a la pregunta: ¿Hay más pares o más impares? Pues la respuesta ahora empieza a estar clara y el resultado es sorprendente. **Son "casi todos" pares** (blancos). De hecho, conforme el triángulo de Pascal se va ampliando a más y más filas, la probabilidad de encontrarse un número par tiende a 1 (o sea, al 100%) mientras que la probabilidad de encontrarse un número impar tiende a 0. ¿Veis cómo las zonas blancas (números pares) en cada iteración se van **“**comiendo**”** las zonas grises (números impares)?

Ah, y por si a alguien le suena otro nombre, el triángulo de Pascal es también conocido como triángulo de **Tartaglia,** o triángulo de Khayyam, o triángulo de Yang-Hui, dependiendo del país, pues diferentes culturas lo han estudiado en detalle. Y por otra lado el triángulo de Sierpinski se llama también criba de Sierpinski o estuche de Sierpinski.

3.15. 15. Conjuntos de Julia



Una **función** puede verse como una **especie de máquina** en la que **entran valores** (que solemos denotar por *x*) y, tras una serie de operaciones, **salen otros valores** [que llamamos **y** o *f(x)*]. A cada entrada *x* le corresponde una salida *y* concreta de acuerdo a la función. A los matemáticos franceses Pierre **Fatou** y Gaston **Julia** (s. XX) se les ocurrió estudiar la siguiente cuestión aplicada a cierto tipo de funciones: **¿y si el valor de salida lo vuelvo a meter en la función como nueva entrada y repetimos esto así cíclicamente?** El resultado es sorprendentemente bello: se obtienen imágenes como la anterior, que los matemáticos llaman **fractales**.



Empecemos con una función sencilla: $f(x)=x^2$. Se trata de una "máquina" que eleva al cuadrado el valor de la entrada. Así, por ejemplo, vamos a empezar metiendo el número *2* a la función (ese primer número con el que empezamos se llama **semilla**). Como la función calcula el cuadrado, el resultado de salida será un *4*. Si ahora cogemos ese *4* y lo metemos a la entrada de la función nos dará *16*. Y ahora podríamos coger el 16 y meterlo otra vez a ver qué sale, y así una y otra vez. Matemáticamente podríamos escribir todo esto de la siguiente manera:

$$f(2)=4$$

$$f(4)=16$$

$$f(16)=256$$

$$f(256)=65536$$

...

Otra forma de expresar lo anterior es mediante una serie, que empieza en la semilla y sigue con las salidas que nos da la función:

$$2, 4, 16, 256, 65536, \ldots$$

Es evidente que nos van a ir saliendo números más y más grandes. Se dice entonces que la serie anterior es una **serie divergente**. ¿Qué ocurriría si en vez de con el número 2 empezamos con otro semilla? ¿Vamos a obtener siempre una serie divergente? Probemos con otro número. Por ejemplo, con la semilla *0.5* tendríamos: $f(0.5)=0.25$, $f(0.25)=0.0625$, etc... Se ve más claro en forma de serie:

$$0.5, 0.25, 0.0625, 0.00390625, \ldots$$

Es decir, en este caso los números no se hacen cada vez más grandes como ocurría antes y podemos afirmar que si partimos de la semilla *0.5* se tiene ahora una **serie no divergente**. Así que acabamos de ver que **hay semillas (por ejemplo $x=2$) que nos dan series divergentes y otras semillas (por ejemplo $x=0.5$) que no**. La pregunta clave es ¿para qué semillas vamos a obtener series no divergentes? Si lo pensamos bien veremos que, si la semilla toma cualquier valor entre -1 y 1, tendremos series no divergentes. Podéis hacer la prueba eligiendo cualquier semilla que esté en el conjunto de los números entre -1 y $+1$ (recuerda que los números negativos al elevarlos al cuadrado dan resultados positivos).

Vale, ¿pero qué tiene que ver esto con el extraño dibujo de arriba, o sea, con los **conjuntos de Julia**? Bueno, para verlo tenemos que complicarlo un poco. En vez de trabajar con números reales, vamos a trabajar con **números complejos** (ya hemos hablado en §8 sobre los números complejos al comentar la hipótesis de Riemann). Usaremos en adelante la letra z en vez de x, porque esa es la notación habitual para los números complejos. También vamos a modificar la función: ahora, además de elevar al cuadrado, vamos a restar una unidad, es decir, la nueva función compleja que nos interesa es:

$$f(z)=z^2-1.$$

La pregunta es la misma de antes: ¿para qué semillas vamos a obtener series no divergentes? Eso sí, ahora hay que tener en cuenta que **las semillas son números complejos y, por tanto, tienen dos coordenadas y gracias a ello las podemos representar en el plano complejo**. Eso es precisamente lo que se ha hecho en el dibujo de arriba para la **función** $f(z)=z^2-1$: se han pintado en color negro los puntos del plano que corresponden a semillas que dan series no divergentes y se han dejado en blanco el resto de puntos que sí dan series divergentes (no se han señalado los ejes de coordenadas del plano complejo). **Al conjunto negro se le llama conjunto de Julia y al blanco se le llama conjunto de Fatou**.

Hay que recordar que la **suma de números complejos** se define coordenada a coordenada como:

$$(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d),$$

mientras que la **multiplicación de números complejos** se define de forma un poco más complicada mediante la expresión:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac-bd, ad+bc).$$

Por ejemplo, si empezamos con la semilla de coordenadas complejas $(1,1)$ obtendríamos para la primera salida de $f(z)=z^2-1$ lo siguiente:

$$(1, 1)^2 - 1 = (1, 1) \cdot (1, 1) - (1, 0) = (1-1, 1+1) - (1, 0) = (0, 2) - (1, 0) = (-1, 2)$$

Utilizando este número como nueva entrada obtendríamos ahora:

$$(-1, 2)^2 - 1 = (-1, 2) \cdot (-1, 2) - (1, 0) = (1-4, -2-2) - (1, 0) =$$
$$= (-3, -4) - (1, 0) = (-4, -4)$$

Podemos continuar y obtener así la siguiente **serie divergente para la semilla** *(1, 1)*:

(1, 1), (−1, 2), (−4, −4), (−1, 32), (−1024, −64), (1044479, 1310721), …

Así pues, el punto del plano complejo *(1, 1)* lo pintaríamos en blanco, pues **pertenece al conjunto de Fatou**.

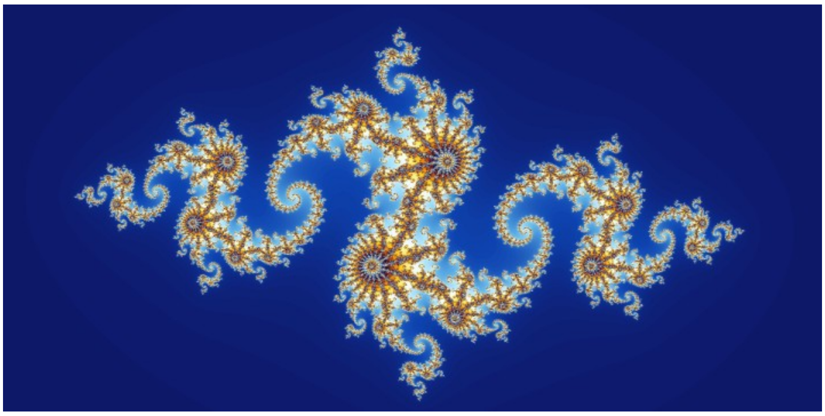
Sin embargo, **para la semilla** *(0.1, 0.2)* **obtendríamos una serie que no diverge**. Representamos las primeras iteraciones con una aproximación hasta la cuarta cifra decimal:

(0.1, 0.2), (−1.03, 0.04), (0.0593, 0.0824), (−1.3273, -0.0098), (0.7617, 0.0259), …

Entonces el punto *(0.1, 0.2)* lo pintaríamos en negro, pues **pertenece al conjunto de Julia**.

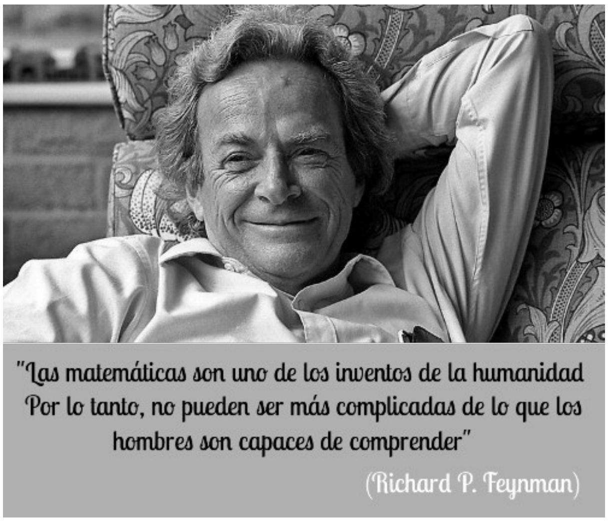
Este mismo procedimiento que hemos hecho con dos puntos (semillas) podríamos repetirlo con cientos o miles de puntos del plano con la ayuda de un ordenador, que realice los cálculos y decida si hay que pintarlos blancos (diverge) o negros (no diverge).

Para otras funciones distintas también podemos estudiar los conjuntos de Julia y obtener gráficos tan llamativos como el siguiente para la función $f(z)=z^2-c$, donde $c=(-0.8, 0.156)$:



¿Los colores? Muy fácil: no todas las series divergen igual de rápido. Simplemente se ha establecido una gradación en el color según la rapidez con la que divergen.

3.16. Pi: ¿un número simplemente normal?



Richard P. Feynman recibió el premio Nobel de Física en 1965 por sus aportaciones a la electrodinámica cuántica, aunque este genial e imaginativo físico también era capaz de pasar una noche entera debatiendo **por qué un spaguetti se parte en tres trozos** –y no en dos– al doblarlo con los dedos por sus extremos... Fue además un excelente **divulgador**, un amante de la **samba** brasileña, un amateur de los **bongos** y una **personalidad única**.

Feynman bromeaba con que le gustaría aprender las cifras del número π=3,141592... hasta la posición 767, porque así los últimos dígitos que recitaría serían 999999, con lo que parecería que pi fuera un número periódico mixto. Pero sabemos que no lo es: π es irracional (infinitos decimales no periódicos), aunque a veces se dan casualidades y aparecen secuencias curiosas, como varios números iguales seguidos. Claro, como π tiene infinitos decimales, no nos sorprende que pasen estas rarezas. **¿Habrá, pues, un momento en que salgan, digamos, mil números 9 seguidos?**

Hoy en día se conocen billones y billones de cifras decimales del número π. En ellas probablemente no se dé la casualidad de que aparezcan mil números 9 seguidos como dijimos antes pero quizá mucho más adelante en la serie sí que ocurra. O no. La verdad es que no se ha conseguido demostrar. La clave es una propiedad llamada normalidad.

Los matemáticos dicen que **un número decimal irracional es "simplemente normal" si sus dígitos aparecen uniformemente distribuidos** en el sentido de que, en promedio, la frecuencia de encontrar cada dígito del 0 al 9 es de 1 sobre 10, la frecuencia con la que aparecerá cada pareja del 00 al 99 es de 1 sobre 100, etc.

Pues resulta que **a día de hoy no hay una demostración satisfactoria de que π sea normal** (ni de que no lo sea), aunque hay indicios que apuntan a que pi sería normal. Y es que demostrar cosas que tienen que ver con el infinito puede ser muy difícil (§3, §9, §29, §33), aunque a veces a algún genio se le ocurre la manera (§11).

Por otra parte es interesante escribir el número π en binario (base 2); empezaría así:

11, 00100 10000 11111 10110 10101 00010…

Igual que podemos pasar cualquier número decimal a lenguaje binario, podemos también pasar cualquier palabra o frase a ceros y unos, y viceversa. Es lo que hacen los ordenadores con el **código ASCII** (de esto volveremos a hablar en §28). Por ejemplo, la palabra HOLA se escribe en binario como 01101000011011110110110001100001.

Si Feynman se preguntaba por la secuencia formada por un mismo número repetido varias veces, nosotros podríamos preguntarnos por otra secuencia que nos llame la atención, como, por ejemplo, por la anterior correspondiente a la **palabra HOLA. ¿Aparecerá en el número π?**... ¿Y el *Quijote* entero, se dará la casualidad de que esté escrito en el número π, palabra a palabra sin perder ni una coma?

Aquí va una tanda de preguntas y respuestas por si todavía os quedan dudas:

• ¿Aparecen en algún momento una secuencia de seis números 9 seguidos en la expresión decimal de pi? Sí, la primera vez entre los decimales en las posiciones de la 762 a la 767. A ese lugar de π se le llama "punto de Feynman".

• ¿Es π "normal"? No lo sabemos. Todo apunta a que sí, porque sus primeros millones de decimales están distribuidos muy uniformemente (o sea, muy al azar), pero no hay una demostración válida todavía. Hace falta un enfoque más ingenioso que comprobar millones de decimales (porque millones comparado con los infinitos decimales de pi no es nada) y de momento a nadie se le ha ocurrido ese enfoque ingenioso.

• ¿Era Feynman "normal"? No, era un genio irrepetible.

• ¿Tiene el número π infinitos decimales? Sí.

• ¿Aparece cada uno de los dígitos del 0 al 9 infinitas veces en la expresión del número π? No lo sabemos, aunque todo apunta a que sí.

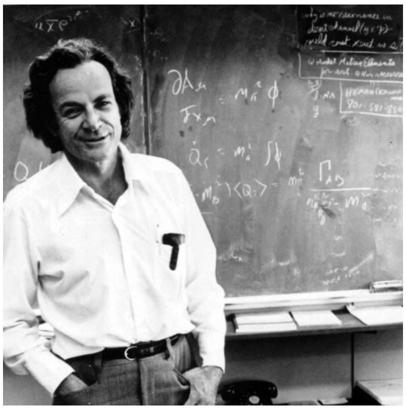
• ¿Hay algún momento en que aparezcan mil números 9 seguidos en la expresión de π? No se sabe, aunque, si π fuera normal, seguro que ocurriría y, de hecho, nos encontraríamos con infinitas secuencias de mil números 9. A la pregunta de si un dígito aparecerá mil veces en posiciones consecutivas se le conoce como "cuestión de Brouwer".

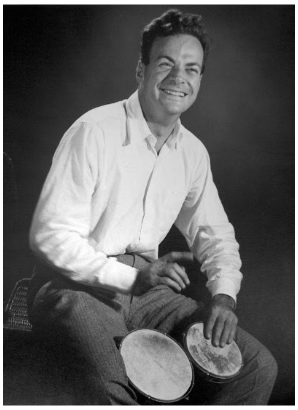
• ¿Un número irracional es necesariamente normal? No; por ejemplo, el número 1,01001000100001000001…

es irracional, pero no normal (basta ver que la secuencia 11 no aparece ni siquiera una vez).

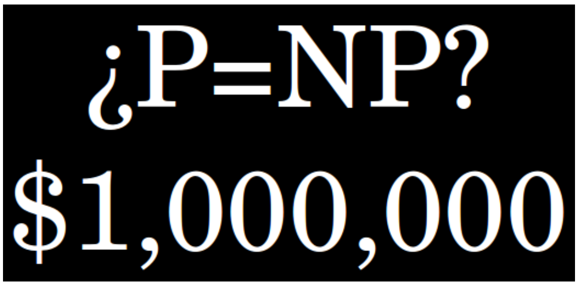
• ¿Contiene el número π la palabra HOLA expresada en código ASCII binario? Sí, eso ocurre por primera vez en la posición 341373.

• **¿Contiene el número π todos los textos escritos en la historia de la literatura, carácter a carácter, perfectamente ordenados en algún lejano lugar de su infinita expresión decimal? Si π es un número normal (y estamos diciendo que eso es lo más plausible), entonce sí.** Una idea similar aparece en los relatos de *La biblioteca universal* de Lasswitz (1901) y en *La biblioteca de Babel* de Borges, §32, (1941).





3.17. P versus NP



P versus NP **es uno de los siete "problemas del milenio", §26, y la recompensa por resolverlo es de 1 millón de dólares.** Es, posiblemente, el más fácil de entender de los siete... así que merece la pena intentarlo. Tiene que ver con la complejidad para resolver distintos tipos de problemas. Hay problemas que con unas **pocas cuentas** salen rápido (los llamados **problemas tipo P**), mientras que hay otros que parece que requieren **muchas más cuentas** (los llamados **problemas tipo NP**). Pero, claro, todo esto habrá que explicarlo un poco mejor...

Empecemos con un ejemplo sencillo. Imaginad que tenemos 5 **cartas numeradas** del 1 al 5. En principio están barajadas y **lo que queremos es ordenarlas** en sentido ascendente, es decir: 1, 2, 3, 4 y 5. Hay **dos algoritmos o métodos** que a uno se le ocurren, así, a primera vista para conseguirlo:

<u>Método 1</u>: Vamos pasando las cartas del mazo hasta que aparece el número 1. Entonces la sacamos del montón y la ponemos boca abajo aparte. Ahora buscamos la carta número 2 en el montón de cuatro cartas que queda: la sacamos y la ponemos aparte detrás de la 1. Nos quedan ya tres cartas solo. Buscamos la número 3 y la sacamos del montón. Y luego lo mismo para la 4 y la 5.

¿Cúanto tiempo nos llevaría esto? No mucho, ¿verdad? Por hacer un poco de cuentas, vamos a suponer que cada vez que miremos una carta del montón eso nos lleve un segundo. Cuando buscamos la carta número 1 en el mazo, nos puede aparecer justo la primera (1 segundo de tiempo), pero también podemos tener mala suerte y que se encuentre la última, o sea, que tendríamos que descubrir y mirar las 5 cartas: 5 segundos. Pues vamos a ser pesimistas y ponernos siempre en el peor de los casos, y que la carta que buscamos aparezca la última. Ya tenemos la carta número 1 fuera. Nos quedan 4 cartas, así que para encontrar la siguiente, la carta número 2, vamos a necesitar 4 segundos. Cuando la quitemos, nos quedarán 3 cartas (3 segundos), luego 2 cartas (2 segundos) y vamos a poner 1 segundo más para la última, la número 5. En este escenario pesimista habremos necesitado en total:

5 + 4 + 3 + 2 + 1 = **15 segundos**.

Es poco, pero ¿y si tuviéramos más cartas que ordenar? Por ejemplo, **para 20 cartas necesitaríamos más tiempo**. En concreto:

20 + 19 + 18 + 17 + ... + 1 = 210 segundos.

Eso ya son **3 minutos y medio**. Lógico: cuanto más cartas, más tiempo. En general **para un número N de cartas** tendríamos que calcular la suma:

N + (N-1) + (N-2) + (N-3) + (N-4) + ... + 1.

Con letras también se pueden hacer cuentas (es eso del álgebra y los **polinomios** y esas cosas del instituto). De hecho, la expresión anterior se puede simplificar, porque corresponde a una **progresión aritmética** y da al final

$$(N^2+N)/2.$$

Ahora no vamos a ponernos aquí a repasar cómo se hacía esto de las progresiones. Para el caso, lo que nos interesa es que se trata de un polinomio en N (en el instituto casi siempre se usaba la letra x para los polinomios, pero vamos, que es lo mismo). Si cambiamos la N por 5 cartas, nos sale $(N^2+N)/2 = (5^2+5)/2 = 30/2 = 15$ segundos y, si cambiamos la N por 20, nos da $(20^2+20)/2 = 420/2 = 210$ segundos. ¡Bien, todo cuadra con lo de antes!

Como la expresión $(N^2+N)/2$ que nos da el tiempo de este *método 1* **es un polinomio, se dice que es un algoritmo de tiempo polinomial.**

Método 2: Otra forma de ordenar las cartas (supongamos, como antes, que tenemos 5 para empezar) es **simplemente barajarlas y probar si tenemos suerte**, y que justo se nos hayan quedado ordenadas del 1 al 5. La verdad es que eso sería mucha casualidad. Si no salen en orden a la primera (como es de esperar), podemos volver a barajar y probar suerte otra vez. Y así hasta que suene la flauta. Para hacer las cuentas del tiempo que tardaríamos, **vamos a suponer que nos lleva 1 segundo barajar** y que además cada vez que barajamos sale una ordenación distinta. Por ejemplo, una vez puede salir el orden 2-3-5-1-4, a la siguiente el orden 4-5-2-1-3, luego 1-2-3-5-4 (uy, casi), etc... Y, como somos muy pesimistas, vamos a ponernos otra vez en el peor de los escenarios. Supongamos que nos salga la configuración 1-2-3-4-5 al final, tras haber probado todas las demás opciones. Uf, **¿y cuántas ordenaciones de la forma ×-×-×-×-× hay?** Pues en el primer hueco × podemos poner 5 posibilidades (cualquiera de los 5 números posibles); en el segundo, 4 (si hemos puesto, por ejemplo, el 2 en el primer hueco ya solo nos quedan 4 opciones: 1, 3, 4 o 5); en el tercero, 3; en el cuarto, 2 y en el quinto, 1 (el número que nos quede). En total hay que multiplicar las posibilidades para obtener todas las combinaciones posibles:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Esto se puede escribir como 5!, donde el signo ! se lee **factorial** (y sí, son las famosas **permutaciones** de 5 elementos del instituto). En fin, que, si hacéis las multiplicaciones de arriba, os van a dar 120 segundos **(2 minutos)**. Este *método 2* es peor que el *método 1* (2 minutos frente a 15 segundos para 5 cartas), pero bueno, dos minutos tampoco es tanto, ¿no? Pero **si en vez de 5 cartas tenemos N cartas, tardaremos N! segundos**. Por ejemplo, para el mazo de 20 cartas de antes (3 minutos y medio en el *método 1*) tardaremos ahora

$$20! = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot \ldots \cdot 1$$

¿Cuánto es eso? Pues, en **notación científica** (uf, otra vez a hacer memoria de las clases del instituto), eso es, más o menos,

$2{,}4 \cdot 10^{18}$ segundos

¿Y para los que no son fans de la notación científica? **¿Eso es mucho? Pues un poquito: unas 5 veces la edad del universo, o sea, miles de millones de años.** ¡Ni aunque hubiéramos empezado a barajar justo con el Big Bang, habríamos conseguido ordenar las 20 cartas! Es verdad que nos hemos puesto en el caso más desfavorable y que a lo mejor resulta que a la mitad nos aparece ya la ordenación buena. En cualquier caso siguen siendo miles de millones de años... Aunque siempre **puede ocurrir que baraje la persona con más suerte del mundo y que justo a la primera... ¡bingo!, del 1 al 20 en un segundo. A ese ser con suerte sobrenatural los matemáticos le llaman** *máquina de Turing no determinista* **y, como os podéis imaginar, en realidad no existe, es solo una entelequia.** Lo que está claro es que para el común de los mortales N! es un tiempo que nada tiene que ver con la expresión polinomial del rápido *método 1*. Por el contrario, este nuevo *método 2* requiere un tiempo no polinomial (salvo para la envidiable *máquina de Turing no determinista* que podría resolverlo en tiempo polinomial). Se dice que este algoritmo es del tipo NP (del inglés: **N**on-deterministic **P**olynomial time). Los algoritmos NP son lentísimos –en seguida sobrepasamos la edad del universo–, pero, una vez que tenemos la solución, son fáciles de comprobar: en un abrir y cerrar de ojos cualquiera podría comprobar que la ordenación encontrada por la perfecta máquina de Turing no determinista es la correcta: 1, 2, 3, ..., 20.

