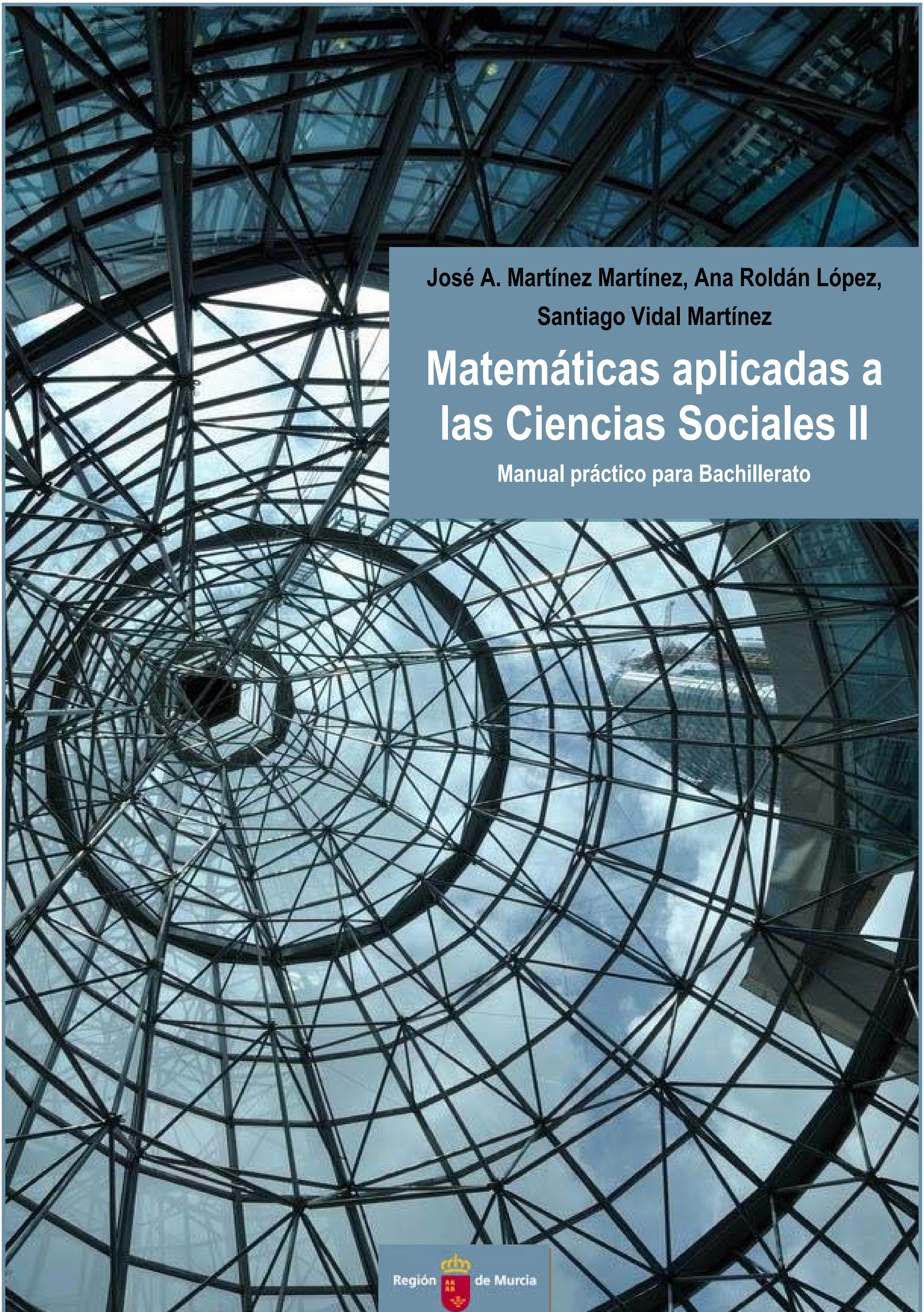


José A. Martínez Martínez, Ana Roldán López,
Santiago Vidal Martínez

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II

Manual práctico para Bachillerato

Región de Murcia

José Antonio Martínez Martínez, Ana Roldán López y Santiago Vidal Martínez

Los autores de esta obra son profesores de Matemáticas en Educación Secundaria. Han desarrollado su carrera docente en varios centros, en uno de los cuales coincidieron y gestaron la idea de elaborar una serie de unidades didácticas que, finalmente ha propiciado la materialización de este necesario manual, dirigido tanto a docentes como al alumnado.

Publicaciones recientes de la Consejería de Educación, Formación y Empleo

www.educarm.es/publicaciones

- Manual interactivo de seguridad y manejo de maquinaria en jardinería [CD] / Blas Martín López y Fernando Sánchez Sánchez.
- Cahier d´activities Sciences de la Nature/ José Quiñonero Méndez.
- Respuestas flexibles en contextos educativos diversos: actas del I Congreso Nacional de Dificultades Específicas de Aprendizaje y el VII Congreso Nacional de Tecnología Educativa y Atención a la Diversidad / Juan Navarro, Mª Teresa Fernández, Fco. Javier Soto y Francisco Tortosa (coords.)
- Familia y Educación: guía práctica para escuelas de Padres y Madres eficaces / Mª Elena de Jorge Martínez, Isabel Ruiz García, Pilar Sánchez Álvarez.
- XXV Certamen Jóvenes Investigadores 2012. Premios Región de Murcia
- Ajedrez para la Enseñanza Primaria / Sergio A. Vicente Martínez.

Publicaciones accesibles sólo en línea:

- Construyendo: VII Jornadas Regionales de Educación Infantil / Jornadas Regionales de Educación Infantil (6ª, 2012, Águilas).
- El patrimonio como recurso didáctico en la Educación Secundaria y Bachillerato / Carlos Iluminado Sánchez Hidalgo.
- Guía GESCALI. Gestión de Calidad para Centros Educativos/ Sara García García
- Programa Educativo “Rutas tecnológicas”/ Alejandro Pérez Pastor, dir; María Dolores Gómez López, co-

José Antonio Martínez Martínez, Ana Roldán López,
Santiago Vidal Martínez

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II

Manual práctico para Bachillerato

Región de Murcia
Consejería de Educación, Formación y Empleo

Región de Murcia
Consejería de Educación, Formación y Empleo

Edita:

Consejería de Educación, Formación y Empleo
Secretaría General. Servicio de Publicaciones y Estadística

www.educarm.es/publicaciones

I.S.B.N.: 978-84-659-7371-6

1ª Edición, junio 2013

Las matemáticas son una gimnasia del
espíritu y una preparación para la filosofía.

Isócrates

Agradecimientos

Queremos agradecer la elaboración de este libro a Maite Ayala por su incansable ayuda, a Francisco Javier Botella Soler por su colaboración desinteresada, a Aitana, a Josefa y Santiago, a Verónica, Julia y Álvaro, que dan sentido a nuestra vida y fuerzas para seguir luchando todos los días.

Prólogo

Todos los profesores de Bachillerato estamos de acuerdo en que las Pruebas de Acceso a la Universidad (PAU), se convierten en una gran experiencia para el alumnado, coincidiendo además con uno de los periodos más importantes y críticos del desarrollo personal: adolescencia y juventud. Como profesores de matemáticas, somos conscientes de la dura prueba a la que se someten, con la particularidad de que esta asignatura provoca un estado de ansiedad, que a menudo puede ocasionar malos resultados. Preocupados por ello, decidimos poner en práctica cómo crear un libro de texto de fácil entendimiento, con el contenido básico de segundo de bachillerato, pero que permita que durante todo el curso los alumnos se familiaricen continuamente con las PAU y se les permita una visión positiva de lo aprendido. Evaluamos nuestra experiencia y vimos lo difícil que resultaba proporcionar los contenidos de la materia y su preparación para la prueba selectiva, pues la mayoría de las veces la preparación para selectividad se convertía en "clases particulares voluntarias" para resolver exámenes de otros años. Por regla general "no hay tiempo" para acabar con los contenidos mínimos en las sesiones para este curso. El hecho de acabar el curso antes, endurece la tarea a la hora de ayudar al alumno a preparar la prueba en condiciones óptimas. Como resultado de todas estas inquietudes y uniendo esfuerzo e ilusión nace este MANUAL, con el que se pretende unir curso-prueba selectiva, de una forma diferente y práctica, ofreciendo tanto al profesor como al alumnado, los conceptos básicos, unidos con los ejercicios de las pruebas selectivas de los últimos años en varias comunidades autónomas.