En fin, que podemos olvidar del lentísmo *método 2* y quedarnos con el *método 1*, mucho más eficiente. Podemos decir entonces que **el problema de ordenar una baraja de cartas puede resolverse en tiempo polinomial (gracias al** *método 1***) y referirnos a él como a un problema del tipo P**.

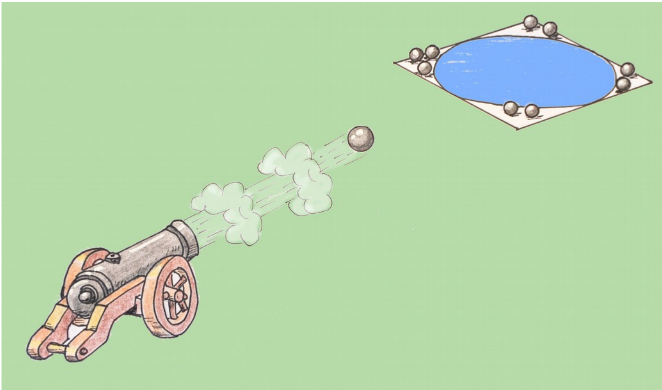
Suerte que se nos ocurrió el *método 1* ¿no? Pero eso no siempre sucede. **Hay otros problemas para los que nadie ha dado con un algoritmo de resolución en tiempo polinomial**; solo sabemos de ellos que pueden ser virtualmente resueltos en tiempo polinomial por máquinas de Turing no deterministas, pero eso en la práctica no se puede hacer, porque las máquinas de Turing no deterministas ya dijimos que son entelequias. Estos problemas se dice que están en la **clase de complejidad NP**. Y, aunque pueda parecer un lío, si lo pensáis bien, veréis que **todos los problemas del tipo P son también NP,** puesto que, si un simple mortal (o un ordenador real, que los matemáticos llaman *máquina de Turing determinista*) puede resolverlos en tiempo polinomial, no digamos ya la todopoderosa máquina de Turing NO determinista. Así que los problemas NP incluyen a los problemas P. La cuestión del millón de dolares es si el recíproco es cierto: **¿puede encontrarse un algoritmo rápido como el** *método 1* **para cualquier problema NP y decir, por tanto, que todos los NP son también del tipo P?**

Quizá el más famoso de los problemas NP es el del viajante de comercio. Se trata de una persona que tiene que **pasar por una serie de ciudades de manera que tarde lo menos posible.** Tiene el mapa con la posición de las ciudades y la distancia entre ellas. Así que una forma de resolver el problema es **calcular todas las rutas posibles, ver cuántos kilómetros supone en total cada ruta y elegir finalmente la más corta**. Pero, claro, ya sabemos que, si tenemos N ciudades, eso va a suponer que hay N! rutas y que eso da un tiempo no polinomial. Es el *método 2* de antes. El asunto es que **a día de hoy nadie ha encontrado un** *método 1* **rápido**. Ni siquiera se sabe si verdaderamente hay un método polinomial para resolverlo.

El problema del viajante de comercio tiene el interés de que es de los que se llaman **NP-completo**... ah...¿y eso qué quiere decir? Pues eso significa que **todos los problemas NP que podamos imaginar pueden, en el fondo, transformarse en el problema del viajante**. Así que, si a alguien se le ocurre un algoritmo de tipo polinomial para el problema del viajante, habrá demostrado que todos los problemas NP son en realidad problemas P, es decir, habrá demostrado que P=NP, y lo recompensarán por ello con un millón de dólares (y tal vez con la medalla Fields). O puede que no, que sea imposible encontrar un algoritmo polinomial. Si alguien demuestra que realmente es imposible, entonces habrá demostrado que P≠NP y también le darán un millón de dólares (y tal vez la medalla Fields). En este último caso, podríamos olvidarnos de buscar una solución rápida al problema del viajante, porque no la habría.

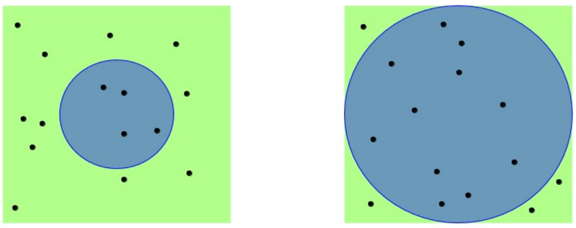
Por último, para terminar de enredarlo todo un poco más, hay que tener en cuenta que **hay problemas incluso más difíciles que los NP**. Son problemas que ni siquiera una máquina de Turing no determinista puede afrontarlos con éxito. En fin, que **no hay nada todopoderoso para las matemáticas.**

3.18. Calculando el número π a cañonazos



Todo el mundo sabe que el número π tiene infinitos decimales. Por eso escribimos **π = 3,141592...** con puntos suspensivos al final para indicar que siguen y siguen. Ahora bien, **¿habéis pensado alguna vez cómo podríamos calcular esos primeros decimales, o los siguientes?** Hay varias formas de hacerlo, pero quizá la más rara de todas es **lanzando cañonazos a un estanque**. No es broma, se puede calcular a cañonazo limpio.

Imaginemos dos estanques circulares, uno más pequeño y otro más grande, con agua (en azul) situados en sendos jardines (en verde), de manera que el cuadrado total sí que sea del mismo tamaño:



Hemos lanzado 15 cañonazos en cada uno de ellos **de forma** *aleatoria*, **es decir, sin ninguna puntería**. Así que los disparos (puntos negros) pueden caer al agua o no. Pero lo que está claro es que lo normal es que caigan menos al agua en el estanque de la izquierda (4 de 15) que en el de la derecha (11 de 15), pues por algo tiene más agua, ¿no? O cómo diría un matemático: **el número de bolas que caen en promedio al estanque es directamente proporcional a su área**. Vamos, que, cuanto más superficie tenga el círculo, más bolas caerán en él.

Pero queremos ser un poco más concretos. De todas las bolas de cañón que lanzamos, ¿qué proporción esperaríamos que cayeran al agua? Si, por ejemplo, la zona azul tiene la misma área que la zona verde, esperaríamos que la mitad cayeran al agua y la otra mitad al césped. Pero, si el agua ocupa el 20% y la zona verde el otro 80%, entonces, lo habitual es que acaben mojadas el 20%, o sea, 20 de cada 100 cañonazos que se disparen. Dicho de otra forma, **el cociente entre las bolas que caen al agua y las que se lanzan en total está en proporción con el cociente entre el área de la zona azul (círculo) y el área total (cuadrado)**. Con esto ya tenemos una fórmula:

$$\frac{n^o \text{ de bolas al agua}}{n^o \text{ de bolas totales}} = \frac{\text{área del círculo}}{\text{área del cuadrado}}$$

Y **aquí podemos introducir ahora el deseado número π**, porque el área de un círculo de radio r es... haced memoria... πr^2 y el área de un cuadrado de lado ℓ es... esta es más fácil... ℓ^2.

Por simplificar todo esto un poco: vamos a fijarnos solo en la figura de la derecha, la del círculo inscrito en el cuadrado. Si el círculo tiene radio r, entonces el lado del cuadrado mide el doble, o sea, $2r$, y su área será $\ell^2 = (2r)^2 = 4r^2$. Así la fórmula anterior se escribirá como

$$\frac{n^o \, de \, bolas \, al \, agua}{n^o \, de \, bolas \, totales} = \frac{\pi r^2}{4 r^2},$$

y las r se cancelan en la segunda fracción. En fin, que despejando el número π nos queda

$$\boldsymbol{\pi = 4f},$$

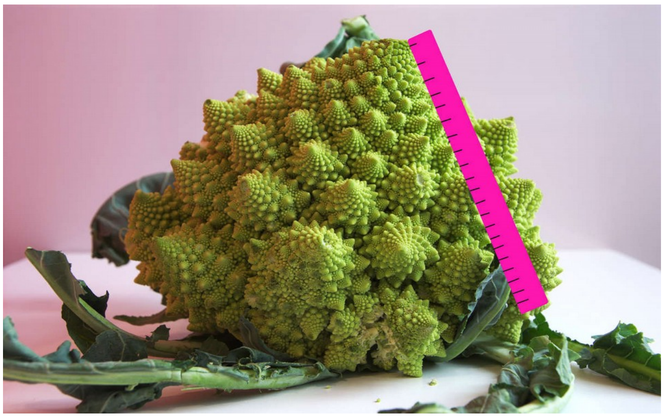
donde por abreviar hemos llamado f al cociente $^{\text{nº bolas al agua}}/_{\text{nº bolas totales}}$. Basta, pues, hacer esa división y multiplicar el resultado por 4.

A ver si sale de verdad el número π: en nuestro ejemplo de la figura de la derecha –la fórmula hemos dicho que es para ese estanque inscrito en el jardín– tenemos que hemos colado al agua 11 de los 15 cañonazos. O sea, que el número f sería $f = 11/15 = 0{,}73333...$ y al multiplicarlo por 4 nos da que π tiene que ser 2,9333... Mmmh, ¿no tendría que dar 3,14...? Bueno, es que los lanzamientos son aleatorios y con solo 15 puede pasar cualquier cosa. Conforme tiremos más y más bolas y calculemos f con números más grandes, nos iremos poco a poco acercando al valor de π. De hecho, **harían falta miles y miles de cañonazos para empezar a estar más o menos seguros de que los primeros decimales de π están bien calculados.**

¿Y si no tenemos tantas balas de cañón? Bueno, pues en vez de cañonazos se puede hacer algo mucho más rápido y barato: **simular todo esto con un ordenador**. Los ordenadores son capaces de generar **números (pseudo)aleatorios**. También lo podéis hacer con una calculadora científica con la tecla que pone RAN#. Cada vez se genera un número decimal al azar entre 0 y 1 distinto del anterior. Si cogéis dos de ellos seguidos, podéis pensar que se trata de las coordenadas cartesianas (x,y) donde ha caído la bala de cañón. Y se pueden tirar así millones de "balas de cañón". A este tipo de simulaciones basadas en los números (pseudo)aleatorios se les llama *simulaciones de Monte Carlo*, **y son una herramienta importantísima que se utiliza hoy en día para un montón de cosas, desde meteorología a radioterapia**. Aunque, ojo, que los números esos no son aleatorios del todo y, de hecho, empieza a repetirse la serie después de unos cuantos millones de números distintos, por eso son PSEUDOaleatorios y por eso tampoco valdrían para encontrar decimales de π indefinidamente.

De todas formas, nadie utiliza en la práctica un método de Monte Carlo para calcular decimales de π, porque es **muy lento**. Incluso el antiquísimo *método exhaustivo* **de Arquímedes, §34,** tiene una convergencia más rápida. Y no digamos ya los modernos **cálculos de π basados en series** como las que tan bien estudiaron Euler, **§**36, o Ramanujan, **§**7. Pero, sea como fuere, siempre es más impresionante calcular π a cañonazo limpio, ¿verdad? Este método de los cañonazos apareció por primera vez en 1985 en la célebre revista de divulgación *Scientific American*, en un artículo de la sección *Computer Recreations* de A. K. Dewdney... aunque la idea de calcular π lanzando cosas es mucho anterior. **Ya en 1733 al conde de Buffon se le ocurrió tirar agujas** sobre un suelo a rayas y preguntarse por cuántas agujas caerían justo entre dos rayas. Y sí, salía el número π por ahí también.

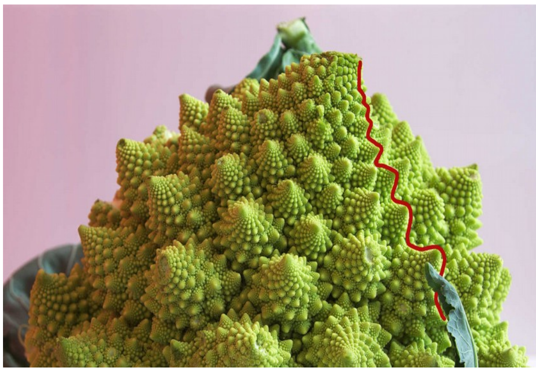
3.19. ¿Cuánto mide un romanescu?



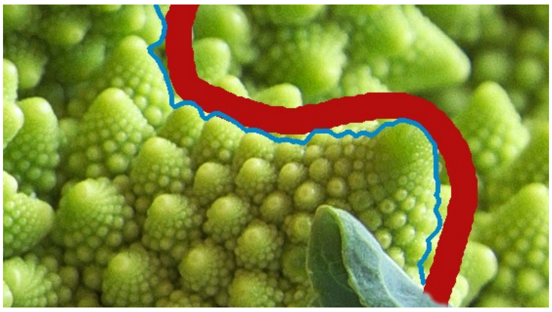
El **romanescu** es ese híbrido entre la coliflor y el brócoli de un color verde vivo, y que parece una granada extraterrestre a punto de explotar. Bien, pues la pregunta es: **¿cuánto mide?** Pongamos que queremos encontrar la longitud exacta desde la parte más alta hasta su base...

Si cogemos una regla cualquiera (no hace falta que sea tan hortera como la regla rosa de la imagen), podremos tener una primera aproximación, pero **seguro que mediremos de menos,** porque se nos escapan las subidas y bajadas de los capullos del romanescu.

Necesitaríamos un instrumento de medida más flexible. Pues fácil: **un metro de hule de esos de costura**. Ahora lo vamos colocando más o menos como en la siguiente imagen (que nadie piense que la línea roja que se ve está hecha por ordenador porque es un metro de hule de verdad que tenía en el cajón junto a la regla rosa, eh)



Mucho mejor. **Una medida sin duda más precisa..., pero no exacta, porque los capullos grandes del romanescu están formados a su vez por capullos más pequeños**. Otra vez nos estamos quedando cortos en nuestra estimación de la longitud. Con un hilito más fino (en color azul en la siguiente ampliación) **podríamos afinar otro poco**, pero, si nos fijamos bien, vemos que también los capullos pequeños están formados por otros aún más diminutos, así que **seguimos midiendo de menos al no tener en cuenta las mini bajadas y mini subidas. Cuanto más preciso es nuestro instrumento de medida, mayor es la longitud.**



Esto de que al hacer zoom vuelva a salir la misma estructura una y otra vez es a lo que los matemáticos le dan el nombre de fractal. Estos objetos tan cansinos ya nos han salido antes al hablar del triángulo de Sierpinski, §14, o de los conjuntos de Julia, §15. Incluso definiremos en §22 una dimensión fractal que será la clave de todo.

No solo aparece esta paradoja en los romanescus (lo que podría justificarse por ser granadas de mano de origen extraterrestre, pues ya sabemos que los marcianos son muy raros), sino que incluso aquí, en la Tierra, pasan cosas así. Nuestras costas, con sus entrantes y salientes a diferentes escalas tienen algo de fractal, lo que hace que medir su longitud no sea tan fácil como podría pensarse. Ni más ni menos que Benoît Mandelbrot, el padre de los fractales, se hizo la pregunta en 1967 de cuánto mediría la costa de Gran Bretaña, una excelente excusa para hablar de la dimensión fractal. La idea venía de antes, como apunta el propio Mandelbrot, que acabó bautizando esto como el **efecto Richardson** en honor a Lewis F. Richardson, que ya se calentó la cabeza en los años 20 del siglo pasado con todo esto.

3.20. El cifrado de Vernam y el cuaderno de un solo uso del Che Guevara

Cuando en 1967 Ernesto "**Che" Guevara** fue capturado y ejecutado en Bolivia, llevaba –según la biografía de Daniel James– lo que se conoce como un "cuaderno de un solo uso" o "libreta de uso único" (en inglés ***One-Time Pad***, OTP). Se trata de una **libreta de claves que servía para cifrar y descifrar mensajes secretos** que intercambiaba con otras personas, que debían poseer, a su vez, una copia del OTP. Precisamente, **este cuaderno sirvió para descifrar una comunicación que Guevara mandó a Fidel Castro** pocos meses antes de morir. La imagen siguiente muestra el proceso de codificación del mensaje del Che.

El **cifrado de Vernam** (1918) se basa en una clave numérica común que conocen solo el emisor y el receptor. Dicha clave permite al emisor cifrar un mensaje y al receptor descifrarlo aplicando el proceso inverso. **Si la clave solo se utiliza una vez y es completamente aleatoria,** se puede demostrar matemáticamente que **el mensaje no puede ser descifrado** por una tercera persona y entonces al cifrado de Vernam se le llama *one-time pad*. Ni las técnicas de criptoanálisis más modernas ni los ordenadores más potentes que podamos imaginar podrían descifrarlo. Por eso **Claude Shannon, el padre de la Teoría de la Información (1948), lo definió como el "secreto perfecto"**. El tamaño de la clave ha de ser de al menos el tamaño del mensaje que se quiere transmitir y, como para cada mensaje nuevo hay que usar una clave distinta, lo más cómodo es tener una libreta o cuaderno de claves de donde sacar una nueva cada vez. **El emisor y el receptor tienen sendos cuadernos idénticos** y basta indicar al principio del mensaje, antes de cifrarlo, la página del cuaderno donde hay que mirar la clave. Los OTP fueron usados desde los años 20 del siglo pasado por los servicios de inteligencia de diversos países, especialmente por los aliados durante la II Guerra Mundial y más tarde durante la Guerra Fría por la Unión Soviética.

En la imagen de arriba de la codificación del mensaje del Che, las líneas verticales solo sirven para dividir el mensaje en columnas de cinco números en aras de la claridad. El mensaje debe leerse de izquierda a derecha teniendo en cuenta que los números están agrupados en **grupos de 3 filas,** como se aprecia claramente en la imagen. **La primera de ellas es el mensaje sin cifrar** ya convertido a números (que en principio solo conocía Guevara), **la segunda es la clave** (conocida por Guevara y Castro, poseedores de sendas copias del OTP) y **la tercera es el mensaje cifrado** que se envió (conocido por cualquiera que interceptara el mensaje, fuera amigo o enemigo).

Esta tercera fila, o sea el mensaje cifrado, se obtiene de una manera muy sencilla en el método de Vernam. Si os fijáis bien en la imagen, veréis que es simplemente **la suma, dígito a dígito, de las dos filas anteriores**. Así, los cinco primeros números de la imagen (mensaje sin cifrar, 06386) se transforman en 69140 porque:

$$0 + 6 = 6$$

$$6 + 3 = 9$$

$$3 + 8 = 11 \rightarrow 1$$

$$8 + 6 = 14 \rightarrow 4$$

$$6 + 4 = 10 \rightarrow 0$$

Ya veis que solo se pone la cifra de las unidades. Es lo que se llama una **suma módulo 10**. Cuando Castro recibía el mensaje cifrado (69140), lo único que tenía que hacer era restarle la segunda fila –que tenía en su réplica del OTP– para recuperar el mensaje original (06386). Así:

$$6 - 6 = 0$$

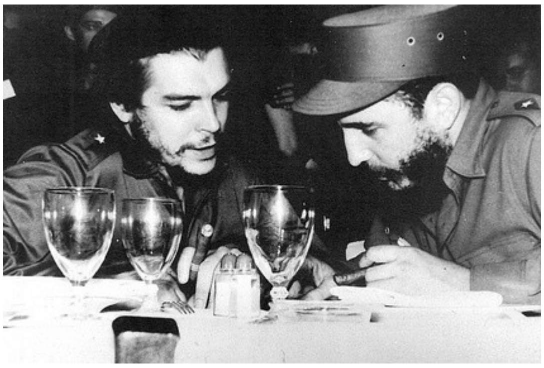
$$9 - 3 = 6$$

$$1 - 8 \rightarrow 11 - 8 = 3$$

$$4 - 6 \rightarrow 14 - 6 = 8$$

$$0 - 4 \rightarrow 10 - 4 = 6$$

Cuando la resta no se puede calcular con números positivos, eso quiere decir que hay que añadir una decena al minuendo, tal y como hacemos cuando restamos “con llevadas”. Estamos trabajando en módulo 10.