Hemos unido conceptos, procedimientos y actitudes mediante un método aclaratorio del concepto matemático en todo su fundamento, tal y como lo explicamos en clase, de forma que se convierta para el alumno en un manual útil de preparación para las pruebas, ofreciendo ejercicios selectivos resueltos, ejercicios de práctica de todas las unidades y por supuesto ejercicios propuestos con las soluciones para que el alumnado pueda comprobar lo aprendido. Pretendemos con este manual, que este último curso de bachillerato de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales, aporte al alumno una visión positiva de las matemáticas, potencie sus cualidades ante la asignatura y anime a la nueva etapa de sus vidas, que comenzará después de la prueba selectiva: la llegada a la Universidad o bien su debut en el mundo laboral. Esperamos, con ilusión, que nuestro esfuerzo aporte un grano de arena a la difícil tarea de la enseñanza de las Matemáticas y suavice la labor de nuestros compañeros.

Índice general

Capítulo 1

Sistemas de ecuaciones lineales

1.1. Introducción

Los sistemas de ecuaciones componen la herramienta básica para el estudio de las posiciones relativas en el plano y en el espacio. Aunque, si bien es cierto, dentro de las Ciencias Sociales, deberíamos prestar más atención a su tratamiento algebraico más que geométrico. Tengamos en cuenta que los sistemas de ecuaciones resuelven problemas relacionados con situaciones de la vida cotidiana, que tiene que ver con las Ciencias Sociales. Dicho lo cual, nos centraremos en la propia resolución de sistemas, dejando, un tanto al margen, su implicación geométrica.

Comenzaremos resolviendo sistemas de ecuaciones con dos incógnitas, mediante el método de reducción, lo que nos llevará al *método de Gauss* por generalización a más incógnitas. Es decir, el método de Gauss, no es más que el método de reducción, que estudiamos en 3º de ESO, para los sistemas de ecuaciones.

Recordemos pues cómo se resolvía un sistema de ecuaciones de con dos incógnitas, por el método de reducción.

1.2. Sistemas de Ecuaciones. Método de Gauss

El siguiente es un problema para resolver con dos incógnitas.

Ejemplo 1. *Dos amigos quedan para ir al cine, y como no saben si tendrán dinero suficiente, ponen todo el dinero que llevan encima de la mesa. Al observar el dinero, uno de los amigos le dice al otro: "¿te has dado cuenta que si me das un euro tendré el doble que tú, y que si yo te lo doy a ti, tendremos la misma cantidad?" ¿Cuánto dinero pone cada uno encima de la mesa?*

Solución: Llamemos $Amigo1$ al amigo que habla, y $Amigo2$ al otro. Sea x el dinero que pone $Amigo1$ e y lo que pone el $Amigo2$. Traduzcamos en ecuaciones lo que le dice el $Amigo1$ al $Amigo2$.

$$\begin{array}{l} Amigo1 \longrightarrow x \\ Amigo2 \longrightarrow y \end{array} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x+1 = 2(y-1) \\ x-1 = y+1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x-2y = -3 \\ x-y = 2 \end{array} \right.$$

Si llamamos E_1 a la primera ecuación y E_2 a la segunda, y realizamos $E_2 - E_1$, llegaremos a

$$(x-y=2)-(x-2y=-3) \Longrightarrow y=5$$

Sustituyendo en E_1 obtenemos el valor de x:

$$x = 2+y = 2+5 = 7$$

La solución es $x = 7$ e $y = 5$.

En los sistemas con más incógnitas, procederemos de una forma parecida, es lo que llamaremos *método de Gauss*. Veamos un ejemplo de lo que queremos decir.

Ejemplo 2. *Resuelve el sistema de ecuaciones:*

$$\left\{ \begin{array}{c} x+y+z=3 \\ x-2y+2z=1 \\ 2x+y+3z=6 \end{array} \right.$$

Solución: Si nos fijamos en el coeficiente de la x en la ecuación 1, nos damos cuenta de que, podemos realizar las operaciones $E_2 - E_1$ y $E_3 - 2E_1$. El sistema pasa a ser

$$\left\{ \begin{array}{c} x+y+z=3 \\ x-2y+2z=1 \\ 2x+y+3z=6 \end{array} \right. \xrightarrow[E_3-2E_1]{E_2-E_1} \left\{ \begin{array}{c} x+y+z=3 \\ -3y+z=-2 \\ -y+z=0 \end{array} \right. \xrightarrow{-3E_3+E_2} \left\{ \begin{array}{c} x+y+z=3 \\ -3y+z=-2 \\ -2z=-2 \end{array} \right.$$

Para pasar del segundo sistema al tercero, hemos realizado la operación $-3E_3 + E_2$, ya que de esta manera, conseguimos reducir la y de la tercera ecuación. De esta forma, conseguimos un sistema equivalente (mismas soluciones) al primero. En este último sistema:

de $E_3 \Longrightarrow -2z = -2 \Longrightarrow z = \dfrac{-2}{-2} \Longrightarrow \boxed{z=1}$

de $E_2 \Longrightarrow -3y+1 = -2 \Longrightarrow -3y = -3 \Longrightarrow y = \dfrac{-3}{-3} \Longrightarrow \boxed{y=1}$

de $E_1 \Longrightarrow x+1+1 = 3 \Longrightarrow \boxed{x=1}$

La solución del sistema es $x = 1,\ y = 1$ y $z = 1$.

En la resolución del sistema, sólo hemos hecho uso del los coeficientes de las incógnitas. Es decir, las operaciones entre ecuaciones, se trasladan a operaciones entre coeficientes y no entre incógnitas. Por ello, y para facilitar el proceso de resolución, introduciremos una herramienta, llamada matriz, que estudiaremos con más detalle en el siguiente tema, pero que podemos introducir ahora.

Definición 1. *Una matriz es un conjunto de números ordenados en filas y columnas de forma rectangular.*

Ejemplo 3. *La matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

es una matriz 3×4 *ya que tiene* 3 *filas y* 4 *columnas.*

La matriz anterior es la **matriz del sistema**

$$\left\{ \begin{array}{c} x + y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = 1 \\ 2x + y + 3z = 6 \end{array} \right.$$

.

En lo sucesivo, a la hora de realizar operaciones entre ecuaciones, trasladaremos éstas a la matriz del sistema.

El siguiente ejemplo ilustrará lo dicho.

Ejemplo 4. *Hallar las soluciones del siguiente sistema:*

$$\left\{ \begin{array}{c} x + y - z = 3 \\ 3x + 4y - z = 5 \\ x + 2y + 3z = -1 \end{array} \right.$$

Solución: La matriz del sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 3 \\ 3 & 4 & -1 & \vdots & 5 \\ 1 & 2 & 3 & \vdots & -1 \end{pmatrix}$$

Podemos realizar las operaciones directamente sobre las filas de la matriz.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 3 \\ 3 & 4 & -1 & \vdots & 5 \\ 1 & 2 & 3 & \vdots & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 - 3F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & -4 \\ 0 & 1 & 4 & \vdots & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & -4 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

$F_3 \Longrightarrow 2z = 0 \Longrightarrow z = \dfrac{0}{2} \Longrightarrow \boxed{z = 0}$

$F_2 \Longrightarrow y + 2z = -4 \Longrightarrow y + 2 \cdot 0 = -4 \Longrightarrow \boxed{y = -4}$

$F_1 \Longrightarrow x + (-4) - 0 = 3 \Longrightarrow \boxed{x = 7}$

1.3. Soluciones de un sistema

La matriz asociada a un sistema, siempre puede transformarse en una matriz escalonada. Ahora bien, puede ocurrir que, una vez escalonada, presente una de estas formas:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Sistema con **solución única** (**compatible determinado**). Basta con despejar en la F_3, $z = 1$ y sustituir en F_2 y después en F_1 .

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Sistema **sin solución** (**incompatible**). De F_3 obtenemos que $0z = 2 \Longrightarrow 0 = 2$. Ésto último representa una contradicción .

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{o} \quad \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En el primer caso, de F_3 podemos deducir que $0 = 0$. Esta afirmación, aunque verdadera, no proporciona nada. Sin embargo, de F_2, deducimos que $3y - 2z = 2$, y puesto que no conocemos el valor de z, debemos asignarle uno arbitrario. Sea $z = \lambda$, de F_2 sacamos que $3y = 2 + 2z \Longrightarrow 3y = 2 + 2\lambda \Longrightarrow y = \boxed{\frac{2+2\lambda}{3}}$.

De F_1 llegamos que $x = 1 + 2y - 3z \Longrightarrow x = 1 + 2 \cdot \left(\dfrac{2+2\lambda}{3}\right) - 3\lambda$
$\Longrightarrow y = \boxed{\frac{7-5\lambda}{3}}$

Para la segunda matriz, asignaremos valores $y = \lambda$ y $z = \mu$.