Pero antes de eso ya hemos indicado que **hay que asignar primero un código numérico a cada letra del alfabeto**. Podríamos hacer A=1, B=2, C=3, D=4, E=5, F=6, G=7... hasta Z=27. Sin embargo, esta conversión plantaría un problema grave ya que, por ejemplo, el código 271 podría interpretarse como 27-1 (o sea, ZA) o bien como 2-7-1 (o sea, BGA). Para evitar eso se puede asignar a cada letra siempre dos dígitos, por ejemplo: A=11, B=12, C=13... hasta Z=37. Así ya sabemos que las cadenas de números hay que separarlas de dos en dos dígitos para pasarlas a letras. Pero **la conversión a números del Che y Fidel era otra:**

	8	2	0	6	4	9	1	3	7	5
	E	S	T	A	D	O	Y			
3	B	C	F	G	H	I	J	.	;	,
7	K	L	M	N	Ñ	P	Q	/	/	
5	R	U	V	W	X	Z				

Leyendo la fila y la columna se saca la codificación de cada letra: A=6, B=38, C=32... Z=59. ¡Pero entonces mezclamos letras de uno y de dos dígitos de nuevo! Sí, aunque esta vez no pasa nada, porque las letras de dos dígitos empiezan siempre por 3, 5 o 7, mientras que las de 1 dígito corresponden a los número 0, 2, 4, 8, 1. **No hay confusión posible**. Si el mensaje con números dice 676906323997682, entonces la única separación posible es 6 76 9 0 6 32 39 9 76 8 2, es decir, la palabra ANOTACIONES, de acuerdo a la tabla de arriba. En la conversión de esa tabla se han codificado además algunos signos de puntuación y se ha reservado las codificaciones 73 y 77 para indicar el cambio de letras a números. En los mensajes de guerrilla era común que aparecieran números (heridos, municiones, dinero...). En vez de deletrearlos, era más fácil cambiar al "teclado numérico" con el código 73 y volver al "teclado alfabético" con el código 77 para seguir la frase.

¿Y por qué no es suficiente esta conversión numérica y enviar el mensaje así sin más, sin el cifrado de Vernam (lo de sumar la clave)? Pues porque, aunque *a priori* el enemigo no conozca la tabla de conversión entre letras y números, es relativamente sencillo sacarla mediante lo que se conoce en criptografía como un **análisis de frecuencias. Basta observar qué números se repiten más y asociarlos a las letras de mayor frecuencia** en el idioma del texto (en castellano las dos primeras letra son la E y la A, en ese orden). También sería fácil ir reconociendo sílabas comunes (por ejemplo EL, LA, CON, UN...). Con un ordenador moderno, en un abrir y cerrar de ojos podría romperse un mensaje de cierta extensión en el que a cada letra siempre se le asignaran los mismos números. Sin embargo, en el cifrado de Vernam una misma letra puede tomar distintos valores. Por ejemplo la palabra ANOTACIONES, que numéricamente hemos visto que es 676906323997682, se codificaría al sumarle la clave del cuaderno de uso único (en este caso es 234699362793411, como podéis encontrar en las segundas filas de la imagen de arriba si tenéis buena vista). Se obtiene así la encriptación 800595685680093, que es la serie de números que recibió Castro.

SUMA DÍGITO A DÍGITO MÓDULO 10

$$\begin{array}{rr} & 6\,7\,6\,9\,0\,6\,3\,2\,3\,9\,9\,7\,6\,8\,2 \\ + & 2\,3\,4|6\,9\,9\,3\,6\,2\,7\,9\,3\,4\,1\,1 \\ \hline & 8\,0\,0\,5\,9\,5\,6\,8\,5\,6\,8\,0\,0\,9\,3 \end{array}$$

Fijaos que el primer 6 (la primera A de ANOTACIONES) se ha codificado como un 8, mientras que el segundo 6 (la segunda A de ANOTACIONES) no se ha codificado como otro 8 sino como un 0. Por eso el cifrado de Vernam es tan bueno.

Pues igual que hemos visto para la palabra ANOTACIONES, se puede ir haciendo con el resto del mensaje. En la imagen solo hay un fragmento, pero ponemos aquí completa la versión que podéis consultar en el diario del Che de Bolivia, hecho público por el gobierno cubano. El principio del mensaje que allí aparece es:

> Leche: Danton llevaba un mensaje además de ANOTACIONES para memorizar el informe que le di, todo en clave. Este es el mensaje. 1°) Llegaron Danton y Francisco; este no sabía la cantidad y dejó dinero en La Paz; pienso darle 30 y reservarle el resto para cuando se alce; tiene pocas condiciones físicas y de carácter para dirigir la guerrilla, pero eso es cosa de él. Danton debe salir, pero no sé si podrá dadas las circunstancias. 2°) Se descubrió la finca y el ejército nos persiguió; le dimos la primera paliza, pero estamos aislados. 3°) Iván está listo para viajar, pero Tania está aislada aquí, pues vino violando instrucciones y fue sorprendida por los acontecimientos. 4°) Ya tenemos suficiente Glucontime, no manden más. 5°) No hay noticias del trío, tampoco confío en ellos y han expulsado a la gente de la juventud que está con nosotros. 6°) Yo recibo todo por radio, pero es inútil si no lo comunican simultáneamente a La Paz, estamos aislados por ahora. 7°) Todavía no hemos recibido mensaje a través de Lasarre. 8°) Habría que parar la carta de despedida Danton hasta nuevo aviso trataremos viaje a Francia objeto formar red de apoyo. 9°) Hice contacto Pelado objeto organizar bases al sur y colectar argentinos, también está embotellado aquí. 10°) Supriman los envíos de embutidos, pues nos tomarán maletines preparados...

Por cierto, que sigue sin ser muy comprensible, ¿verdad? Eso es porque el lenguaje contiene expresiones acordadas previamente. Por ejemplo, **LECHE se refiere a Fidel Castro y DANTON a Jules Régis Debray**.

Como todo lo que rodea a la muerte de Ernesto "Che" Guevara, el documento aquí transcrito no puede asegurarse veraz, y hemos de conformarnos con las referencias bibliográficas que lo citan y la aparente verosimilitud del mensaje cifrado en el contexto histórico.

3.21. Sándwich para dos

Imaginad un sencillo **sándwich de jamón york** como el de la imagen: rebanada de pan, loncha de jamón y otra rebanada de pan encima. La verdad es que, aunque pongamos una buena ración de companaje, no parece gran cosa para cenar..., pero todavía podría ser peor si además **tenemos que compartirlo con alguien**. O sea, que tocaríamos solo a medio sándwich (grrrr). Y claro, ante una cena tan frugal, nadie va a querer quedarse con la parte pequeña, así que **habrá que coger un cuchillo y dar un corte preciso para partirlo justo justo por la mitad.** Pero, **¿es eso posible?**

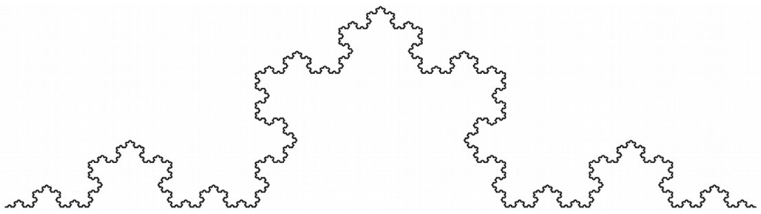
Si el pan y el jamón estuvieran perfectamente alineados, sería muy sencillo, pues bastaría hacer el corte justo por una diagonal, o por cualquier otro plano que pasara por el centro del sándwich. Pero la realidad es que **una rebanada de pan no queda exactamente sobre la otra** y además **el jamón suele sobresalir más por un lado** que por otro. Así que ese método no nos vale, porque con tanta hambre nadie está dispuesto a conformarse con menos de la mitad, ni siquiera por unos milímetros. Y tampoco es cuestión de ponerse a separar el jamón, repartirlo a medias, luego hacer lo mismo con el pan y entonces hacer dos sándwiches. No, **lo que queremos es, sin desmontar nada y con un solo corte, dividir el sándwich original en dos partes iguales**. ¿Sí? Pues bien, hay una buena noticia y una mala.

Empecemos por la buena. La buena es que... **¡sí que se puede! Hay un teorema matemático, §3, que viene a decir que para tres objetos tridimensionales existe un plano que simultáneamente divide en dos partes iguales a cada uno de esos objetos**. Nuestros tres objetos serían la rebanada de pan de abajo, el jamón y la rebanada de pan de arriba. De hecho, mediante ese plano —que el teorema asegura que existe—, no solo vamos a dividir en partes iguales el jamón y el pan, sino que encima las dos medias rebanadas de arriba que resulten tras el corte van a ser iguales entre sí (y lo mismo para las de abajo).

A propósito, ¿os imagináis como se llama este teorema? Exacto, el **"Teorema del Sándwich de Jamón."** Aunque lo cierto, es que también se podría aplicar a un bocata de lomo con queso, que es más irregular, pero que también tiene tres "objetos": pan, queso y lomo.

¿Y la mala noticia? Pues resulta que **el teorema dice que existe ese plano, pero no nos dice dónde está ni tampoco nos da ninguna indicación de cómo calcularlo**. Y hay que tener en cuenta que el corte (o sea, el plano) no tiene por qué ser perpendicular a las rebanadas ni siquiera pasar por el centro de cada ingrediente. Vamos, que en la práctica tendremos que conformarnos con hacer el corte a ojo y esperar que el otro comensal sea comprensivo.

3.22. Los fractales: otra dimensión

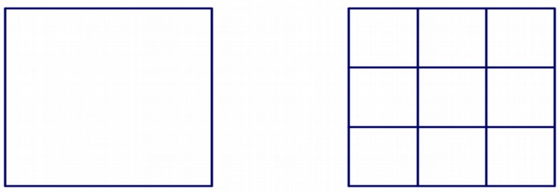


Un **segmento tiene dimensión 1** (largo), un **cuadrado tiene dimensión 2** (largo y ancho) y un **cubo tiene dimensión 3** (largo, ancho y alto). Esta noción de dimensión es la que aprendimos en el colegio y que los matemáticos llaman **dimensión topológica**. Pero hay **otras formas de entender la dimensión** que, en cierta manera, generalizan el concepto anterior, permitiendo estudiar **objetos más complicados como los fractales** (ya sabéis, esas figuras que exhiben un patrón repetido a diferentes escalas y que ya vimos en §14, §15 y §19). Y el resultado, como casi todo lo que tiene que ver con los fractales, es sorprendente: **¡dimensiones con decimales!**

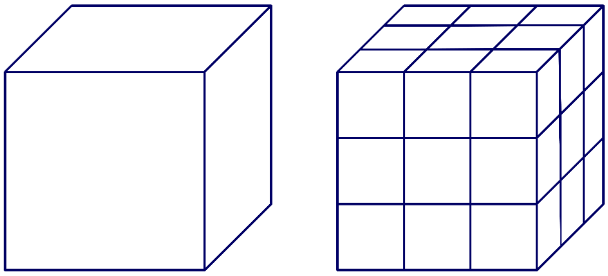
Siguiendo los pasos de **Benoît Mandelbrot –el matemático que acuño el término** *fractal***–** vamos a definir una nueva dimensión. La llamaremos **dimensión fractal.** En términos de proporcionalidad geométrica. Pues venga, a ver cómo queda ahora la dimensión para el segmento, el cuadrado y el cubo.

Empecemos con el segmento. Imaginemos que el segmento mide 1 metro y que lo dividimos en tres partes iguales. Cuando hacemos esto, resulta que el segmento original de 1 m contiene entonces 3 segmentos pequeños, cada uno de ellos de tamaño 1/3 de metro. **Decimos que tenemos** ***N*** **= 3 segmentos autosemejantes (o autosimilares) tras haber aplicado un factor de escala de ε = 1/3.**

Veamos ahora qué pasa con un **cuadrado** de lado 1 m. Como hemos hecho antes, vamos a **dividir cada dirección espacial entre 3 (o sea ε = 1/3 otra vez)**. Así, obtendremos un cuadrado que estará formado por ***N*** **= 9 cuadrados pequeños autosemejantes,** ya que al haber dos direcciones espaciales tenemos $3·3 = 3^2 = 9$ cuadraditos.



Y ahora a por el **cubo** de 1 m de arista. **Al partir en tres trozos tanto el ancho, como el largo y el alto (o sea ε = 1/3) habremos dividido el cubo en** ***N*** **= 27 cubos pequeños** ($3·3·3 = 3^3 = 27$).



La pregunta que nos interesa es **"¿qué relación hay entre *N* y ε para cada caso?"** Lo resumimos en la siguiente tabla (daos cuenta de que $\varepsilon = 1/3$ quiere decir que $1/\varepsilon = 3$: fracciones básicas):

	ε (factor de escala)	***N*** (número de copias autosemejantes)	**$N = (1/\varepsilon)^D$** (relación entre *N* y ε)	***D*** (exponente en la relación entre *N* y ε)
segmento	1/3	3	$3 = 3^1$	1
cuadrado	1/3	9	$9 = 3^2$	2
cubo	1/3	27	$27 = 3^3$	3

Vemos así en la última columna que **el exponente *D* de la relación**

$$N = (1/\varepsilon)^D$$

coincide con la dimensión topológica habitual. Por supuesto, podríamos haber utilizado otro factor de escala y obtendríamos el mismo exponente. Para el caso del cuadrado, por ejemplo, si el factor de escala es $\varepsilon = 1/4$, aparecerían $N = 16$ cuadrados como el original, es decir, que la relación $N = (1/\varepsilon)^D$ sería $16 = 4^2$ y de nuevo $D = 2$. Todo cuadra.

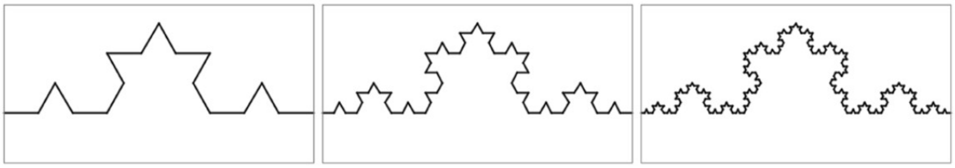
¿Y para qué tanta historia si ya habíamos aprendido en el colegio la dimensión de esos objetos de forma mucho más simple? Pues porque **esta dimensión *D* es la que vamos a generalizar para los fractales**. Lo mejor será verlo con un ejemplo concreto: la **curva de Koch**.

La curva de Koch se construye como sigue:

• Empezamos con un segmento de 1 metro.

• Lo dividimos mentalmente en 3 partes iguales (cada una medirá por lo tanto 1/3 de metro) y sustituimos el segmento del tercio central por dos segmentos (haciendo un pico como se ve en el dibujo) que midan también 1/3 de metro cada uno. Al final todos los segmentos que nos quedan miden 1/3 m, es decir, $\varepsilon = 1/3$.

• Vamos repitiendo el paso anterior indefinidamente.



Así, en cada iteración tenemos más y más segmentos (y más y más picos), pues cada vez estamos cambiando un segmento (que podemos imaginar que está formado por 3 tercios) por 4 segmentos (cada uno de ellos de la longitud de los tercios mencionados). Evidentemente, la longitud total irá aumentando en cada iteración y podemos, por ello, decir que la curva de Koch tiene longitud infinita. Es un infinito un poco raro, porque el espacio que ocupa la curva está acotado, pero no así su longitud. En fin, cosas de fractales.

Total, que **resulta que con un factor de escala ε = 1/3 obtenemos** N **= 4 segmentos autosemejantes cada vez**. Y si nos vamos a la fórmula para la dimensión fractal D, ya sabéis, la de $N = (1/\varepsilon)^D$, tenemos entonces al sustituir:

$$4 = 3^D$$

Solo queda despejar la dimensión D. Está claro que D tiene que ser un número mayor que 1 (porque $3^1 = 3$, que no llega a 4), pero menor que 2 (porque $3^2 = 9$, que se pasa de 4). Así que será 1 y pico, o sea, que D es un número con decimales. ¿Y cuál es el valor exacto? **Es fácil si os acordáis de los logaritmos**... y si no, pues tampoco hay que agobiarse... Se despeja así:

$$D = \log(4)/\log(3)$$

Como todas la calculadoras científicas tienen la tecla para calcular logaritmos, es sencillísimo hacer la cuenta, que da, aproximando a las centésimas,

$$D = 1.26$$

¡Una dimensión decimal! (Bueno, la verdad es que después de avisar tanto de que iba a salir con decimales casi que sobran los signos de exclamación, ¿no?). **Es como sí la curva de Koch, con sus infinitos picos, de alguna forma tuviera más dimensión que una curva unidimensional de toda la vida, y pretendiera acercarse a las dos dimensiones, pero sin llegar a conseguirlo.**

Cálculos análogos pueden hacerse para encontrar la dimensión fractal de otros objetos. En general, de nuestra fórmula $N = (1/\varepsilon)$D podemos despejar D aplicando logaritmos para obtener:

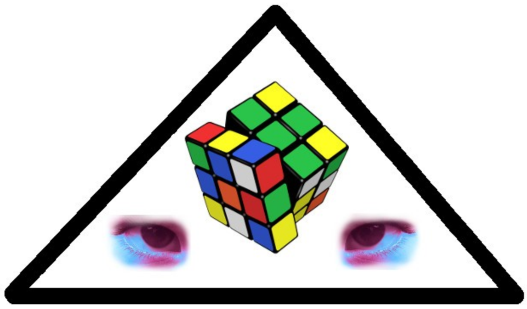
$$D = \log(N)/\log(1/\varepsilon)$$

Por ejemplo, **para el triángulo de Sierpinski que estudiamos en §14** sabemos que, cada vez que dividimos por 2 el lado del triángulo (esto es, $\varepsilon = 1/2$), obtenemos el triple de triángulos autosemejantes (esto es, $N = 3$). La fórmula anterior nos da entonces para la **dimensión fractal** D **= 1.58**. ¡Todavía más que la curva de Koch! E incluso, para **algunos**

conjuntos de Julia, §15, podemos tener una **dimensión fractal** D **= 2**, es decir, son curvas unidimensionales (topológicamente hablando) tan enrevesadas que acaban de alguna forma comportándose como objetos bidimensionales que rellenan el plano completamente.

Y para acabar haciendo honor a los fractales, volvamos al primer párrafo. Allí dijimos que "hay otras formas de entender la dimensión". Sí, dijimos eso, *formas*. En plural. O sea, que hay varias maneras de definir la dimensión fractal, aunque no creo que a estas alturas nadie quiera enredarse con los detalles de las dimensiones de Hausdorff-Besikovitch o de Minkowski-Bouligand...

3.23. El número de Dios del demoniaco cubo de Rubik



El cubo de Rubik es ese juguetito que triunfó en la década de los 80 del siglo pasado, y que consiste en romperse la cabeza hasta conseguir que cada una de las **6 caras** de un hexaedro (o sea, un cubo) esté **formada por 9 cuadraditos del mismo color**. Una cara puede girar independientemente de las otras gracias a un mecanismo de ejes. Cada movimiento de las caras del cubo de Rubik hace que se vayan cambiando las posiciones de los colores de los cuadrados. **Es un invento del maligno, nadie lo duda**. Pero aquí no vamos a hablar de demonios, sino de dioses, en concreto del **"número de Dios"** o, lo que es igual, **el número mínimo de movimientos que son suficientes para resolver un cubo de Rubik por muy desordenado que esté.**

Pero antes de deciros cuál es el *número de Dios* vamos a definir bien todo. En las clases del instituto de finales del siglo XX se explicaba en detalle el concepto matemático de "grupo". Sin embargo, ahora todo eso de los grupos ya no está tan de moda, así que mejor lo repasamos...

Un grupo es una estructura matemática muy general formada por dos ingredientes: un conjunto y una operación entre los elementos del conjunto. Esa operación coge dos elementos del conjunto y al operarlos saca otro elemento también del conjunto, de forma que se cumplen las siguientes condiciones:

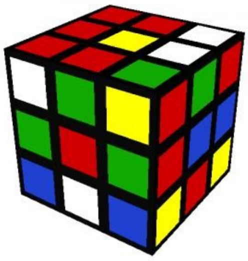
1. En el conjunto hay un elemento (llamado **elemento neutro**) con la propiedad de que, al operar un elemento cualquiera por el elemento neutro, se obtiene el mismo elemento. Es decir, que operar con el elemento neutro es como no hacer nada.
2. Para cada elemento del grupo existe otro elemento (llamado su **inverso**), de suerte que al operarlos juntos se obtiene el elemento neutro.
3. **La operación es asociativa**. Esto quiere decir que, si tenemos tres elementos del conjunto y operamos el primero con el segundo y luego lo que nos dé lo operamos con el tercero, vamos a obtener el mismo elemento que si operamos el primero con el resultado de la operación del segundo con el tercero.

Ya está, **esto es un grupo: una pareja de conjunto y operación con las propiedades anteriores**. Más claro se verá con un ejemplo. **El conjunto de los números enteros con la operación suma tiene estructura de grupo.** En efecto, se cumplen las tres condiciones:

1. El elemento neutro es el número 0. Para cada número a tenemos que $a+0=a$. También hay que comprobar que se cumple al revés: $0+a=a$, porque en la definición de grupo no se presupone la propiedad conmutativa (por cierto, que los grupos que son además conmutativos se llaman grupos abelianos en honor de Abel, del que hablamos al final de §13).

2. Si a cada número le sumamos su opuesto (el mismo número pero cambiado de signo), nos da 0, que era precisamente el elemento neutro. Por ejemplo, 7+(−7) = 0. Diríamos que −7 es el inverso de 7.