En ambos casos, diremos que estamos ante un **sistema compatible indeterminado**

Una vez comprendidos los ejemplos anteriores, podemos establecer la clasificación siguiente:

$$\textbf{Sistema}\begin{cases} \textbf{Compatible}\begin{cases} \textbf{Determinado} \\ \text{(Solución única)} \\[1em] \textbf{Indeterminado} \\ \text{(Infinitas soluciones)} \end{cases} \\[3em] \textbf{Incompatible} \\ \text{(Sin solución)} \end{cases}$$

* Para que un sistema de ecuaciones sea compatible determinado, es necesario (que aunque no suficiente) que, haya el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.
* Si en un sistema de ecuaciones, hay más ecuaciones que incógnitas, quiere decir que, de entre las ecuaciones hay una o varias redundantes. Dichas ecuaciones, operando por filas o columnas, desaparecerán

Ejercicio 1. *Resuelve los sistemas:*

$$a)\ \left\{\begin{array}{c} x+y+z=6 \\ x-y-z=-4 \\ 3x+y+z=8 \end{array}\right. \qquad b)\ \left\{\begin{array}{c} 3x-2y+z=1 \\ x+y-z=2 \\ 6x+y-2z=10 \end{array}\right.$$

Solución:
a) Operamos sobre matriz del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 1 & -1 & -1 & \vdots & -4 \\ 3 & 1 & 1 & \vdots & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & -2 & -2 & \vdots & 10 \\ 0 & -2 & -2 & \vdots & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & -2 & -2 & \vdots & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Estamos ante un sistema compatible indeterminado, pues la última fila es de ceros, y luego, no podemos obtener un valor de z que nos determine una solución única. Así pues, $z=\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.
La solución será $x=1$, $y=5-\lambda$ y $z=\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) De nuevo, tomando la matriz del sistema:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \vdots & 2 \\ 6 & 1 & -2 & \vdots & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-2F_1]{3F_2-F_1} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 5 & -4 & \vdots & 5 \\ 0 & 5 & -4 & \vdots & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 5 & -4 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 2 \end{pmatrix}$$

De F_3 sacamos que $0z=2 \Longrightarrow 0=2$, lo que supone una contradicción. El sistema es incompatible.

1.4. Sistemas dependientes de un parámetro

Comencemos resolviendo un sistema, en el que no todos los coeficientes son conocidos. Introduciremos un parámetro, m, que representará un número real, que a priori, no conocemos.

Ejemplo 5. *Resuelve el sistema siguiente:*

$$\left\{\begin{array}{r} x+y+z=3 \\ 2x-y+3z=2 \\ x+4y+mz=2 \end{array}\right. \quad \textit{siendo } m \in \mathbb{R}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 2 & -1 & 3 & \vdots & 2 \\ 1 & 4 & m & \vdots & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & -3 & 1 & \vdots & -4 \\ 0 & 3 & m-1 & \vdots & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & -3 & 1 & \vdots & -4 \\ 0 & 0 & m & \vdots & -5 \end{pmatrix}$$

De F_3 tenemos que $mz=-5$, luego $z=-\dfrac{5}{m}$.

En apariencia, no hay diferencia entre este sistema y otro compatible determinado de los que hayamos visto hasta ahora. Podemos dar la solución $z=-\frac{5}{m}$, subir a F_2 y después a F_1 y obtener la solución del sistema, que sabemos es, única. Tendríamos pues, una solución dependiendo de m, y dependiendo del valor que tome, habrá una solución u otra. Ahora bien , ¿puede tomar m cualquier valor? Si nos fijamos bien, la expresión $\frac{5}{m}$ no será un número real cuando $m=0$, ya que, $\frac{m}{0}=\infty \notin \mathbb{R}$.

> **Discutir un sistema de ecuaciones**, dependiente de un parámetro, es identificar para qué valores del mismo es compatible o no. Distinguiendo si además es compatible determinado o indeterminado.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 6. *Discute, y resuelve cuando se pueda, el siguiente sistema según los valores del parámetro m:*

$$\left\{\begin{array}{r} x+y+2z=0 \\ 2x-y-z=1 \\ x+3y+mz=2 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 0 \\ 2 & -1 & -1 & \vdots & 1 \\ 1 & 3 & m & \vdots & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & -3 & -5 & \vdots & 1 \\ 0 & 2 & m-2 & \vdots & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3F_3+2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & -3 & -5 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 3m-16 & \vdots & 8 \end{pmatrix}$$

De F_3 deducimos que $(3m-16)z=8$:

- Si $3m-16=0$, entonces $z=\frac{8}{3m-16}$ no tiene sentido, pues $\frac{8}{3m-16}=\frac{8}{0}\notin\mathbb{R}$. Así pues, si $3m=16 \Longrightarrow m=\boxed{\frac{16}{3}}$, el sistema es **incompatible**.

$*$ Si $m \neq \frac{16}{3}$, entonces $z = \frac{8}{3m-16} \in \mathbb{R}$. Es sistema es **compatible determinado**.
De $F_2 : -3y - 5z = 1$

$$y = \frac{-1-5z}{3} \Longrightarrow y = \frac{-1-5\cdot\left(\frac{8}{3m-16}\right)}{3} = \frac{\frac{-3m+16-40}{3m-16}}{3} = \frac{-3m-24}{3(3m-16)} = \boxed{-\frac{m+8}{3m-16}}$$

De F_1:

$$x = -y - 2z = \frac{m+8}{3m-16} - 2\cdot\left(\frac{8}{3m-16}\right) = \frac{m+8-16}{3m-16} = \boxed{\frac{m-16}{3m-16}}$$

Ejemplo 7. *Discute el siguiente sistema según los valores de m:*

$$\begin{cases} x - my + z = 1 \\ x + y + z = m + 2 \\ mx + y + z = 4 \end{cases}$$

Solucion: Hasta el momento, no nos ha hecho falta operar con columnas. Ahora bien, para este sistema, nos va a interesar permutar la columna 1 por la 3, de esta manera, pasamos el parámetro m a la última columna, lo que nos facilitará los cálculos.
Debemos tener en cuanta que, al permutar la columna 1 por la 3, la incógnita x se cambia por la z.

$$\begin{pmatrix} 1 & -m & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & m+2 \\ 1 & 1 & m & \vdots & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & -m & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1+m & 0 & \vdots & 1+m \\ 0 & 1+m & m-1 & \vdots & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3-F_2} \begin{pmatrix} 1 & -m & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1+m & 0 & \vdots & 1+m \\ 0 & 0 & m-1 & \vdots & 2-m \end{pmatrix}$$

De F_3: $x = \frac{2-m}{m-1}$ (recordemos que hemos permutado columnas)

$*$ Si $m - 1 = 0$, el sistema es **incompatible** pues $z \notin \mathbb{R}$.

$*$ Si $m \neq 1$, $z = \frac{2-m}{m-1} \in \mathbb{R}$
De F_2: $y = \frac{1+m}{1+m} = 1$ si $m + 1 \neq 0$. El valor de x no influye en el valor de y, pero tenemos una nueva condición para m y es que, si $m \neq -1$ entonces $y = 1$ y el sistema es compatible determinado, debido a que, podemos hallar el valor de z sin más que sustituir en F_1.

Si $m \neq \pm 1$ el sistema es **compatible determinado**.

$*$ Si $m = -1$ y sustituimos en la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \vdots & 3 \end{pmatrix}$$

El sistema es **compatible indeterminado**.

De F_3, $x = \boxed{-\frac{3}{2}}$.

De F_1 $z + y + x = 1$ y sólo tenemos el valor de x, debemos asignar un valor a y o a z. Sea pues $z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$y = 1 - \lambda + \frac{3}{2} = \boxed{\frac{5-2\lambda}{2}}$$

Para $m = -1$, el sistema tiene por solución $x = -\dfrac{3}{2}$, $y = \dfrac{5-2\lambda}{2}$ y $z = \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 8. *(**Murcia 2005**) Discute el siguiente sistema según los los valores de m:*

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + \dfrac{1}{2}y = -2 \\ x + my = 2 \end{cases}$$

Resuélvelo en caso de compatibilidad.

Solución: Se trata de un sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas. Operando por filas, desaparecerá o una varias de las mismas.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & \dfrac{1}{2} & -2 \\ 1 & m & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2F_2-F_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & m & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & m & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2F_2-F_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ o & 2m+1 & 0 \end{pmatrix}$$

De $F_2 : (2m+1)z = 0$

$*$ Si $2m + 1 = 0$, es decir, $m = -\frac{1}{2}$, la matriz será se convierte en $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, lo que nos deja un sistema compatible indeterminado. Sea $y = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. De F_1 deducimos que $2x - y = 4 \Longrightarrow 2x = 4 + y \Longrightarrow x = \boxed{\frac{4+\lambda}{2}}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

$*$ Si $m \neq -\frac{1}{2}$, entonces $y = \frac{0}{2m+1} = \boxed{0}$. Por tanto, $x = \dfrac{4+0}{2} = \boxed{2}$ y el sistema será compatible determinado.