3. Se cumple la propiedad asociativa. Por ejemplo, (1+2)+3 = 1+(2+3). La cuenta da 6 la hagas con un orden o con otro.



Hasta aquí parece un poco aburrido; **lo verdaderamente interesante de los grupos es su generalidad**. Y es que los conjuntos no tienen por qué estar formados por números y la operación no tiene por qué ser una suma o una multiplicación, lo que nos va a permitir **definir una estructura de grupo en el cubo de Rubik. Ahora el conjunto va a tener como elementos los distintos movimientos que podemos hacer y la operación va a ser simplemente la concatenación de dos movimientos, uno tras otro.** Normalmente se utiliza la siguiente nomenclatura. U (up), F (front), D (down), B (back), R (right), y L (left) representan un giro de 90° en el sentido de las agujas del reloj de las caras superior, frontal, de abajo, de atrás, derecha e izquierda, respectivamente. Con un superíndice 2 se representan los giros de 180° en sentido horario (por ejemplo U2 es un giro de 180° en sentido horario de la cara superior) y con una prima se representan los giros de 90° en sentido antihorario (por ejemplo L' es un giro de −90° de la cara izquierda del cubo). Además, añadiremos el **"**movimiento**"** que consiste en no hacer nada. Con estos ingredientes puede comprobarse que tenemos una estructura de grupo.

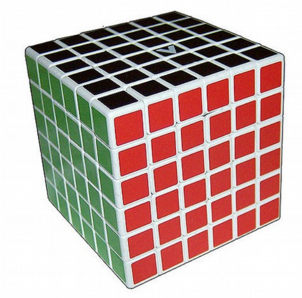
Varias letras seguidas indican el movimiento resultante de la concatenación de los movimientos elementales que acabamos de definir. Por ejemplo, U'R es el movimiento global que resulta de primero girar −90° la cara superior y luego girar 90° la cara de la derecha. Hemos operado (concatenado) dos movimientos para obtener un tercero. O por ejemplo, U2U equivale a U'. Incluso podemos considerar movimientos más largos como, por ejemplo, U'RU2LDL. Todos estos son ejemplos de elementos del grupo del cubo de Rubik. Puede verse que el número total de movimientos distintos que podemos hacer en el cubo (o sea, el número de elementos de nuestro conjunto) se corresponde con el número distinto de configuraciones de color del cubo de Rubik. Aunque el grupo no tiene infinitos elementos (como sí ocurría en el grupo de los números enteros con la suma), no cabe duda de que hay un montón de movimientos posibles. En concreto, **la cardinalidad (ese es el tecnicismo para hablar del número de elementos) del grupo del cubo de Rubik es 43 252 003 274 489 856 000.**

En teoría de grupos hay muchísimos teoremas que podemos aplicar al cubo de Rubik para entender mejor cómo resolverlo..., pero nosotros nos bajamos aquí. Por lo menos ya sabemos el abc de esta rama abstracta de las matemáticas. Que quede claro, además, que aunque no esté muy de moda, como decíamos antes, **la teoría de grupos es fundamental en distintos campos científicos como, por ejemplo, la mecánica cuántica o la física del estado sólido.**

Ah, espera, se me olvidaba lo del **número de Dios. Es 20. Las posiciones más difíciles del cubo de Rubik se pueden ordenar tras concatenar 20 movimientos elementales del tipo U, U2, U', F, F2...** No hacen falta más giros de caras si uno elige los movimientos precisos (en el orden también preciso porque el grupo no es abeliano), entendiendo que cada giro de una cara puede ser de 90° –sentido horario o antihorario– o de 180°. (Si, por contra, se considera el convenio de que los giros de 180° cuentan como dos movimientos, entonces el número de Dios es 26.)

En 1981 ya se demostró que el número de Dios debía estar entre 18 y 52. En 1995 se encontró que algunas posiciones necesitaban *al menos* 20 movimientos, por lo que el número de Dios debía ser mayor o igual a 20. **La demostración de que era exactamente 20 tuvo que esperar hasta el año 2010, tras tres décadas de sucesivas mejoras en las acotaciones del número de Dios**. Como con el famoso Teorema de los Cuatro Colores, §6, se han necesitado **potentes ordenadores para realizar cálculos**, una vez que los casos interesantes se han reducido a unos *pocos* mediante razonamientos matemáticos de teoría de grupos.

Aún quedan muchos interrogantes sobre el cubo de Rubik, como por ejemplo cuál es el algoritmo óptimo (el que usa menos pasos) para una cierta configuración de partida general. Porque ya tenemos clarísimo que el que el número de Dios sea 20 no quiere decir que haga falta gastar siempre los 20 movimientos. De hecho, **solo hay alrededor del 0.000001% de las posiciones del cubo de Rubik que requieren exactamente los 20 movimientos**. ¿Más cuestiones abiertas? Pues resulta que todo esto es para el cubo original de tamaño 3×3×3, pero también **hay cubos más grandes** (por ejemplo 4×4×4). Y para estos no se conoce todavía su número de Dios.

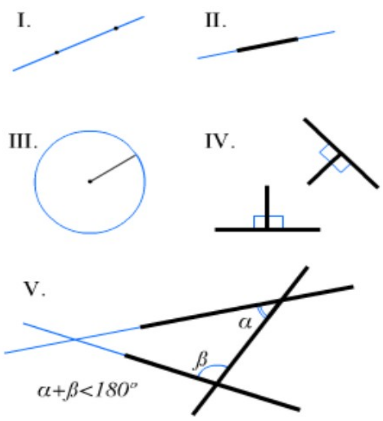


3.24. Una nueva geometría rara: de Euclides a Riemann

Los tres ángulos de un triángulo suman 180º. Dos rectas paralelas son siempre equidistantes. ¿Son estas archiconocidas afirmaciones geométricas realmente verdaderas? Bueno, pues la respuesta no es nada evidente. Hasta el punto de que hicieron falta más de dos mil años para que alguien consiguiera explicarlo bien. Y después de tanto tiempo dándole vueltas a la pregunta y de tantos esfuerzos vanos, resultó que de repente casi a la misma vez tres matemáticos (un ruso, un húngaro y un alemán) dieron con la clave de manera independiente.

Empecemos por el principio, o sea, por Euclides, §11. Su libro los *Elementos* parte de algunas definiciones básicas y de **cinco postulados**. Estos últimos son verdades evidentes que **hacen que toda la geometría propuesta por él sea consistente y permiten construir sobre ellos el resto de resultados**. No son proposiciones o teoremas que hayan de ser demostrados (como explicamos en §3), sino que son afirmaciones tan simples y lógicas que no pueden ser de otra forma. En un lenguaje moderno, los cinco postulados que escribió Euclides vienen a decir lo siguiente:

- *Postulado I*: Se puede trazar una línea recta de un punto cualquiera a otro punto cualquiera.
- *Postulado II*: Un segmento se puede extender indefinidamente en una línea recta.
- *Postulado III*: Se puede trazar una circunferencia con cualquier centro y radio.
- *Postulado IV*: Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
- *Postulado V*: Si una línea recta corta a otras dos, de tal manera que la suma de los dos ángulos interiores del mismo lado sea menor que dos ángulos rectos, las otras dos rectas se cortan, al prolongarlas, por el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.



Hay algo raro aquí, ¿verdad? Mientras que los cuatro primeros postulados son verdades de Perogrullo, **el postulado V es mucho más largo y menos claro**. Parece más bien un teorema que pudiera ser demostrado a partir de los cuatro postulados previos. De hecho, así lo creyeron **muchos matemáticos que durante casi veintidós siglos fracasaron en encontrar una prueba del quinto postulado**. Eso sí, por el camino fueron apareciendo multitud de **formulaciones equivalentes** y algo más breves, como por ejemplo:

Por un punto exterior a una recta dada se puede trazar una única recta paralela.

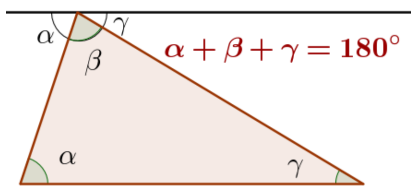
A esta formulación se la conoce también como **axioma de Playfair** (finales s. XVIII). Es una de las formas equivalentes más comunes de enunciar el quinto postulado de Euclides, que también se llama por ello el "postulado de las paralelas".

O esta otra tan famosa:

La suma de los ángulos de un triángulo es de dos ángulos rectos (180º).

La equivalencia entre esta afirmación (bien conocida ya hacia el s. IV a. C.) y el quinto postulado de Euclides se debe al matemático francés Legendre (s. XIX).

Por cierto, ¿os acordáis de la **"demostración"** que nos enseñaban en la escuela para ver esto de que los ángulos de un triángulo suman 180º? Para empezar se trazaba una paralela a uno de los lados del triángulo por el vértice opuesto y... es decir, ¡que se usaba en el fondo el quinto postulado!



Así es como lo demuestra el propio Euclides en la proposición número 32 del primer libro de los *Elementos*. No tiene más remedio que usar su quinto postulado, algo que sí que consiguió evitar en sus primeras 28 proposiciones. Probablemente, **Euclides ya veía algo raro en el último postulado y trataba de dejarlo de lado para demostrar sus teoremas** en la medida de lo posible.

Pero vamos ya a los tres matemáticos (el ruso, el húngaro y el alemán):

• **El ruso: Nikolai Lobachevski**. En un trabajo publicado en 1829, propuso una nueva geometría en la que no se prohibía que por un punto exterior a una recta pudieran trazarse dos o más rectas paralelas a la primera (es decir, dos rectas distintas tales que ninguna de ellas se cruzara con la primera recta). En otras palabras, Lobachevski **se preguntó qué ocurriría al postular lo contrario al axioma de Playfair**. Y lo que obtuvo fue **una geometría** *no euclidiana* **sin ninguna contradicción lógica**, tan válida como la de Euclides, aunque difícilmente imaginable. Pero precisamente el paso de lo palpable a lo abstracto es la clave de la matemática moderna. Partiendo de los cuatro primeros postulados de Euclides y de la afirmación opuesta al quinto postulado, podían obtenerse teoremas en los que todo cuadraba. **Las cosas cambiaban ahora, claro. Por ejemplo, la suma de los ángulos de los nuevos triángulos "imaginarios" de Lobachevski tenía que ser menor de 180º**. Cómo dibujarlos era otra cosa ya...

• **El húngaro: János Bolyai**. Su padre, el también matemático Farkas Bolyai, había pasado años y años intentando infructuosamente probar el quinto postulado de Euclides, y no dudó en tratar de disuadir a su hijo János de que siguiera sus pasos: un camino que podría acabar obsesionándolo a costa de la salud, la cordura y la felicidad. Pero János perseveró y acabó llegando a las mismas conclusiones que Lobachevski. Los resultados de János Bolyai, fechados también en 1829, no fueron publicados, sin embargo, hasta tres años después, en un anexo a un tratado de su padre. En cualquier caso, no queda duda de que **János Bolyai llegó a las mismas conclusiones que Lobachevski de manera independiente**, entre otras cosas porque este último había escrito sus trabajos en ruso, y no fueron conocidos en Europa occidental hasta años más tarde.

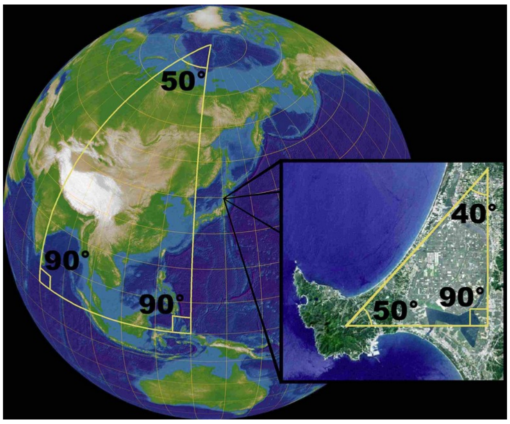
• **El alemán: Carl Friedrich Gauss**. Apodado el Príncipe de los matemáticos, es unánimemente reconocido como **uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos**, junto con Arquímedes, §34, y Newton, §2. En el año 1829 (otra vez el mismo año, sí), Gauss expone a un colega en una carta privada que **había hecho extensas investigaciones sobre una geometría sin el quinto postulado de Euclides, pero que no se atrevía a publicarlas por la enorme controversia que esta nueva geometría podría suponer en la comunidad matemática**. No olvidemos que en esa época Gauss gozaba ya de un reconocimiento importante y se encontraba en una situación cómoda. Así que, cuando Farkas Bolyai envía una copia con los resultados de su hijo a su colega y amigo Gauss, éste le contesta que:

> Si empiezo diciendo que no puedo alabar semejante trabajo te sentirás desconcertado, pero no puedo hacer otra cosa, porque alabarlo sería alabarme a mí mismo, pues todo el contenido del escrito, el camino seguido por tu hijo y los resultados a los que ha llegado coinciden casi completamente con mis meditaciones, parte de las cuales han tenido lugar desde hace 30 o 35 años.

En cualquier caso, Gauss no dudó después en reconocer públicamente la originalidad y genialidad de las publicaciones de János Bolyai (que conoció en 1832) y de Lobachevski (que conoció en 1841).

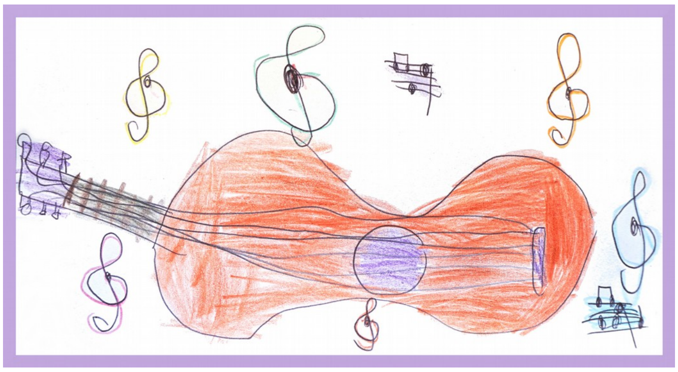
Si la geometría de Euclides correspondía a triángulos cuyos ángulos sumaban exactamente 180º, **la nueva geometría de Gauss/Bolyai/Lobachevski (conocida como geometría hiperbólica) corresponde a triángulos cuyos ángulos suman menos de 180º**. El caso restante, a saber, triángulos con más de 180º, daba una geometría con contradicciones lógicas y por tanto no válida, por lo que Gauss, Bolyai y Lobachevski la desecharon desde el principio.

Pero algunos años más tarde, **Bernhard Riemann** –el de la complicadísima hipótesis de Riemann que intentamos explicar en §8– dio otro paso. **Si, además del quinto postulado de Euclides, eliminamos también el segundo postulado, entonces sí que podemos tener una geometría cuyos triángulos tengan ángulos que sumen más de 180º** y que sea consistente desde un punto de vista lógico. En este segundo tipo de geometría no euclidiana, llamada **geometría elíptica**, podemos decir que las líneas rectas son como círculos, de manera que tienen una longitud finita, pero a su vez no tienen fin. Y, a diferencia de la geometría hiperbólica, esta sí que es fácil de imaginar, porque es la que se encuentra, por ejemplo, en una superficie esférica. Basta pensar en el triángulo que se formaría sobre la superficie de nuestro planeta a partir de dos meridianos y un paralelo. Dos de sus ángulos serían rectos y todavía habría que sumarles un tercero (el del polo), con lo que su suma sería siempre mayor de 180º.



Así que para cerrar habría que añadir a Riemann con su geometría elíptica como pionero –junto con Bolyai, Lobachevski y Gauss con la geometría hiperbólica– de las llamadas geometrías no euclidianas, que podemos decir que son *geometrías curvas*, **en contraposición a la** *geometría plana* **euclídea**. Pero, ojo, que desde un punto de vista de la lógica matemática **son tan buenas unas como otras**.

3.25. La frecuencia de la música



Si acercamos la cara a unos altavoces a todo volumen, notaremos el aire que sale e incluso veremos la membrana del altavoz vibrar. Estas vibraciones de la membrana hacen que las moléculas de aire sean golpeadas y salgan propulsadas una y otra vez formando una onda de presión que percibimos como sonido cuando es registrada por nuestro oído.

Una nota musical es una de estas ondas acústicas. **Cada nota se caracteriza por la frecuencia que tiene**, es decir, por cuántas veces por segundo se repite el movimiento de las moléculas adelante y atrás. La frecuencia se mide en hertzios (abreviado Hz). El número de hertzios es simplemente el número de veces que se repiten los "golpes" de la onda por segundo.

El oído humano puede captar desde sonidos muy graves de unos pocos hertzios hasta muy agudos de miles de hertzios. **A una onda cuya frecuencia es de exactamente 440 Hz es a lo que en música se le llama nota LA**. Cualquier onda que tenga una frecuencia que sea un múltiplo de ese valor de 440 Hz (880 Hz, 1320 Hz, 1760 Hz...) o un submúltiplo (220 Hz, 110 Hz, 55 Hz...) será también la nota LA: sonará más agudo o más grave que nuestro LA de partida, pero conservará su sonido característico de LA.

¿Y qué ocurre con las frecuencias intermedias entre dos de estos LA consecutivos, digamos por ejemplo entre el LA de 440 Hz y el siguiente LA más agudo de 880 Hz? Es sencillo: entre ellos se encuentran el resto de notas musicales, que también tienen sus frecuencias típicas. Al intervalo entre dos notas LA consecutivas (o entre otras dos notas iguales en su sonoridad) se le llama en música una "octava".

Una vez fijado el LA de 440 Hz podemos encontrar las frecuencias de las otras notas. Pero antes de ponernos manos a la obra, hay que tener claro cuántas notas hay. ¿Lo sabéis?... ¿seguro?... Hay 12 notas musicales. A ver, vamos a contar. DO, RE, MI, FA, SOL, LA, SI… Eso son 7, ¿y las que faltan hasta 12? Pues se llaman DO#, RE#, FA#, SOL# y LA# (el símbolo # se lee "sostenido") . A los músicos les gusta mucho esta forma de nombrar las 12 notas, pero desde el punto de vista de sus frecuencias la onda del DO# no tiene nada de especial; ni siquiera tiene más relación con el DO que la relación que hay entre el FA y el MI. Un físico o un matemático etiquetarían las notas con un número *n* del 1 al 12 en lugar de utilizar esos nombres. Las 12 notas ordenadas de grave a agudo (o sea, de menor a mayor frecuencia) quedarían así:

A lo que íbamos, **queremos encontrar las frecuencias de las notas comprendidas entre el LA de 440 Hz y el de 880 Hz**. Una primera idea (errónea) sería dividir el intervalo de frecuencias en 12 partes iguales y a cada una de las frecuencias que nos dan el cambio de intervalo le llamaríamos LA#, SI, DO, DO#, RE… (o en lenguaje matemático n = 2, 3, 4, 5, 6…), pero esa aproximación no sería útil. No queremos que la distancia entre dos notas consecutivas sea el mismo número de hertzios. Entre otros problemas, eso haría que en la siguiente octava las notas no fueran el doble que sus homónimas. Lo que queremos es que el porcentaje que incrementamos la frecuencia de una nota a la siguiente sea siempre el mismo. Es equivalente a decir que la frecuencia de cada nota se obtiene multiplicando la frecuencia de la anterior por un cierto número que vamos a llamar r. Si designamos por f_n la frecuencia de la nota n, tenemos que f_1 sería la frecuencia de nuestro LA de partida (o sea, f_1 = 440 Hz) y f_{13} sería el LA de la siguiente octava (o sea, f_{13} = 880 Hz). Podemos decir entonces que $f_{13} = 2 \cdot f_1$.

En general,

$$f_{n+12} = 2 \cdot f_n$$

Además, como cada nota se obtiene multiplicando la inmediatamente anterior por r, tendremos

$$f_n = r \cdot f_{n-1}$$

Para no liarnos tanto, vamos a volver a nuestras notas con números. A ver si queda claro lo siguiente:

$$f_{13} = r \cdot f_{12} = r \cdot r \cdot f_{11} = r \cdot r \cdot r \cdot f_{10} = r^4 \cdot f_9 = r^5 \cdot f_8 = \ldots = r^{12} \cdot f_1$$

¿Se entiende? Y como también dijimos que esa f_{13} tiene que ser justo el doble que f_1, pues no queda otra que $r^{12} = 2$, con lo que, despejando,

$$r = \sqrt[12]{2} \approx 1{,}059$$

Hablando en tanto por ciento diríamos que cada nota tiene una frecuencia que es el 105,9% de la anterior, o, más claro aún, **cada nota aumenta un 5,9% la frecuencia de la anterior.**

Ahora ya podemos calcular la frecuencia correspondiente a cualquier nota, pues tenemos un problema matemático perfectamente definido. Si estuviéramos en 3° de la ESO, la profesora de matemáticas diría: “hallar el término general de la **progresión geométrica cuyo primer término es 440 y cuya razón es** $\sqrt[12]{2}$ ”

Y el estudiante plantearía el problema como

$$f_n = \sqrt[12]{2} f_{n-1}$$
$$f_1 = 440$$

Y sabría entonces que el término general es $f_n = 440 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^{n-1}$. O bien, poniendo la raíz en forma exponencial:

$$f_n = 440 \cdot 2^{\frac{n-1}{12}}$$

Sustituyendo en esta fórmula la letra *n* por los valores enteros del 1 al 12, obtenemos la frecuencia de las 12 notas musicales con las que se construye toda la música occidental. Ni que decir tiene que las otras octavas son múltiplos y submúltiplos de estas, tal y como se refleja también en la fórmula. Mostramos los resultados a continuación con las frecuencias redondeadas al número entero más próximo.

Todo esto no tiene solo interés teórico, sino que además tiene aplicación práctica. Y no solo para la música electrónica (donde es evidente). Cuando un luthier va a fabricar una guitarra, debe colocar los trastes (las tiras metálicas que hay sobre el mástil) en las posiciones adecuadas para que suenen las notas correctas. Al pisar con el dedo sobre el mástil, lo que estamos haciendo es disminuir la longitud de la cuerda y, en consecuencia, aumentar su frecuencia.