Ejercicio 2. *Discute los siguientes sistemas según los valores de m:*

a) $\left\{\begin{array}{rl} 4x+2y & = m \\ x+y-z & = 2 \\ mx+y+z & = 1 \end{array}\right.$ ***Sol.*** $\left\{\begin{array}{c} \textit{Si } m=3 \textit{ sistema compatible indeterminado} \\ \textit{Si } m\neq 3 \textit{ sistema compatible determinado} \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rl} 4x+2y & = m \\ x+y-z & = 2 \\ mx+y+z & = 0 \end{array}\right.$ ***Sol.*** $\left\{\begin{array}{c} \textit{Si } m=3 \textit{ sistema incompatible} \\ \textit{Si } m\neq 3 \textit{ sistema compatible determinado} \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{c} (m+1)x+y+z=3 \\ x+2y+mz=4 \\ x+my+2z=2 \end{array}\right.$ ***Sol.*** $\left\{\begin{array}{c} \textit{Si } m=\pm 2 \textit{ sistema incompatible} \\ \textit{Si } m\neq \pm 2 \textit{ sistema compatible determinado} \end{array}\right.$

1.5. Resolución de problemas

1.5.1. Introducción

La resolución de problemas, dentro del temas de los sistemas de ecuaciones, pretende que, a partir de un enunciado, demos respuesta a una serie de cuestiones que se nos plantean. El primer paso para resolver un problema, aplicando la resolución de sistemas, es reconocer las incógnitas. Normalmente estaremos ante una situación en la que debamos hallar tres datos. Se trata pues de resolver sistemas de ecuaciones, que en su mayoría, serán de tres ecuaciones con tres incógnitas.

1.5.2. Pasos

Identificar las incógnitas

Como hemos dicho anteriormente, el primer paso será identificar las incógnitas. Normalmente, el enunciado de un problema suele acabar en una pregunta o comenzar con la palabra "halla" . Ya sea mediante pregunta, o de forma directa, del enunciado debemos identificar las incógnitas. Es lo primero que debemos hacer.

Ejemplo 9. ***(Problema propuesto en Cantabria 2005)*** *En una tienda por comprar* 2 *chaquetas y una blusa nos cobran* 200 *euros. Si volvemos a la tienda y compramos una chaqueta, un pantalón y devolvemos la blusa, nos cobran* 100*. Si hacemos una tercera visita a la tienda y compramos* 5 *chaquetas, un pantalón y una blusa, ¿cuánto nos cobrarán?*

Para dar respuesta a la pregunta final, podemos preguntarnos por el precio de 5 chaquetas, un pantalón y una blusa. Fijémonos en que no nos piden el precio de cada uno de los artículos, nos piden el precio de 5 chaquetas, un pantalón y una blusa. Nos puede llevar a error, el considerar que nos están pidiendo el precio de cada uno de los artículos, ya que en realidad el problema se resuelve de forma inmediata si consideramos los 7 artículos a la vez, que por separado. Tendremos pues que:

$$\boxed{\begin{array}{l} x \longrightarrow \text{precio de una chaqueta} \\ y \longrightarrow \text{precio de una blusa} \\ z \longrightarrow \text{precio de un pantalón} \end{array}}$$

Ejemplo 10. *(* ***Cataluña 2005****) Una marca comercial utiliza tres ingredientes A, B y C en la elaboración de tres tipos de pizzas $P1$, $P2$ y $P3$. La pizza $P1$ se elabora con 1 una unidad de A, 2 de B y 2 de C; la $P2$ su elaboración es de 2 unidades de A, 1 de B y 1 de C; y la $P3$ se elabora con 2 unidades de A, 1 de B y 2 de C. El precio de venta al público es de $4,80$ € por la $P1$, $4,\ 10$ € por la $P2$ y $4,90$ € por la $P3$. Sabiendo que el margen comercial (beneficio) es de $1,\ 60$ € en cada una, encontrar cuánto le cuesta cada unidad de A, de B y C a la marca comercial.*

Está claro que, debemos identificar las incógnitas con el precio por unidad de los tipos de pizzas A, B y C. Haremos pues,

$$\boxed{\begin{array}{l} x \longrightarrow \text{coste de una unidad de } A \\ y \longrightarrow \text{coste de una unidad de } B \\ z \longrightarrow \text{coste de una unidad de } C \end{array}}$$

Plantear el sistema

Una vez que conocemos las incógnitas, debemos traducir el enunciado al lenguaje algebraico de las ecuaciones lineales. Para ello, en primer lugar, debemos volver a leer el enunciado, de manera que, en una segunda lectura, identifiquemos las incógnitas en las distintas partes del enunciado. En el ejemplo de las pizzas, en una segunda lectura, mentalmente, identificamos:

$$\begin{array}{c} 2 \text{ unidades de } A,\ 1 \text{ de } B \text{ y } 1 \text{ de } C \\ \Downarrow \\ 2x + y + z \end{array}$$

Una vez que hemos traducido, una tercera o cuarta lectura nos servirá para comprobar que las ecuaciones son coherentes con el enunciado.