La quinta cuerda de la guitarra (contada desde abajo) se suele afinar en LA. Si "pisamos" con el dedo el mástil de forma que la cuerda toque el primer traste, la nota de esa quinta cuerda deberá ser un LA#. En el segundo traste será un SI, en el tercero un DO, en el cuarto un DO#... Por ello, si *L* es la longitud de la cuerda, entonces el luthier colocará el traste número *n* a una distancia d_n medida desde el puente que vendrá dada por la siguiente fórmula:

$$d_n = \frac{L}{2^{n/12}}$$

¿Véis por qué?

4. TEXTOS EN INGLÉS

Presentamos a continuación textos en inglés con más curiosidades, anécdotas, historias, aplicaciones de las matemáticas a otras disciplinas y cuestiones que a día de hoy aún permanecen abiertas. Esta selección de textos puede constituir un recurso valioso para trabajar con estudiantes en Programas Bilingües.

4.1. Millennium Prize Problems or how to get a million dollars

The **Millennium Prize Problems** are seven problems in the field of Mathematics stated in 2000. These are old problems. Nowadays, **six of the seven problems remain unsolved**. A correct solution to any of them would result in a million dollar prize. **$1,000,000** is about 900,000 euros.

The only solved problem is the so-called **Poincaré conjecture** (now called Poincaré theorem as it has already been proven). It was originally posed in 1904 by the French mathematician Henri Poincaré, and **was only solved a century later** by the Russian mathematician Grigori **Perelman**. He was awarded the $1,000,000 prize in 2010... but **he declined the award! (wow!)**

Perelman also declined **the Fields Medal**, which is one of the most relevant prizes in Mathematics (there is no Nobel Prize in Mathematics). He said:

> *Everybody understood that if the proof is correct, then no other recognition is needed. I'm not interested in money or fame.*

The Fields Medal is granted every four years on the occasion of the International Congress of Mathematics to recognize outstanding mathematical achievement. The medal is made of gold and shows the face of the brilliant Archimedes (§34). Contrary to other prizes that are usually awarded to senior scientists, the Fields Medal can only be won by mathematicians under the age of 40. This may sound strange, but remember that most important discoveries are made by young men and women with a great scientific creativity (which tends to decrease with age).

Another hard-to-solve problem was Fermat's Last Theorem, which was indeed a conjecture for almost 400 years until the British mathematician Andrew Wiles solved it. He first attempted to give a valid proof in 1993, when he was 40, but there was a little mistake that he could not correct until 1995. By then he was 42, past the limiting age to receive the Fields Medal! Nevertheless, the International Mathematical Union gave him a silver plaque in recognition for his proof.

To conclude, here you have the list of the 6 millennium problems that remain unsolved… just in case you want to try to win a million dollars (and surely a Fields Medal).

- The Riemann hypothesis (§8)
- Yang-Mills Theory and the Mass Gap Hypothesis
- The P vs. NP problem (§17)
- The Navier-Stokes Equations
- The Birch and Swinnerton-Dyer Conjecture
- The Hodge Conjecture

4.2. Cheryl’s birthday problem goes viral

SASMO stands for ‘‘Singapore and Asian Schools Math Olympiad’’. According to its webpage it is an organization devoted and dedicated to **bringing a love of Mathematics to students**. It concerns itself with interest and enthusiasm for mathematical problem solving, developing mathematical intuition, reasoning and logical thinking, as well as creative and critical thinking. The following **problem**, aimed at students between 14 and 16, was proposed by SASMO and quickly **went viral**. It is known as **Cheryl's birthday problem**.

Albert and Bernard just became friends with Cheryl, and they want to know when her birthday is. Cheryl gives them a list of 10 possible dates:

May 15, May 16, May 19,

June 17, June 18,

July 14, July 16,

August 14, August 15, August 17.

Cheryl then tells Albert and Bernard separately the month and the day of her birthday respectively.

- **Albert:** I don't know when Cheryl's birthday is, but I know that Bernard doesn't know too [sic, although better grammar would be 'either' instead of 'too'].

- **Bernard:** At first I don't [sic] know when Cheryl's birthday is, but I know now [sic, but better grammar could be: 'At first I didn't know when Cheryl's birthday is, but now I do'].

- **Albert:** Then I also know when Cheryl's birthday is.

So, when is Cheryl's birthday?

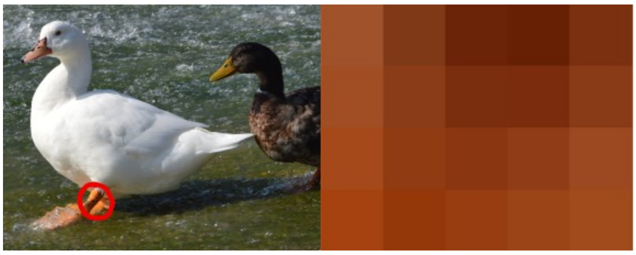
It could seem impossible (§1, §4, §30) to solve the problem with apparently no information provided, but it isn't if you are used to these kind of problems. However, if this is the first time you are facing one of these, it is likely that you have to think about it for a long time. I hope you enjoy it.

You got it? OK, here you have the key points that you should have followed in your reasoning:

• Albert's first comment eliminates all the dates of May and June. Can you see why?
• Bernard's following comment eliminates July 14 and August 14.
• Albert's last comment eliminates August 15 and August 17.

So the final answer is... exactly, the remaining date you thought, didn't you?

4.3. Pixels, bits, and steganography



Each single point in a digital image is called a **pixel**. An image is composed of so many pixels that you cannot distinguish them unless you zoom in the image. Only after a great magnification you are able to see **squares of different colors**. Each of these colored squares is a pixel.

Computers use the RGB model to specify a color. RGB stands for Red, Green, and Blue. The combination of these three colors –called **channels** in computation language– can produce any other color. **So, for coloring a pixel, the proportion of red, green, and blue must be specified.**

Computers use an 8-bit scale **from 0 to 255 for each channel**. In other words, there are $2^8 = 256$ different intensities for each of the three basic colors. The greater the number, the brighter the color. By combining the three channels you can create up to $256 \times 256 \times 256 = 2^8 \times 2^8 \times 2^8 = 2^{24}$ colors. **That's more than 16 million colors!** Here are some examples:

Color	Name	(R,G,B)
	red	(255,0,0)
	yellow	(255,255,0)
	light blue	(135,206,250)
	black	(0,0,0)
	pink	(255,192,203)

But computers prefer to only use **0's and 1's** instead of numbers up to 255. That's not a problem because **every natural number can be written as a binary number**, i.e. using 0 and 1 (by the way, that's a bit). For instance the values for each channel in the light blue of the image above are indeed

(135, 206, 250) = (1000011**1**, 1100111**0**, 1111101**0**)

Thus, one of these light blue pixels would correspond to the previous long string of 24 bits.

We have written in bold the so-called **least significant bits, which are the right-most digits for each channel**.

They are said to be “least significant” because **swapping 0 and 1 in those positions does not alter the color appreciably**: it is like changing just one unit over 256 in the channels.

We are almost done! Now we can **erase the least significant bits of a photo and write instead the binary string for a secret message**. For example to hide the message “HELLO WORLD” in a digital image, we must do the following:

1. Associate the letters H-E-L-L-O-W-O-R-L-D with numbers, as done for instance in the usual ASCII convention, based on which a unique binary string corresponds to each letter:

H=01001000; E=01000101; L=01001100; O=01001111; W=01010111; R=01010010; D=01000100

So our “HELLO WORLD” would read:

01001000 01000101 01001100 01001100 01001111 01010111 01001111 01010010 01001100 01000100

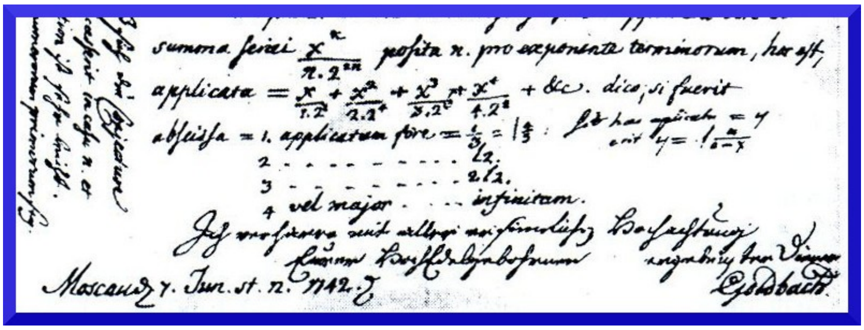
2. Choose a beautiful digital picture and overwrite the first non significant bits of your photo with the previous string. Nobody will notice that you have substituted a bunch of pixels by others with almost the same color.

This practice of concealing a message within a digital file (such as a digital image) is called **steganography**. And it is a quite common method to transfer information **used by intelligence services and terrorist groups.**

Do you find it difficult to implement? It is not. As a matter of fact **there are many tools on the Web to do it**. Just choose a photo and insert a text in it. **Run the software and voilà.**

The odds of someone finding your secret message are very rare, but take into account that **steganography is not a cryptography method** (such as the one-time pad used by Che Guevara and Fidel, §20). This is because the message is not ciphered, although you could do it before you hide the message inside the 0's and 1's of the digital file (only for paranoids!).

4.4. Goldbach's conjecture



Goldbach's conjecture is one of the oldest **unsolved** problems in mathematics. It states:

Every even integer greater than 2 can be expressed as the sum of two primes.

(Remember that a prime is a natural number greater than 1 that has no positive divisors other than 1 and itself. The first prime numbers are 2, 5, 7, 11, 13, 17, ...)

For the first even numbers, Goldbach's conjecture reads:

- 4 = 2 + 2
- 6 = 3 + 3
- 8 = 3 + 5
- 10 = 3 + 7
- 12 = 5 + 7
- 14 = 7 + 7
- 16 = 5 + 11

For some numbers there is more than one way to express them. For instance, the number 10 can be written as 3+7, but also as 5+5.

Mathematicians believe that Goldbach's conjecture is always true for any even number greater than 2. **Christian Goldbach** and **Leonhard Euler** (§36) thought the same in **1742**, when they proposed the conjecture. Euler wrote:

I regard it as a completely certain theorem, although I cannot prove it.

Nowadays, it remains unproven. For every even number up to 4,000,000,000,000,000,000, modern computers have checked it, but that is not enough, as there are infinitely many numbers. So, there are two options to solve the problem:

1. Find an even number that cannot be expressed as the sum of only two primes. (That's unlikely. Mathematicians believe there is no such a number)
2. A **sophisticated mathematical reasoning** (§3, §11) to ensure that the conjecture is true for **EVERY** even number greater than two.

4.5. Parrondo's paradox: Two bad things becoming a good one

Game theory is an important branch of Mathematics strongly linked to gambling. Mathematicians say that a “losing game” is one in which you tend to lose on average. All the games played in casinos are losing games (otherwise it wouldn't be a business for the house). But **sometimes the unexpected happens: Two different losing games played back and forth can surprisingly result in an averaged positive outcome!**

This counterintuitive result became popular after a paper published in the journal Nature by G.P Harmer and D. Abbott. The authors were inspired by the ideas originally presented by the **Spanish physicist J.M. Parrondo in a conference in 1996**. His seminal idea was the translation of a well-known problem in Physics —the induction of directed motion through the rectification of stochastic thermal fluctuations, so-called Brownian motors or ratchets (err... what?)— into the language of game theory.

All right, let's define the **two losing games, say Game A and Game B**.

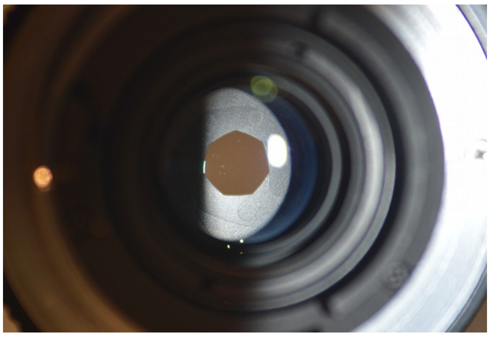
First, **Game A**. Consider tossing a coin. Getting 'heads' you win 1 euro, getting 'tails' you lose 1 euro. With a fair coin, heads come up with a probability of 0.5 (that is, 50%), and tails come up with the same probability. Statistically you can play that game with no significant profit or loss of money in the long run. But now, suppose that the coin is designed to fall with slightly greater probability as 'tails': for instance, 0.505. With this biased coin you will lose in average. In fact, the more you play, the more money you lose. You'll finally be penniless. Well, this is our losing Game A.

Now let's define **Game B**. This time the player gambles on a slightly more complex game involving two coins (Coin '1' and Coin '2'). Coin 1 is biased so it gives you odds of winning at 0.745 (that means your chance of winning is almost seventy-five percent). Well, this is in fact a really good coin for you... but all that glitters is not gold because there is also Coin 2 in Game B, which is an awfully unfair coin with only a probability of 0,095 for you to win (less than a one-tenth chance of winning). When do we have to toss the good Coin 1 and when do we have to toss the bad Coin 2? In Parrondo's original game —there are many variants— Game B depends on the capital. If your total money is a multiple of three (you know, 0€, 3€, 6€, 9€, 12€...) you have to flip Coin 1; if it is not, you are forced to toss the bad Coin 2. Not only is Coin 2 *really* bad (while Coin 1 is only *slightly* good), but also you would play against bad Coin 2 more times (because there are two times as many non-multiples of three than there are multiples of three). Game B is definitely a losing game!

Note that the apparently weird values for the probabilities given here (0.505, 0.745, 0.095) can be written in terms of a parameter ε=0.005 in a clearer way as $1/2+\varepsilon$ (for Game A), $3/4-\varepsilon$ (for Coin 1 of Game B), and $1/10-\varepsilon$ (for Coin 2 of Game B). Anyway, these particular values can be changed giving similar results, so don't worry about the specific numbers.

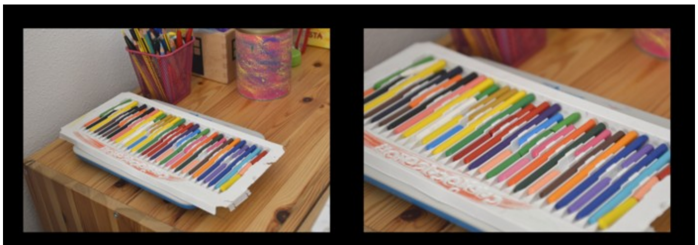
Although both Games A and B are losing games, it turns out that playing two rounds of Game A followed by two of Game B (and so on) actually produces a steadily increasing capital. That's Parrondo's paradox. Surprisingly, playing two bad games alternatively results in a good thing! Further**more, the Parrondo's paradox is also true when the games are switched at random!** You would become multimillionaire with that simple strategy.

4.6. Focus on Math: The ultimate guide to f-numbers in digital cameras



A **Digital Single-Lens Reflex (DSLR) camera** is a photographic camera that has two parts: a digital imaging sensor in the body of the camera and an objective or lens, which is an optical system that gathers the light to the sensor. **We will** *focus* **on the lens (sorry for the play on words!)** But first, a couple of basic widely-known concepts by photography lovers.

First one: **The focal length**. It is a measure of how strongly the system converges light. The longer the focal length (e.g. 300 mm), the higher the magnification of the image. Conversely, shorter focal lengths (e.g. 24 mm) lead to lower magnification. When you zoom in and out you change the focal length.



Focal Length: 35 mm (left) and 70 mm (right)

The second concept to keep in mind is the **entrance pupil** of an optical system, which is closely related to the size of the physical aperture or **diaphragm** of the camera. In fact, the only difference between the entrance pupil and the physical aperture is the presence of lenses in front of the latter, which effectively modify the size of the image. The effective aperture is the apparent diameter of the diaphragm opening in the camera lens as seen through the front of the lens, and it is measured in mm.

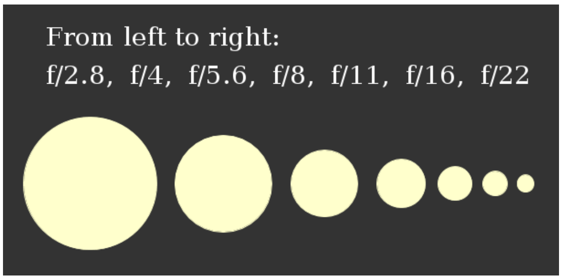
The ratio of these two lengths —the focal length and the effective aperture— is the so-called f-number or f-stop. It is represented by the letter *N* (not *f*, be careful!), while the letter *f* is used to represent the focal length. *D* stands for the diameter of the pupil entrance.

$$N = f/D$$

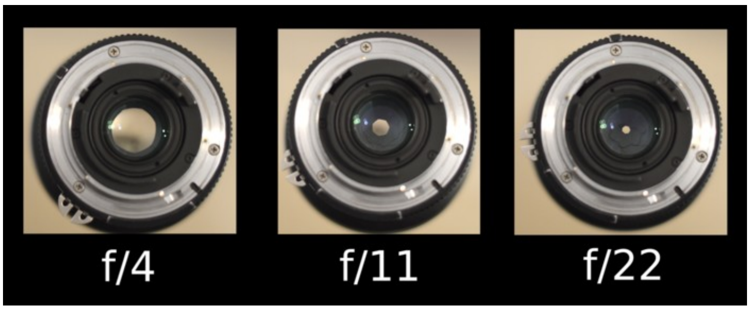
Note that the f-number is dimensionless. In DSLR cameras you can independently choose the values for *N* and *f*, so you are indirectly fixing the effective aperture *D* according to

$$D = f/N$$

For instance, if you have zoomed in to a focal length of *f*=200 mm and you have set the f-number to *N*=8 (which is labeled in cameras as "f/8"), then the diameter of the pupil entrance is *D*=*f*/*N*=200/8=25 mm.



One could argue that **the diaphragm of a camera lens is not a circle of a diameter** *D,* **but a regular polygon delimited by blades.** The area of a regular polygon is calculated by multiplying its perimeter (**which is** the sum of the lengths of all its sides**)** times the apothem (**which is** the distance from the center to the midpoint of one of the sides**),** and then dividing the result of the multiplication by 2. Both the apothem and the perimeter of a regular polygon are directly proportional to its radius **(which is** defined as the distance from the center of the regular polygon to a vertex**)**, so the area itself is proportional to the square of the radius, thus to the square of the diameter –twice the radius–), as happens with the area of a circle. So... **we are not going to make a fuss about whether the pupil entrance is a perfect circle or not**, OK? It doesn't matter for our reasoning.



In the vast majority of camera lens you don't change the aperture continuously (you do it when it comes to the pupils of your human eyes). In fact, **only certain values of the f-number are allowed** in most cameras: f/2.8, f/4, f/5.6, f/8, f/11, f/16, and f/22. Why those weird values? Photography enthusiasts know the answer: they are chosen so that each value in the series allows half of the intensity of light pointing to the sensor as compared to the previous value. But... why is this (approximately) true? Because the area of the aperture corresponding to each of these numbers is half of the corresponding to the preceding value.

If we call A_0 the area for a certain aperture, say f/2.8 for instance, and A_1 the area for the succeeding f-number, say f/4, we impose the condition:

$$A_0=2A_1$$

In terms of the diameter D it would read

$$D_0^2=2D_1^2$$

and taking the square root:

$$D_0=\sqrt{2}\, D_1$$

Therefore, the **f-numbers form a geometric sequence with common ratio √2**. If the first term is 1, next ones are

$$\sqrt{2} \approx 1.4,\ (\sqrt{2})^2 = 2,\ (\sqrt{2})^3 \approx 2.8,\ (\sqrt{2})^4 = 4,\ (\sqrt{2})^5 \approx 5.6,$$

$$(\sqrt{2})^6 = 8,\ (\sqrt{2})^7 \approx 11,\ (\sqrt{2})^8 = 16,\ (\sqrt{2})^9 \approx 22$$

Some digital cameras allow to change the f-number with more precision, being the possible values 1.0, 1.1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2, 2.2, 2.5, 2.8, 3.2, 3.5, 4, 4.5,5.0, 5.6, 6.3, 7.1, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 16, 18... **Now, each step that halves the light is subdivided in three.** In other words, the new common ratio k of the latter geometric sequence satisfies the condition $k^3=\sqrt{2}$. Solving for k, the ratio is the sixth root of 2, i.e., $k=\sqrt[6]{2}$, and the above numbers are approximations to the sequence $\{k^n\}$, being n an integer number. For instance,

$$k^{12} = 4$$

$$k^{13} \approx 4.5$$

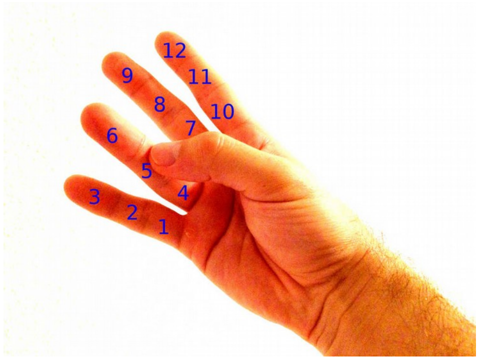
$$k^{14} \approx 5$$

$$k^{15} \approx 5.6$$

In addition to the aperture, in DSLR cameras you can control the amount of light that reaches the sensor by varying the **exposure time** (sometimes called the **shutter speed**), that is, the seconds (or fractions of second, indeed) during which the sensor is exposed to light. Standard values in cameras for the exposure time are: 1/1000 s, 1/500 s, 1/250 s, 1/125 s, 1/60 s, 1/30 s, 1/15 s, 1/8 s, 1/4 s, 1/2 s, 1 s... (s stands for second.) Note that each fraction is roughly half of the previous fraction, so the amount of light that reaches the sensor doubles at each increment step of the exposure time.

Doubling the exposure time and the f-number at the same time does not alter the overall exposure of the photo. This is because the gain in light due to longer exposure time is compensated by the loss of half of the light due to a greater f-number (lower aperture). Thus, once the total amount of light is fixed to ensure a proper exposition (not too dark, not too burn), photographers play with the different pairs of values (f-number, shutter speed) that are equivalent in terms of light gathered, but different when it comes to effects such as sharpness, depth of field, diffraction, motion blur, noise, etc. These artistic effects can also be fully explained mathematically and physically... But that is out of our scope, sorry.

4.7. Borges, his mother, and a pair of hands with 60 fingers

The Argentinean writer **J. L. Borges** was one of the most erudite authors of the 20th century. Having a broad knowledge of almost everything, he was particularly interested in some aspects of logic and mathematics, such as the set theory and the idea of infinitum. At **his mother's funeral**, a friend of the family commented that it was a pity that the poor woman **wouldn't be able to reach the age of 100 (she died at the age of 99). It is said that Borges answered:**

"I see, Madam, that you are a devotee of the decimal system"

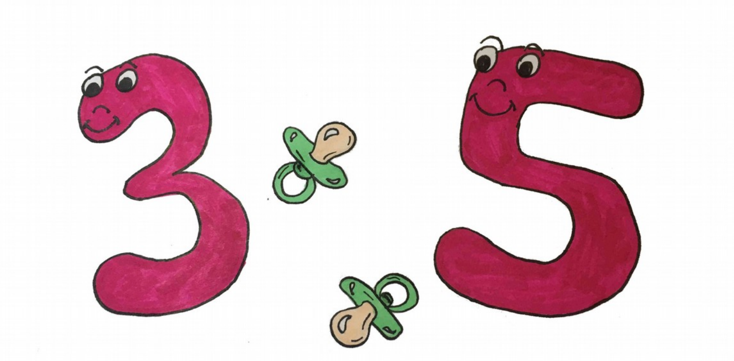
Borges was right: **we tend to overestimate the decimal system** (based on number 10). From a vital point of view there is not much difference between 99 and 100. But for some reason, we, humans, are in love with round numbers such as 100 or 1000. Our behavior is understandable as we generally use the decimal system. **We have 10 fingers, so our tendency to this number is logical**. Surely you have seen a child learning to add. They use their hands constantly.

But sometimes we use other numeral systems. For example, **the sexagesimal system (based on number 60) is the favorite when it comes to time**. So, 1 hour equals 60 minutes instead of 10 or 100 minutes. Why? Well, we inherited the sexagesimal system from ancient cultures —Babylonians were really experts— One important strength of **the number 60** is that it **has many divisors**: it can be divided evenly by 1, 2, 3, 4, 6, 12, 15, 20, 30 and 60.

In addition, **it is possible to count up to 60 using your hands in a simply way**. Firstly, use your right hand thumb to count up to 12 (see picture below). Then, use the remaining 5 fingers of your left hand to carry how many dozens you have: 1 dozen (12), 2 dozens (24), 3 dozens (36), 4 dozens (48), and 5 dozens (60).

Anyway, I have to confess that I love both numeral systems: living healthy for 100 years (ten times ten) would not be so bad, but 120 years (two times sixty) would be superb!

4.8. Twin primes: How many



A **prime number** is a number that cannot be divided by other numbers than itself and the number 1. Here is a list of the prime numbers below one hundred: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

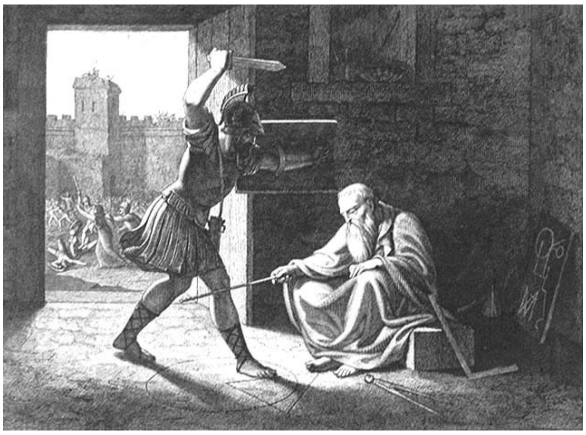
Two consecutive prime numbers are called **twin primes** if their difference is equal to two. If you have a look at the list of prime numbers above, you will realize that the first pairs of twin primes are (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), and (71, 73).

Since the great Euclid, §11, (around 300 BC) we know that there are infinitely many prime numbers. But, **are there infinitely many twin primes?**

Mathematicians believe that the answer is yes, but nobody has been able to prove this **conjecture** yet.

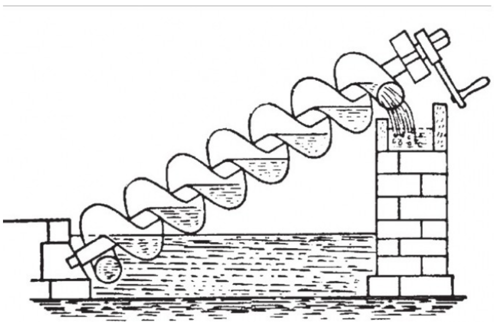
Note that the only even prime is 2, so twin primes are as closely spaced as possible for two primes —with a gap distance of 2—, except for the pair (2, 3) with a gap distance of 1. In April 2013, Yitang Zhang announced the discovery that there are infinitely many pairs of primes that differ by a gap of some number below approximately 70,000,000. Two years later, in 2015, James Maynard and his group showed that there are infinitely many pairs of primes that differ by at most 246. This number is quite closer to the number 2 of the twin primes conjecture than the first result involving the number 70,000,000. The conjecture about twin primes is likely to become a theorem soon! (We hope). Nowadays, the math community is **trying to reduce this large gap of 246 to just 2 units**.

4.9. Archimedes: The first giant of mathematics

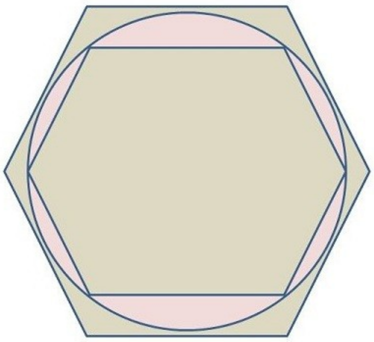


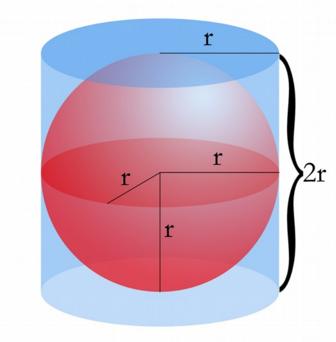
Archimedes was **born in Syracuse** (ancient Greece) in 287 B.C. He was a great scientist with brilliant contributions to **physics, astronomy, and maths**. He discovered the concept of **density** and formulated the principle of **buoyancy**, which explains why some objects float but some others sink. He stated the laws of the **lever and pulleys**.

He was also a great inventor. He invented the so-called **Archimedean screw**, other machines to be used in astronomy observations and calculations, and many **war machines** that allowed defending his city against the Romans.



But above all, Archimedes was a giant mathematician. He estimated the value of the number π=3.14... starting with the perimeters of inscribed and circumscribed regular polygons. He also made important discoveries about the volume and the surface of spheres and cylinders.





He was a clear example of an **absent-minded mathematician**. One time, **Archimedes was working on a problem he had drawn on the sand of the floor**. His city, Syracuse, was in war against the Romans, and it had been taken just when he was thinking about the problem. Then a Roman soldier showed up and shouted at him:

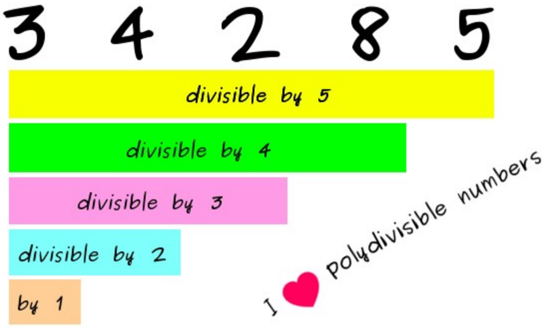
“I order you to come with me to see the General”

But Archimedes answered impatiently:

“Can't you see I am working? I must finish my problem firstly. And stand off my diagram, you are spoiling it”

The soldier got angry, drew his sword and killed Archimedes.

4.10. I love polydivisible numbers



Is it possible to write a nine-digit number so that its **first digit is divisible by 1**, its **two first digits are divisible by 2**, its three first digits by 3, **and so on** until the whole nine-digit number is divisible by 9?

Let's try to build such a number starting from left to right, digit by digit. Any number from 1 to 9 will work to start with, as every integer is divisible by 1. Let's say number three:

3

The second digit must be even to ensure that the entire number is divisible by 2. Let's say 4. So, our number is now

34

Ok, do you remember the divisibility rule for 3? Sure, the sum of the digits has to be divisible by 3. The number

342

fulfills the rule (3+4+2=9), and so do the numbers 345 and 348. But let's continue with 342. I like that number.

The divisibility rule for 4? The last two digits have to be divisible by 4. The number

3428

is suitable, as 28 is divisible by 4 (so the entire number is divisible by 4, too). If we add the digit 0 or 5 to the right we would have a number divisible by 5. As we are not using the digit 0 (remember: only from 1 to 9), the only option is

34285

All right. The rule for 6? The number should be divisible by both 2 (so it must end in an even digit) and 3 (so their digits must add up to a multiple of three). The number

342852

will do (and also 342858, which is 6 units more... but I like the former more, for no reason).

We are on the right track. There are only three digits left! Let's add another one that makes the number divisible by 7... Well, I have to confess that I don't remember the divisibility rule for 7 (it's a bit tough) but I do know how to divide. So, let me try my luck with the number 3428529 (I have put 9 as a possible seventh digit). I take my pencil, divide 3428529 by 7 and… bad luck, the division is not exact: It gives a remainder of 6. But that's the clue… if we subtract 6 units to the failed candidate 3428529, we get for certain a number divisible by 7:

3428523

Ugh... we are almost done. With the same trick applied to number 8 we can get the next digit and then write

34285232

Finally, a number is divisible by 9 if its digits add up to a number that is divisible by 9 (yeah, I do remember the rule for 9!). I'm going to add... 3+4+2+8+5+2+3+2=29... so we must add 7 as the final digit to allow the sum to be 36, which is a multiple of 9. Perfect, we are done! Our number is:

342852327

Wow, we did it!

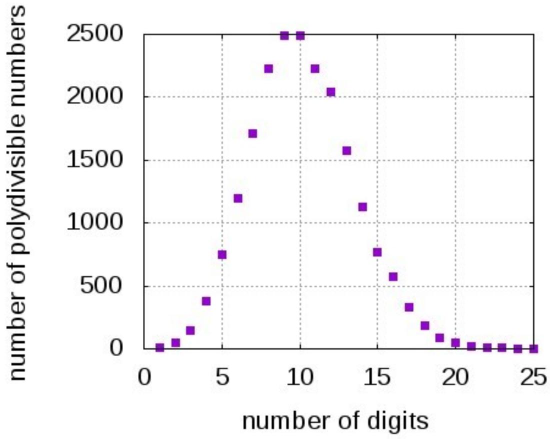
Can you make other numbers with the same property? Sure you can as there are many more choices (concretely 2,492 altogether). **These numbers are called polydivisible numbers.**

But don't relax, yet... You know that mathematicians like to impose additional conditions in order to complicate things. For example, if each number from 1 to 9 is allowed to appear exactly once, is it now possible to build a polydivisible number with the nine digits? The answer is yes, but this time there is a unique solution: 381654729 (see references on the web for a witty deduction… or try it by yourself)

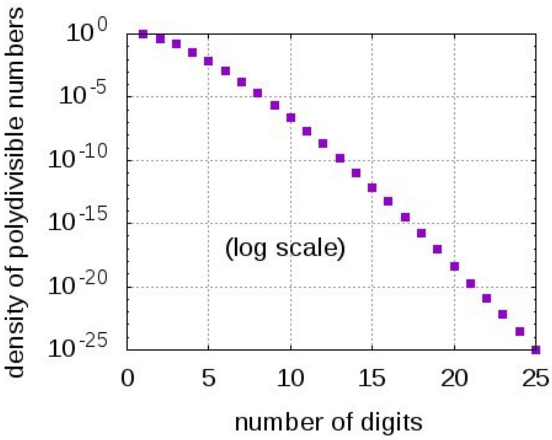
And you also know that mathematicians love generalizing. So, **we can consider polydivisible numbers with more than 9 digits**. For instance, 10200056405 is a 12-digit polydivisible number (you can check it). Obviously numbers from 0 to 9 can be repeated. With many digits involved getting a polydivisible number becomes more and more difficult. Then, the burning question is: **Are there infinitely many polydivisible numbers?** And the answer is… **nope**. There are only 20,456 polydivisible numbers altogether, with

3 608 528 850 368 400 786 036 725

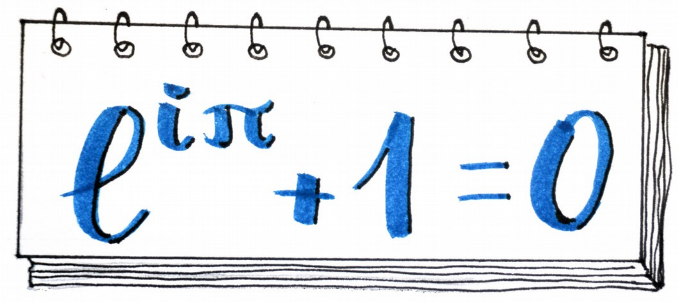
being **the longest one.** In fact, this is the only 25-digit number that is polydivisible. The next graph shows the number of polydivisible numbers in terms of the number of digits… read the last sentence again and more slowly if needed ;-)



The density of n-digit polydivisibility numbers can be defined as the ratio between the number of polydivisible numbers with n digits and the total numbers with n digits (i.e. 10^n). For 1-digit numbers the density is 1 (all numbers are polydivisible), while for 26-or-more-digit numbers the density is strictly zero (none is polydivisible). Have a look at the graph below.



4.11. Euler: A prolific mathematician



Leonhard Euler was born in Switzerland in 1707. He is considered **the most prolific mathematician** in history (based on the number of pages, while Paul Erdös, §5, published more articles). It is said that he could write a mathematical paper in the half-hour between the first and second call to dinner!

As soon as Euler finished a paper, he would put it on top of a growing pile that was awaiting for being printed. Then, the printer would grab the articles from the top and therefore many times the dates of the publication of Euler's papers ran counterwise to those of their composition. **It was extremely misleading because some papers, which were based on previous ones, were actually published first.**

In the first picture you can see **Euler's identity**, one of the most beautiful formulas in mathematics. It combines the important numbers e=2.71828..., π=3.14159..., i=√-1, 1 and 0.

The second picture is a stamp containing **another famous formula by Euler**: for any convex polyhedron, the number of **vertices** and **faces** together minus the number of **edges** equals **2**.

4.12. Hailstone Numbers

Hailstone numbers are the numbers of a sequence which is obtained as follows. First, start with any number. Then,

- **if the number is even:** divide by 2
- **if the number is odd:** multiply by 3 and add 1

Using the new number apply the previous condition again. Here we illustrate this algorithm, starting with the number 10:

10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1…

We can see that this sequence loops into an infinitely repeating 4,2,1 sequence.

If we tray any other number, say 58:

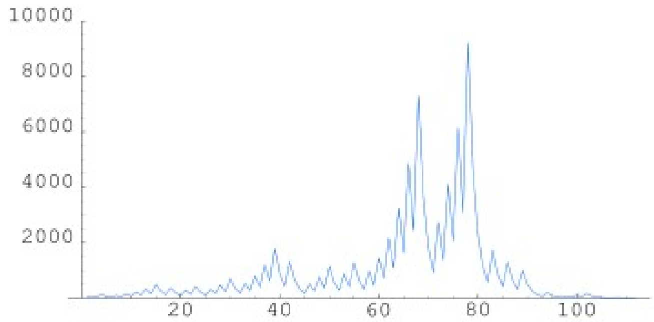
58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1…

we see the same loop of 4, 2, 1.

Hailstone numbers are called like that because they typically rise and fall, resembling a hailstone inside a cloud. Every tested starting natural number has produced a hailstone sequence that eventually drops down to the number 1, then “rebounding” into the loop 4, 2, 1.... You can imagine that it is a hailstone heavy enough to fall from the cloud to the ground and then bounce.

The proper mathematical name for this investigation is the Collatz conjecture which was made in 1937 by the German mathematian Lothar Collatz.

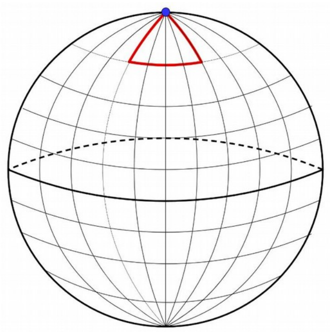
The following graphic shows how different numbers (x axis) take a different number of iterations (y axis) to reach 1. We can see that some numbers take much longer than others to reach one.


10000
8000
6000
4000
2000
20
40
60
80
100

4.13. The returning explorer revisited

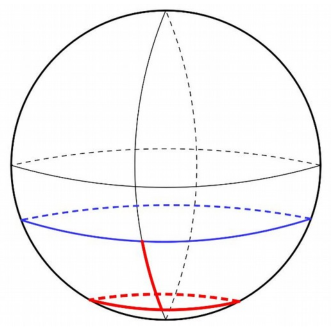
The brilliant Martin Gardner reviews the old riddle of an **explorer** who walks **one mile due south**, turns and walks **one mile due east**, and finally turns again and walks another **one mile due north**, arriving at **exactly the same point where he started**. How is this possible?

This problem is known as the **returning explorer,** and sometimes it is said that **the explorer shoots a bear** after his walk. Then you are asked to figure out the color of the bear. After thinking for a while, smart people answer “white”, as the explorer must have been **in the North Pole of the Earth** (the blue point in figure below) when shooting the (polar) bear. This would explain his closed trajectory (red spherical triangle in the figure below). The graph is not to scale.



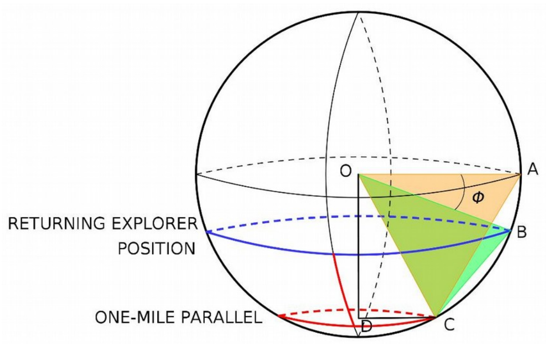
A mathematician would only partially agree with the answer above and would ask more questions. **Is this the only spot on Earth for the returning explorer?** Can you find other points, besides the North Pole, from which the explorer could walk a mile south, a mile east, a mile north and then find himself back at his starting position?

The answer is definitely yes. In fact, **there are infinitely many points**. Let me explain it. Imagine a parallel line on the Globe so close to the South pole that its total length is precisely one mile: If you walk one mile East along this one-mile parallel, you will return to your original place. Therefore, **if the explorer is in any point over another parallel located one mile north to the one-mile parallel, it would be a “returning explorer” after going south, east —honestly a waste of time— and north back to his starting position.**



The infinitely many points that ensure a closed trajectory (in red for one of the points) are colored blue in the above figure. (The draw is not to scale.)

Moreover, **the same idea applies to a half-mile parallel, a third-mile parallel and so on**, with the only difference that the explorer would do 2, 3, etc. full turns in his Eastward trajectory.



Let us calculate the latitude of the blue parallel that ensures going back to the starting point (see the previous figure). The length of the red parallel is 1 mile, and the length of a circumference is given by the formula 2πr, thus

$$2\pi r = 1,$$

which gives us the radius r between D and C (see figure):

$$r = 1/(2\pi)$$

Now, remember that the cosine of the angle OĈD (let us call it Φ') is the quotient between DC (that is r) and OC (that is the radius of Earth R):

$$\cos(\Phi') = r/R$$

Combining the last two expressions and solving for Φ' with the inverse function of the cosine (that is called arccos), we obtain

$$\Phi' = \arccos(1/(2\pi R))$$

Note that this angle Φ'=OĈD is equal to the angle AÔC, and therefore it represents the latitude of the one-mile parallel (red line in the figure).

Now let us compute the angle ΔΦ between the red parallel and the blue one (see green triangle in the graph). The blue parallel is where the returning explorer is actually located. From the definition of a radian (the standard unit of angle measure) we can calculate this angle as the quotient of the arc length for BC –which is 1 mile– and the radius of Earth R:

$$\Delta\Phi = 1/R$$

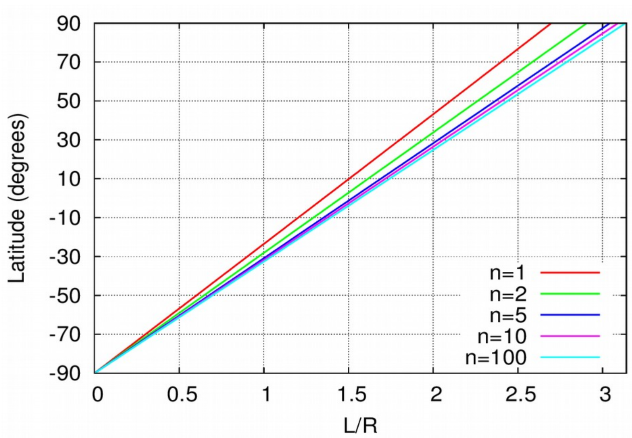
Finally, the latitude of the blue parallel is Φ=Φ'−ΔΦ:

$$\Phi = \arccos(1/(2\pi R)) - 1/R$$

This angle is expressed in radians, but normally latitude is expressed in degrees (0 degrees for the Earth's equatorial plane, 90° for the North Pole, and −90° for the South Pole). Thus, we must multiply by the factor of conversion 180/π and change the global sign to get negative latitudes for the Southern Hemisphere. Moreover, **it is straightforward to generalize the previous formula to include trajectories along red parallels of a 1/n of a mile, with n being the number of full turns (n = 1, 2, 3,...). We can also consider that the explorer walks an arbitrary distance L in each direction instead of just 1 mile. Then, the general formula for the latitude in the South of the returning explorer would read:**

$$\Phi = 180/\pi\cdot[L/R - \arccos(L/(2\pi nR))] \quad \text{(Latitude, degrees)}$$

This formula is only valid for values of L that result in an angle Φ between −90° and 90°. **There always are solutions for some n providing that L < πR** (although for n=1, L should be less than approximately 2.7R). In the next graph, **the latitudes in terms of the quotient L/R are shown for some values of n.**



The length of the arc between the South Pole and a point along one of the infinitely many blue parallels (one for each valid value of the natural number n) is the product of its subtended angle in radians, $\pi/2 + \Phi$, and the radius R, which gives:

$$\text{Arc} = L + R\cdot[\pi/2 - \arccos(L/(2\pi nR))] \quad \text{(distance from the South Pole)}$$

The previous two general exact expressions can be approximated for small values of L/R, as in the original example, where L=1 mile and the average Earth's radius R is over 3960 miles. To the first order at L/R, they read:

$$\Phi \approx -90 + 180L/(\pi R)\cdot[1+1/(2\pi n)]$$
$$\text{Arc} \approx L\cdot[1+1/(2\pi n)]$$

The last expression for L=1 mile and n=1 is the one that Martin Gardner tell us, and it gives a distance of approximately 1.16 miles from the South Pole. For greater values of n, the parallels are even closer to the South Pole.

In any case, there are no bears in Antarctica, so these infinitely many points near the South Pole that ensure a returning trip for the explorer are not valid and we must admit “white” as the perfect answer for the color of the bear. But it wasn't that obvious at all, was it? Now, we know that the explorer could also be shooting black and white penguins (with a camera).

5. UNA PROPUESTA DE GAMIFICACIÓN

5.1. *La vuelta matemática al Mundo*: el juego

La vuelta matemática al Mundo **es un concurso pensado para alumnos, aunque también ampliable a padres y profesores como miembros de la comunidad educativa corresponsables del éxito del proceso de enseñanza-aprendizaje**. Es una propuesta que trata de dar una visión de las matemáticas mucho más apasionante que la que a veces se aprende en el instituto. Se plantea una gamificación a partir de los textos elaborados en este trabajo con un proyecto de trabajo semanal. En cada una de las jornadas o entregas semanales habría lo siguiente:

- **Un breve texto sobre estas "otras matemáticas"** seleccionado de los escritos de este trabajo. **Anécdotas, curiosidades, historias y conjeturas** sorprenderán y engancharán al lector-estudiante con cada nueva **jornada** publicada, **semanalmente, en la web del Centro o en alguna otra plataforma digital (Moodle, blog, red social...).**
- **Una pregunta** sobre el texto anterior con tres posibles respuestas, solo una de ellas verdadera.
- **Unas indicaciones sobre cómo moverse por el mapamundi** en función de la respuesta dada. Empezaremos en un país... bueno más concretamente en un punto del globo terrestre con unas ciertas coordenadas geográficas (latitud y longitud). A partir de ahí tendremos que movernos tantos grados norte, o sur, o este, u oeste según la respuesta a la pregunta. Al final habremos dado *La vuelta matemática al Mundo* y tendremos una serie de coordenadas con sus correspondientes países por los que hemos viajado.

La vuelta matemática al Mundo fue, de hecho, un juego educativo pensado y realizado por el autor de este trabajo, y que se llevó a cabo en el curso 2015/16 en el IES Santa María de los Baños de Fortuna (Murcia). Las diferentes "etapas" de ese viaje matemático fueron apareciendo en la web del citado centro y se basaban en textos, también del autor, que no eran accesibles desde dicha web, sino que estaban alojados en una dirección externa: m4t.es. El servidor de m4t.es (proyecto actualmente no continuado) se encontraba físicamente en una Raspberry Pi (un ordenador de placa única del tamaño de una tarjeta de crédito con funcionalidades básicas), gestionado íntegramente también por el autor.

Algunos detalles incompletos de esa experiencia educativa pasada pueden rescatarse de la web del mencionado IES, de un Proyecto de Innovación Educativa más general titulado *La vuelta al Mundo en 80 colores*, de un blog del autor (https://sites.google.com/site/vueltamatematica/) que se elaboró de forma complementaria y del Trabajo Fin de Máster del autor titulado "Raspberry Pi como servidor personal en enseñanzas preuniversitarias" (en realidad más enfocado al diseño y uso de un servidor Moodle sobre una Raspberry Pi). En cualquier caso, en las mencionadas fuentes solo se hace referencia a la propuesta didáctica y, en ningún caso, están accesibles en ellas los textos completos de las diferentes etapas o jornadas. Los textos del presente trabajo constituyen, pues, una publicación original, si bien la propuesta de gamificación aquí recogida es un desarrollo de una idea previa del autor, sucintamente referida en las citadas referencias. El servidor de m4t.es, que contenía algunos de los textos que aquí se recogen, fue desconectado de la Red.

5.2. Coordenadas geográficas: ¿cómo moverse por el Planeta desde casa?

¿Os parece complicado eso de las coordenadas geográficas? Veréis como no. **Para situar un lugar en el mundo hay que dar dos números llamados latitud y longitud**. La latitud nos dice cuánto al Norte o al Sur nos encontramos y la longitud cuánto al Este u Oeste. El origen de referencia para la latitud es el ecuador terrestre y para la longitud es un meridiano llamado IRM que pasa por el municipio de Greenwich (Londres).

Por ejemplo, **el instituto de Fortuna se encuentra a 38,184483º al Norte del ecuador y a 1,131864º al Oeste del IRM**. Y lo podéis comprobar **en maps.google.es escribiendo**, en vez de la dirección del instituto, simplemente lo siguiente:

38.184483, –1.131864

Daos cuenta que primero se escribe la latitud (con un punto para indicar los decimales) y después, tras una coma, la longitud. ¿Y el signo –? Bueno, pues **se utiliza el convenio de poner un signo – cuando se trata de latitud Sur o de longitud Oeste** (como en este caso), mientras que no se pone signo ni para el Norte ni para el Este.

¿A que ahora está más claro? Así que, si en vuestra ruta matemática por el mundo estáis, por ejemplo, en el lugar de coordenadas (30,–2), que podéis ver que se encuentra en Argelia, y os toca desplazaros 28º hacia el Este, pues entonces acabaréis volando al punto (30,26), porque –2+28=26, que se encuentra en el país de… ¡exacto!

Y... casi casi que **estas son las únicas cuentas que vamos a hacer en *La vuelta matemática al Mundo.*** (¿Estáis ya en Egipto?)

5.3. Jornadas: cuestiones sobre los textos

Presentamos a continuación ejemplos de posibles redacciones, dirigidas directamente a los participantes en el juego de *La vuelta matemática al Mundo*, que contienen cuestiones sobre una selección de los textos de matemáticas recogidos en este trabajo (en castellano). Las redacciones aquí propuestas, u otras adaptadas, podrían enviarse a los estudiantes a través del medio digital habitual de intercambio de información utilizado en la práctica docente (plataforma Moodle, blog, mensajería instantánea...). Una periodicidad semanal podría ser adecuada. Nos referimos a cada una de estas redacciones como las etapas o jornadas del viaje.

▪ Jornada 1ª

«*La vuelta matemática al Mundo* es una especie de curso-juego-concurso donde se propone la lectura de una serie de textos y una pregunta sobre ellos. Los textos son cortos y admiten lecturas a diferentes niveles, así que seguro que te resultan interesantes independientemente del odio extremo o solo moderado que profeses a las matemáticas.

Las bases y detalles del concurso (cómo realizar el viaje), así como las distintas jornadas que se llevarán a cabo se enviarán a través de email/blog/web... Aquí tienes la primera jornada. Lee el texto **"**Un Mundo en cuatricromía: el teorema de los cuatro colores**" (**§6**)** y contesta la siguiente cuestión.

Para colorear un mapa en dos dimensiones sin que haya dos países juntos con el mismo color…

a) …son siempre necesarios al menos 4 colores, incluso aunque el mapa sea muy sencillo.

b) …puede ser que si el mapa es sencillo podamos colorearlo con menos de 4 colores.

c) …se necesitan al menos 7 colores.

Si tu respuesta es la *a*) muévete 9º de latitud hacia el Este, si es la *b*) muévete 11º de latitud hacia el Norte, y si es la *c*) muévete 23º hacia el Sur. Apunta en qué coordenadas estás y en qué país para partir de ahí la próxima jornada de viaje.»

▪ Jornada 2ª

«No hay excusas para no viajar. Tras la primera jornada, habrás llegado a un país "clásico" del que debes partir en esta segunda jornada. Lee el texto "Ramanujan y la matrícula de un taxi" (§7) y contesta:

El número 1729 tiene una curiosa propiedad...

a) …es el único número que puede expresarse como la suma de dos cubos de dos formas diferentes.

b) …es el número del taxi en el que se montó Ramanujan para ir a visitar a su amigo Hardy que estaba ingresado en el hospital.

c) …es el menor número natural para el que existen 2 parejas distintas de números de forma que los dos números de cada pareja elevados al cubo y sumados nos dan ese número natural.

Si tu respuesta es la *a*) muévete 20º hacia el Norte, si es la *b*) muévete 40º hacia el Sur, y si es la *c*) muévete 15º hacia el Este. Apunta en qué coordenadas estás y en qué país para partir de ahí la próxima jornada de viaje.»

▪ Jornada 3ª

«Antes de empezar esta tercera jornada, debes estar en un país con una relación histórica de amor-odio con Europa. ¿Te cuadra? Pues ahí va la nueva cuestión, en este caso sobre el texto “Pares o nones: el triángulo de Sierpinski y el de Pascal” (§14).

En el triángulo de Pascal hay...

a) …una mayor proporción de números pares que de impares.

b) …una mayor proporción de números impares que de pares.

c) …la misma proporción de números pares que de impares.

Si tu respuesta es la *a*) muévete 9º hacia el Norte y 11º hacia el Oeste, si es la *b*) muévete 9º hacia el Sur y 11º hacia el Este, y si es la *c*) muévete 9º hacia el Este. Apunta en qué coordenadas estás y en qué país para partir de ahí la próxima jornada de viaje.»

▪ Jornada 4ª

«¿Qué tienen en común los números 6, 28 y 496?... Ya, aparte de que sean pares... Pues resulta que son ni más ni menos que los tres primeros “números perfectos”. ¿Y por qué son perfectos? Lo sabrás tras leer “Los ¿perfectos? números perfectos” (§9), y podrás además contestar a la siguiente cuestión.

De los números perfectos se sabe en la actualidad con total certeza que...

a) …hay infintos

b) …son todos pares

c) …el quinto número perfecto no tiene 5 dígitos

Si tu respuesta es la *a*) muévete 5º hacia el Norte y 5º hacia el Este, si es la *b*) muévete 10º hacia el Sur y 25º hacia el Este, y si es la *c*) muévete 5º hacia el Sur y 3 hacia el Oeste. Apunta en qué coordenadas estás y en qué país para partir de ahí la próxima jornada de viaje.»

■ Jornada 5ª

«Estamos ya en la 5ª Jornada de nuestro viaje matemático-iniciático. Lee el texto **"**El cifrado de Vernam y el cuaderno de un solo uso del Che Guevara**"** (§20) y trata de resolver la siguiente cuestión.

> Imagina que un amigo o amiga y tú queréis enviaros mensajes secretos, y para ello os habéis puesto de acuerdo en usar la misma conversión entre números y letras de la tabla que tenéis en el texto (la que empieza por ESTADOY). Para cifrar los mensajes tenéis un One-time pad con la clave 3122197345663987 (esta clave solo la sabéis los dos). Si tu amigo o amiga te manda el mensaje cifrado 6109326668509369, ¿a qué palabra corresponde?
>
> a) …MATEMÁTICAS
>
> b) …FELICIDADES
>
> c) …ORDENADORES

Si tu respuesta es la *a*) muévete 2º hacia el Norte y 13º hacia el Este, si es la *b*) muévete 2º hacia el Norte y 8º hacia el Oeste, y si es la *c*) muévete 2º hacia el Sur y 2º hacia el Oeste. Apunta en qué coordenadas estás y en qué país para partir de ahí la próxima jornada de viaje.

Si vas bien debes estar cerca del Danubio, rodeado de tranquilas tierras de cultivo... no parece un mal sitio para acampar y descansar un rato.»

■ Jornada 6ª

«Ya está aquí de vuelta la vuelta... *La vuelta matemática al Mundo*. Tras cinco afanosas singladuras, es el momento de comprobar que vamos bien encaminados a puerto. Nuevos viajes nos acercarán a nuestro objetivo final de circunnavegar el Globo. Después de muchos avatares en estas cinco jornadas, que suponen la mitad del recorrido, estamos detenidos en Hungría, más concretamente a 47º Norte y 19º Este. ¿Vas bien? Recuerda que, para completar el viaje, debes entregar al final la tabla con todos los países y coordenadas por los que has pasado. Nos quedan otras cinco jornadas más de viaje y habremos llegado al destino, aunque el destino es el propio camino...

Y hablando de caminos, ¿te has fijado en esas torres metálicas de la luz que se ven en los viajes en coche o en tren en medio de los campos? Seguro que, tras repasar el texto **"**Triángulos en torres eléctricas**"** (§10)**,** los ves de manera más matemática a partir de ahora. Lee primero el texto y luego contesta.

La afirmación correcta es:

> *a) Las estructuras triangulares son las más estables para ciertas construcciones metálicas, como, por ejemplo, torres eléctricas o grúas.*
>
> *b) Cauchy estudió los polígonos "rígidos" a principios del siglo pasado.*
>
> *c) Las torres eléctricas de alta tensión suelen formarse con estructuras metálicas rectangulares.*

Si tu respuesta es la a) muévete 10º hacia el Norte y 20º hacia el Este, si es la b) muévete 5º hacia el Este, y si es la c) muévete 10º hacia el Este. Apunta en qué coordenadas estás y en qué país para partir de ahí la próxima jornada de viaje.»

Jornada 7ª

«Querido viajero:

Si quieres saber la manera más VIOLENTA de calcular el número pi (sí, ese que empieza por 3,14…), échale un vistazo al texto "Calculando el número π a cañonazos" (§18). Ánimo, que ya quedan pocas jornadas de *La vuelta matemática al Mundo*.

En un estanque circular inscrito en un cuadrado al que disparamos cañonazos sin ninguna puntería...

a) …caerán más bolas de cañón dentro del agua que fuera.

b) …cuantas más bolas de cañón tiremos, más probable será que, al hacer las cuentas correctas, nos dé un número más cercano al valor real de π.

c) ...la división entre el número de bolas que caen al agua y el número de bolas lanzadas en total nos dará el número π.

Si tu respuesta es la *a*) muévete 8º hacia el Sur y 36º hacia el Este, si es la *b*) muévete 13º hacia el Sur y 49º hacia el Este, y si es la *c*) muévete 12º hacia el Norte y 13º hacia el Oeste. Apunta en qué coordenadas estás y en qué país para partir de ahí la próxima jornada de viaje.»

Jornada 8ª

«¿Piensas que sería mucha casualidad que en un instituto con 60 profesores hubiera dos de ellos que cumplieran años el mismo día? ¿Sí? Pues en la nueva jornada de *La vuelta matemática al Mundo* vas a ver que no tendría nada de rareza, de hecho lo más probable es que ocurra así. ¿Que ya te lo esperabas porque 60 personas son muchas? Bueno, pues entonces a lo mejor sí te sorprendan los números: ¡la probabilidad de que en un grupo de 60 personas haya dos (o incluso más) con la misma fecha de cumpleaños es superior al 99,4 por ciento!

Y si tampoco te sorprende ese valor de casi el 100%, entonces tendrás que esperar otra semana para ver si en la próxima jornada hay más sorpresas. Lee el texto de "El sorprendente caso del problema del cumpleaños" (§4) y contesta

En una clase de 25 alumnos, lo más probable es que…

a) …no coincida ningún cumpleaños.

b) …al menos 5 alumnos hayan nacido el mismo día.

c) …al menos 2 alumnos cumplan años el mismo día.

Si tu respuesta es la *a*) muévete 26º hacia el Norte y 189º hacia el Oeste, si es la *b*) muévete 10º hacia el Norte y 189º hacia el Oeste, y si es la *c*) muévete 23º hacia el Sur y 189º hacia el Oeste. Apunta en qué coordenadas estás y en qué país para partir de ahí la próxima jornada de viaje.»

Jornada 9ª

«Ya está aquí la penúltima jornada de *La vuelta matemática al Mundo*, que va camino de convertirse en *trending topic*. No es para menos, porque contiene una explicación dirigida a todos los públicos de uno de los seis problemas más difíciles de las matemáticas. Es el llamado problema "P versus NP" (§17), que nadie ha resuelto todavía. El instituto Clay de Cambridge premia con un millón de dólares al que lo consiga. Lee el texto y elige la opción correcta.

A día de hoy, se sabe con certeza que …

a) …P = NP

b) …todos los problemas P son también NP

c) …todos los problemas NP son también P

Si tu respuesta es la *a*) muévete 25º hacia el Este, si es la *b*) muévete 10º hacia el Norte, y si es la *c*) muévete 30º hacia el Norte. Apunta en qué coordenadas estás y en qué país para partir de ahí la próxima jornada de viaje.»

Jornada 10ª

«Compañeros y compañeras de viaje (virtual):

Ya está lista la última jornada de *La vuelta matemática al Mundo*. Lee el texto "Paul Erdös y su número" (§5) y contesta.

La opción correcta es:

a) Un matemático que ha colaborado directamente con Paul Erdös tiene "Erdös 1".

b) Paul Erdös tiene "Erdös 1".

c) Por colaborar con un "Erdös 5" se obtiene un número de Erdös 4.

Si tu respuesta es la *a*) muévete 7º hacia el Norte y 100º hacia el Este, si es la *b*) muévete 15º hacia el Norte y 105º hacia el Este, y si es la *c*) muévete 19º hacia el Norte y 111º hacia el Este. Apunta en qué coordenadas estás y completa la tabla de paises. ¡Enhorabuena por esta vuelta al mundo!

Y al fin en casa de nuevo. Hemos terminado el viaje. Un viaje virtual, pero también espacial, porque cada vez que hacemos clic para acceder a Internet en busca de información, millones de bits van de nuestro ordenador o móvil o tablet hasta la otra parte del mundo. Esos bits (que no son más que ceros y unos) dando saltos entre California, Murcia o Beijing, de servidor en servidor como locos viajeros del espacio y del tiempo, son los verdaderos protagonistas de *La vuelta matemática al Mundo*: ellos sí que han viajado de verdad.

¿Y nosotros? Bueno, nosotros hemos sido los "lanzadores de bits" que persiguiendo el conocimiento hemos conseguido viajar virtualmente de Grecia a Turquía, de Turquía a Ucrania, de Ucrania a Rumanía, de Rumanía a Hungría, de Hungría a... ¡Alto!, los 5 países que faltan no te los puedo decir, espero tu respuesta antes.»

5.4. Tablas de coordenadas y países

COORDENADAS DE GOOGLE MAPS (LATITUD, LONGITUD)	PAÍS
30, -2	ARGELIA
30, 26	EGIPTO

JORNADA	COORDENADAS DE GOOGLE MAPS (LATITUD, LONGITUD)	PAÍS
–	30, -2	ARGELIA
–	30, 26	EGIPTO
1	41, 26	GRECIA
2	41, 41	TURQUÍA
3	50, 30	UCRANIA
4	45, 27	RUMANÍA
5	47, 19	HUNGRÍA
6	57, 39	RUSIA
7	44, 88	CHINA
8	21, -101	MÉXICO
9	31, -101	EEUU
10	38, -1	ESPAÑA

6. CONSIDERACIONES FINALES

En este trabajo hemos recopilado una serie de textos de matemáticas divulgativas tanto en castellano como en inglés. Son artículos breves que adquieren un enfoque competencial en el marco del proceso de enseñanza-aprendizaje propio de una clase de educación secundaria. Pero el interés de Las otras matemáticas (textos para todos los públicos) va más allá. La propuesta de La vuelta matemática al Mundo constituye una aplicación directa al aula, fácilmente reproducible y exportable a otros centros de enseñanza, con sus pertinentes adaptaciones al entorno y contextos específicos.

Por ello, con el objetivo de permitir una aplicación directa del juego La vuelta matemática al Mundo en otros institutos de secundaria, hemos recopilado y ordenado las diferentes etapas de este viaje matemático, que fue llevado a cabo originalmente por el autor en su acción docente en el IES de Fortuna. Invitamos aquí a jugar a cualquier viajero con ganas de aprender y divertirse, a través de esta recopilación que incluye las instrucciones del juego, las 10 jornadas de las que consta el juego, las tablas que el viajero debe ir rellenando con las coordenadas geográficas de los países que atraviesa y las soluciones finales pormenorizadas.

En cualquier caso, la idea de este juego es fácilmente generalizable con la preparación de nuevas preguntas (jornadas de viaje) a partir de artículos y posts que pueden obtenerse de distintos blogs y, por consiguiente, su aplicabilidad a distintos niveles de enseñanza y de alumnado es grande, e incluso pensando en otras materias más allá de las matemáticas.

La utilización de un blog y de la web del centro de enseñanza como hilos vertebradores de este proyecto es un claro ejemplo del uso de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) como recurso educativo empleado desde una perspectiva constructivista, permitiendo la realización de actividades de diferentes dificultades en un juego dinámico, participativo e interactivo en el que se van alcanzado etapas.

Más aún, la dinámica de juegos en contextos no lúdicos y con fines educativos (lo que se ha dado en llamar gamificación) ha demostrado presentar importantes ventajas en el desarrollo cognitivo, la adquisición de aptitudes y la motivación de los estudiantes.

Además, el espíritu de La vuelta matemática al Mundo como concurso pensado para alumnos, padres y profesores es claramente integrador e invita al intercambio de información entre distintos miembros de la comunidad educativa, en el ámbito de Internet y las TIC, en un intento de avanzar en el conectivismo cada vez más presente en la sociedad.

Por todo ello, la idea de La vuelta matemática al Mundo es suficientemente generalizable para profundizar más en la aplicación de juegos educativos en un contexto conectivista favorecedor de aprendizajes significativos.

Al margen de la propuesta didáctica concreta de este juego-concurso, los textos aquí presentados pueden verse como materia prima para la construcción de otras muchas experiencias de aula: murales/pósters que amplíen o resuman los contenidos de ellos, trabajos colaborativos con exposiciones orales sobre los textos, búsqueda de información que los complementen y elaboración de un blog colaborativo, propuesta de problemas matemáticos a partir de ellos, formulación de nuevas preguntas sobre los textos, juegos tipo Trivial...

Esperamos, en definitiva, que este trabajo de Las otras matemáticas sea, verdaderamente, un compendio de textos para todos los públicos, abierto a su utilización en la práctica docente y a contribuir a la motivación de una de las ramas más bellas del conocimiento humano.

7. REFERENCIAS

Para cada uno de los textos matemáticos de este libro, detallamos a continuación la bibliografía utilizada, las webs de Internet donde puede obtenerse información complementaria (enlaces comprobados a fecha 16 de marzo de 2019) y las fuentes de las imágenes que aparecen, que, si no pertenecen al dominio público o permiten su reutilización, son del autor o de terceros que han dado su consentimiento para la publicación de las mismas.

TEXTOS EN CASTELLANO

1. Adiós intuición, hola matemática

IMÁGENES:
Fotografía e ilustración del autor

2. Halley: un cometa de un hombre perseverante

BIBLIOGRAFÍA:
Eves, H. W. *In mathematical circles.* Prindle, Weber & Schmidt, Inc, 1969.

EN LA WEB:
https://es.wikipedia.org/wiki/Cometa_Halley

https://en.wikipedia.org/wiki/Edmond_Halley

3. Pero... ¿qué es eso de una proposición?

EN LA WEB:

https://es.wikipedia.org/wiki/Demostraci%C3%B3n_matem%C3%A1tica

https://es.wikipedia.org/wiki/Demostraci%C3%B3n_por_casos

https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_los_cuatro_colores

IMÁGENES:
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Valladolid_Rodin_expo_2008_Pensador_03_ni.JPG

4. El sorprendente caso del problema del cumpleaños

EN LA WEB:

https://en.wikipedia.org/wiki/Birthday_problem

http://www.bbc.com/news/magazine-27835311

https://es.wikipedia.org/wiki/Paradoja_del_cumplea%C3%B1os

IMÁGENES:

Ilustración de Elena Vicente Herranz

5. Paul Erdös y su número

EN LA WEB:

http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_de_Erd%C5%91s

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Erdos.html

http://wordplay.blogs.nytimes.com/2013/03/25/erdos/?_r=0

http://www.oakland.edu/enp/

6. Un mundo en cuatricromía: el teorema de los cuatro colores

BIBLIOGRAFÍA:

Boyer, Cl B. and Merzbach, U. *A history of mathematics, 3rd ed.* John Wiley & Sons, Inc, 2011.

EN LA WEB:

https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_los_cuatro_colores

http://mathworld.wolfram.com/ChromaticNumber.html

http://mathworld.wolfram.com/TorusColoring.html

http://people.math.gatech.edu/~thomas/FC/fourcolor.html

IMÁGENES:

https://commons.wikimedia.org/wiki/File%3AFour_color_world_map.svg

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Projection_color_torus.png

7. Ramanujan y la matrícula de un taxi

EN LA WEB:

https://en.wikipedia.org/wiki/Srinivasa_Ramanujan

https://www.gaussianos.com/srinivasa-ramanujan-el-enigmatico-genio-matematico-indio/

IMÁGENES:

Ilustración de María José Contreras Baeza.

8. La hipótesis de Riemann

BIBLIOGRAFÍA:

Devlin, K. *The Millenium Problems*. Basic Books, 2002.

Boyer, C. B. *Historia de la matemática.* Alianza Editorial, 1986.

EN LA WEB:

https://plus.maths.org/content/whirlpool-numbers/

http://empslocal.ex.ac.uk/people/staff/mrwatkin/zeta/encoding.htm

http://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_zeta_function/

http://mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunction.html/

http://mathground.net/riemann-hypothesis/ (no disponible)

9. Los ¿perfectos? números perfectos

BIBLIOGRAFÍA:

Boyer, C. B. *Historia de la matemática.* Alianza Editorial, 1986.

EN LA WEB:

http://mathworld.wolfram.com/PerfectNumber.html

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Perfect_numbers.html

http://mathforum.org/library/drmath/view/51516.html

10. Triángulos en torres eléctricas

BIBLIOGRAFÍA:

Barrow, J. D. *El salto del tigre: las matemáticas de la vida cotidiana*. Drakontos, 2009.

IMÁGENES:
https://es.m.wikipedia.org/wiki/Archivo:Viejo_puente_Bell_Ville.jpg

11. Euclides, sus *Elementos* y la infinitud de los números primos

BIBLIOGRAFÍA:

Dunham, W. *Journey through genius: the great theorems of mathematics*. John Wiley and sons, 1990.

EN LA WEB:

http://es.wikipedia.org/wiki/Euclides

https://es.wikipedia.org/wiki/Reductio_ad_absurdum

http://mathground.net/euclid/ (no disponible)

IMÁGENES:

https://en.wikipedia.org/wiki/Euclid#/media/File:EuclidStatueOxford.jpg

12. Números agujeros negros

EN LA WEB:

http://gaussianos.com/una-curiosa-propiedad-del-123/

http://jwilder.edublogs.org/2013/02/18/anotherblackholenumber/

http://en.wikipedia.org/wiki/Black_hole

IMÁGENES:

Ilustración de María José Contreras Baeza

13. La ecuación cúbica: de traca

BIBLIOGRAFÍA:

Boyer, C. B. and Merzbach, U. *A history of mathematics, 3rd ed.* John Wiley & Sons, Inc, 2011.

Dunham, W. *Journey through genius: the great theorems of mathematics*. John Wiley and sons, 1990.

EN LA WEB:

https://es.wikipedia.org/wiki/Gerolamo_Cardano

http://www.ugr.es/~eaznar/ferro.htm

http://www.ugr.es/~eaznar/tartaglia.htm

https://es.wikipedia.org/wiki/Lodovico_Ferrari http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Ferrari.html

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Tartaglia_v_Cardan.html#s1

IMÁGENES:
Ilustración del pergamino de María Ángeles Cano Sánchez

14. Pares o nones: El triángulo de Sierpinski y el de Pascal

BIBLIOGRAFÍA:

Stewart, I. *Ingeniosos encuentros entre juegos y matemáticas.* RBA, 2007.

EN LA WEB:

https://en.wikipedia.org/wiki/Sierpinski_triangle

https://en.wikipedia.org/wiki/Pascal%27s_triangle

15. Conjuntos de Julia

EN LA WEB:

https://danpearcymaths.wordpress.com/2013/05/30/introduction-to-fractal-geometry-2-julia-sets-and-the-mandelbrot-set/

https://ibmathsresources.com/2015/03/29/mandelbrot-and-julia-sets-pictures-of-infinity/

https://plus.maths.org/content/unveiling-mandelbrot-set

http://en.wikipedia.org/wiki/Julia_set

16. Pi: ¿un número simplemente normal?

BIBLIOGRAFÍA:

Feynman, R. P., Leighton, R. (contributor), and Hutchings, E. (editor). *Surely You're Joking, Mr. Feynman!: Adventures of a Curious Character.* W W Norton, 1985.

EN LA WEB:

http://mathworld.wolfram.com/FeynmanPoint.html

https://www.huffingtonpost.com/david-h-bailey/are-the-digits-of-pi-random_b_3085725.html

http://mathworld.wolfram.com/NormalNumber.html

https://math.stackexchange.com/questions/216343/does-pi-contain-all-possible-number-combinations

http://www.dr-mikes-math-games-for-kids.com/your-name-in-pi.html

https://es.wikipedia.org/wiki/Número_π#Cuestiones_abiertas_sobre_.CF.80

https://luisvolonte.blogspot.com/2017/03/la-biblioteca-universal-por-kurd.html

IMÁGENES:
Dennis Wilkinson (https://flic.kr/p/9qfzJq)

17. P versus NP

BIBLIOGRAFÍA:

Devlin, K. *The Millennium Problems*. Basic Books, 2002.

EN LA WEB:

https://en.wikipedia.org/wiki/P_versus_NP_problem

https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A1quina_de_Turing#M.C3.A1quina_de_Turing_determinista_y_no_determinista

IMÁGENES:

Ilustraciones y fotografías del autor

18. Calculando el número π a cañonazos

REFERENCIAS:

Dewdney, A. K. Scientific American Vol. 252, Number 4, April, 1985.

EN LA WEB:

https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_%CF%80

http://gaussianos.com/algoritmos-para-el-calculo-de-pi/

http://mathworld.wolfram.com/BuffonsNeedleProblem.html

https://en.wikipedia.org/wiki/Buffon%27s_needle

https://en.wikipedia.org/wiki/Monte_Carlo_method

IMÁGENES:

Ilustración del cañón de María José Contreras Baeza.

19. ¿Cuánto mide un romanescu?

BIBLIOGRAFÍA:

Mandelbrot, B. B. (1967). How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension. *Science, New Series, Vol. 156, No. 3775*, pp. 636-638.

EN LA WEB:

http://users.math.yale.edu/~bbm3/web_pdfs/howLongIsTheCoastOfBritain.pdf

https://ibmathsresources.com/2015/09/17/the-coastline-paradox-and-fractional-dimensions/

https://en.wikipedia.org/wiki/Coastline_paradox

https://es.wikipedia.org/wiki/%C2%BFCu%C3%A1nto_mide_la_costa_de_Gran_Breta%C3%B1a%3F

https://en.wikipedia.org/wiki/Lewis_Fry_Richardson#Research_on_the_length_of_coastlines_and_borders

IMÁGENES:

Fotografías y montajes del autor

20. El cifrado de Vernam y el cuaderno de un solo uso del Che Guevara

BIBLIOGRAFÍA:

James, D. *Che Guevara: A biography.* Stein & Day, 1969.

Bauer, C. P. *Secret History: The Story of Cryptology*. Taylor and Francis Group, LLC, 2013.

Hey, T. and Pápay, G. *The Computing Universe: A journey through revolution*. Cambridge University Press. 2015

Shannon, C. E. *Communication Theory of Secrecy Systems*. Bell System Technical Journal (USA: AT&T Corporation) 28 (4): 656–715 (1949)

EN LA WEB:

https://www.nodo50.org/cubasigloXXI/pensamiento/CheDiario_280210.pdf

http://www.caslab.cl/che.php (contiene errores de decodificación)

https://es.wikipedia.org/wiki/Libreta_de_un_solo_uso

IMÁGENES:

Fotomontaje primero del autor

21. Sándwich para dos

EN LA WEB:

https://seriousmathsandunicorns.wordpress.com/2015/11/09/the-ham-sandwich-theorem/

http://gaussianos.com/el-teorema-del-sandwich-de-jamon/

https://www.theguardian.com/education/2011/may/09/ham-sandwich-maths-research

https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_del_s%C3%A1ndwich_de_jam%C3%B3n

https://www.math.hmc.edu/funfacts/ffiles/20001.7.shtml

IMÁGENES:
Fotografía del autor

22. Los fractales: otra dimensión

EN LA WEB:

http://www.learner.org/courses/mathilluminated/units/5/textbook/06.php

https://en.wikipedia.org/wiki/Fractal_dimension

https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_fractals_by_Hausdorff_dimension

https://es.wikipedia.org/wiki/Anexo:Fractales_por_dimensi%C3%B3n_de_Hausdorff

çhttps://commons.wikimedia.org/wiki/File:Koch_curve.svg

http://natureofcode.com/book/chapter-8-fractals

23. El número de Dios del demoniaco cubo de Rubik

EN LA WEB:
https://www.youtube.com/watch?v=AOMQxLrCI7A&sns=em

https://es.wikipedia.org/wiki/Cubo_de_Rubik

https://whitehathacking.wordpress.com/2013/05/23/teoria-de-grupos-y-el-cubo-de-rubik/

http://geometer.org/rubik/group.pdf

https://en.wikipedia.org/wiki/Rubik%27s_Cube_group

https://ruwix.com/the-rubiks-cube/gods-number/

https://ruwix.com/online-rubiks-cube-solver-program/

http://www.cube20.org/

https://commons.wikimedia.org/wiki/File%3ARubik's_cube.svg

https://es.wikipedia.org/wiki/V-Cube_6#/media/File:V-Cube_6_small.jpg

IMÁGENES
Fotomontaje del autor

24. Una nueva geometría rara: de Euclides a Riemann

BIBLIOGRAFÍA:

Boyer, C. B. and Merzbach, U. *A history of mathematics.* 3rd ed., John Wiley & Sons, Inc, 2011.

Dunham, W. *Journey through genius: the great theorems of mathematics.* Penguin books, 1991.

EN LA WEB:

https://plus.maths.org/content/mathematical-mysteries-strange-geometries

https://es.wikipedia.org/wiki/Postulados_de_Euclides

https://es.wikipedia.org/wiki/Quinto_postulado_de_Euclides

http://platea.pntic.mec.es/%7Eaperez4/html/sigloxix/Carl%20Friedrich%20Gauss.htm

https://en.wikipedia.org/wiki/Elliptic_geometry

IMÁGENES:

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Triangles_%28spherical_geometry%29.jpg#/media/File:Triangles_%28spherical_geometry%29.jpg

25. La frecuencia de la música

EN LA WEB:

https://newt.phys.unsw.edu.au/jw/notes.html

https://newt.phys.unsw.edu.au/music/guitar/guitarintro.html

http://www.animations.physics.unsw.edu.au/jw/frequency-pitch-sound.htm

http://www.animations.physics.unsw.edu.au/jw/Tartini-tones-temperament.html

http://passyworldofmathematics.com/guitar-mathematics/

https://es.wikipedia.org/wiki/Guitarra#/media/File:Classical_Guitar_two_views.jpg

http://jwilson.coe.uga.edu/EMAT6450/Class%20Projects/Hornbeck/Math,%20Music,%20&%20Guitar.pdf

IMÁGENES:

Ilustración de Lola Feito Cano

TEXTOS EN INGLÉS

26. Millennium Prize Problems or how to get a million dollars

BIBLIOGRAFÍA:

Devlin, K. *The Millennium Problems*. Basic Books, 2002.

EN LA WEB:

http://www.mathunion.org/general/prizes/fields/details

http://en.wikipedia.org/wiki/Fields_Medal

https://naukas.com/2011/12/26/creatividad-cientifica-y-edad-deja-la-teoria-para-los-mas-jovenes/

http://global.britannica.com/EBchecked/topic/643734/Andrew-John-Wiles

http://simonsingh.net/books/fermats-last-theorem/who-is-andrew-wiles/

https://en.wikipedia.org/wiki/Millennium_Prize_Problems

https://en.wikipedia.org/wiki/Grigori_Perelman#The_Fields_Medal_and_Millennium

https://www.theguardian.com/books/2011/mar/27/perfect-rigour-grigori-perelman-review

https://hackernoon.com/institutional-investors-want-to-get-in-on-cryptocurrencies-but-theyre-stuck-on-the-sidelines-26e05f9e3725

IMÁGENES:

https://en.wikipedia.org/wiki/Fields_Medal#/media/File:FieldsMedalFront.jpg

https://en.wikipedia.org/wiki/Fields_Medal#/media/File:FieldsMedalBack.jpg

27. Cheryl's birthday problem goes viral

EN LA WEB:
http://gaussianos.com/explicacion-del-problema-del-cumpleanos-de-cheryl/

https://www.nytimes.com/2015/04/15/science/answer-to-the-singapore-math-problem-cheryl-birthday.html

28. Pixels, bits, and steganography

EN LA WEB:

https://en.wikipedia.org/wiki/Pixelhttps://en.wikipedia.org/wiki/Pixel

https://www.webopedia.com/TERM/P/pixel.html

https://en.wikipedia.org/wiki/Steganography

https://es.wikipedia.org/wiki/Esteganograf%C3%ADa#Inserci.C3.B3n_en_el_bit_menos_significativo

IMÁGENES:
Fotografía y montaje del autor

29. Goldbach's conjecture

EN LA WEB:

http://en.wikipedia.org/wiki/Goldbach%27s_conjecture

IMÁGENES:
https://en.wikipedia.org/wiki/Goldbach%27s_conjecture#/media/File:Letter_Goldbach-Euler.jpg

30. Parrondo's paradox: Two bad things becoming a good one

BIBLIOGRAFÍA:

Harmer, G. P. & Abbott, D. Game theory: Losing strategies can win by Parrondo's paradox. Nature 402, 864, 1999

M. Feito. PhD thesis, 2009, http://eprints.ucm.es/10680/1/T31799.pdf

EN LA WEB:
https://en.wikipedia.org/wiki/Parrondo%27s_paradox

http://www.nature.com/news/1999/991223/full/news991223-13.html

http://elpais.com/diario/2000/01/05/sociedad/947026815_850215.html

IMÁGENES:
Fotografía del autor

31. Focus on Math: The ultimate guide to f-numbers in digital cameras

EN LA WEB:

https://en.wikipedia.org/wiki/F-number

https://en.wikipedia.org/wiki/Focal_length

https://en.wikipedia.org/wiki/Entrance_pupil

https://en.wikipedia.org/wiki/Diaphragm_(optics)

IMÁGENES:
Fotografías del autor

32. Borges, his mother, and a pair of hands with 60 fingers

EN LA WEB:

https://es.wikipedia.org/wiki/Jorge_Luis_Borges

http://elpais.com/diario/1999/08/24/cultura/935445602_850215.html

IMÁGENES:
Fotomontaje del autor
https://es.wikipedia.org/wiki/Jorge_Luis_Borges#/media/File:Jorge_Luis_Borges_Hotel.jpg

33. Twin primes: How many

EN LA WEB:

https://en.wikipedia.org/wiki/Twin_prime

http://www.macfound.org/fellows/927/

http://mathground.net/another-unsolved-problem-polignacs-conjecture/ (not available)

https://plus.maths.org/content/find-gap

IMÁGENES:
Ilustración de María José Contreras Baeza

34. Archimedes: The first giant of mathematics

BIBLIOGRAFÍA:

Bendick, J. *Archimedes and the door of science.* Bethelhem books, 1995.

Dunham, W. *Journey through genius: the great theorems of mathematics.* Penguin books, 1991.

EN LA WEB:

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Archimedes.html

http://www.math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/Death/DeathIllus.html

35. I love polydivisible numbers

EN LA WEB:

https://en.wikipedia.org/wiki/Polydivisible_number

http://jwilson.coe.uga.edu/emt725/Class/Lanier/Nine.Digit/nine.html

https://en.wikipedia.org/wiki/Divisibility_rule

IMÁGENES:
Ilustración y gráficas del autor

36. Euler: A prolific mathematician

BIBLIOGRAFÍA:

Eves, H. W. *In mathematical circles.* Prindle, Weber & Schmidt, Inc, 1969.

EN LA WEB:

http://en.wikipedia.org/wiki/Euler%27s_identity

http://gaussianos.com/las-aportaciones-de-euler-a-la-notacion-matematica/

IMÁGENES:
Ilustración de María José Contreras Baeza

37. Hailstone Numbers

EN LA WEB:

http://ibmathsresources.com/2015/01/30/hailstone-numbers/

http://mathworld.wolfram.com/HailstoneNumber.html/

https://en.wikipedia.org/wiki/Collatz_conjecture/

IMÁGENES:
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hailstones_UK.jpg

38. The returning explorer revisited

BIBLIOGRAFÍA:

Gardner, M. *Hexaflexagons and other mathematical diversions.* The University of Chicago Press, 1988.

EN LA WEB:

https://en.wikipedia.org/wiki/Radian

https://platinithierry.wordpress.com/2015/04/30/martin-gardner-problem-1-the-returning-explorer/

IMÁGENES:
Fotomontaje de María Ángeles Cano Sánchez

Las Otras Matemáticas
(Textos para todos los públicos)

Las otras matemáticas está enfocada a estudiantes de secundaria, pero es una obra para todos los públicos: su objetivo es mostrar la cara más amena y apasionante de las ciencias exactas. A través de textos breves divulgativos, en español e inglés, se recorren historias, anécdotas, teoremas y cuestiones abiertas a día de hoy. Esos textos se van entrelazando de la mano de grandes matemáticos, como Euclides, Arquímedes, Euler o Gauss, aunque aparecen también otros nombres más alejados de la ciencia, como Borges o Che Guevara. Un conocido científico que traduce un texto directamente del árabe pese a no tener ni idea del idioma, un prolífico matemático sin casa al que dan cobijo colegas de todo el mundo, un genio que renuncia a un millón de dólares tras realizar la demostración más importante del siglo XXI, el esquivo problema del viajante de comercio o la complejísima hipótesis de Riemann son tan solo algunos de los temas tratados en esta obra, que culmina con un juego final en el que los lectores se arriesgarán a salir con una visión apasionada de las matemáticas y sus historias.

www.educarm.es/publicaciones

9 788409 269198

Región de Murcia