Resolver los sistemas

En muchos casos aplicaremos Gauss en la resolución de los sistemas que se traducen del enunciado. En otros no será necesario. El problema del primer ejemplo, se resuelve sin necesidad de aplicar Gauss. Sin embargo, en el segundo ejemplo, sí que aplicamos Gauss en la resolución del sistema que nos aparece.

Comprobar la solución

Cuando tengamos la solución, comprobaremos que es coherente con la situación del enunciado. Por ejemplo, si del segundo problema deducimos que el precio de por unidad de A es de 5 €, está claro que hemos cometido un error. En dicho caso, no sólo nos quedaremos en un repaso de los pasos que damos en las transformaciones, sino que es posible que el error lo hayamos cometido en la traducción.

1.6. Ejercicios resueltos

1. (**Murcia, junio de 2009**) Estudiar el siguiente sistema para los distintos valores de λ y resolverlo para el valor $\lambda = 1$.

$$\begin{cases} x+y-z=\lambda \\ x-y+2z=1 \\ 2x+y+\lambda z=0 \end{cases}$$

Solución: Operamos sobre la matriz del sistema:

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & \vdots & \lambda \\ 1 & -1 & 2 & \vdots & 1 \\ 2 & 1 & \lambda & \vdots & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & \vdots & \lambda \\ 0 & -2 & 3 & \vdots & 1-\lambda \\ 0 & -1 & \lambda+2 & \vdots & -2\lambda \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2-2F_3} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & \vdots & \lambda \\ 0 & 0 & -2\lambda-1 & \vdots & 1-3\lambda \\ 0 & -1 & \lambda+2 & \vdots & -2\lambda \end{array}\right)$$

Si $-2\lambda-1=0 \Longrightarrow 2\lambda=-1 \Longrightarrow \lambda=-\frac{1}{2}$ En este caso, la matriz queda:

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & \vdots & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \frac{7}{2} \\ 0 & -1 & \frac{3}{2} & \vdots & 1 \end{array}\right)$$

Lo que nos da un sistema incompatible pues $0=7/2$ es falso. Para $\lambda \neq -1/2$ el sistema es compatible determinado. Y para $\lambda=1$ queda:

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & -3 & \vdots & -2 \\ 0 & -1 & 3 & \vdots & -2 \end{array}\right)$$

De F_2 sacamos que $z=2/3$ y pasando por F_3, $y=5$. Por otro lado, juntado y y z en F_1, obtenemos $x=-7/3$.

2. (**Murcia, septiembre de 2009**) Un señor acertó cinco números en la lotería primitiva, dos de los cuales eran el 23 y el 30. Propuso a sus hijos que si averiguan los otros tres, se podrían quedar con el premio. La suma del primero con el segundo excedía en dos unidades al tercero; el segundo menos el doble del primero era diez unidades menor que el tercero y la suma de los tres era 24. ¿Cuáles son los tres números que faltan?

   Solución: Sean x, y y z los tres números que buscamos; el primero, el segundo y el tercero, y por ese orden. El sistema que formamos es el siguientes:

$$\begin{cases} x+y=z+2 \\ y-2x+10=z \\ x+y+z=2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y-z=2 \\ -2x+y-z=-10 \\ x+y+z=24 \end{cases}$$

Pasamos el sistema a matriz y aplicamos Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & \vdots & 2 \\ -2 & 1 & -1 & \vdots & -10 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 24 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2+2F_1} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & 3 & -3 & \vdots & -6 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & 22 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[1/2F_3]{1/3F_2} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 11 \end{array}\right)$$

De F_3 obtenemos que $z = 11$. De F_2 sacaremos que $y = 9$. Para finalizar, sustituyendo los valores de y y z en F_1: $x = 4$.

3. (**Andalucía 2009**)

   a) En un comercio de bricolaje se venden listones de madera de tres longitudes: $0,90\ m$, $1,50\ m$ y $2,40\ m$, cuyos precios respectivos son de 4 €, 6 €y 10 €. Un cliente ha comprado 19 listones, con una longitud total de 30 metros, que le han costado 126 €en total.

   Plantee, sin resolver, el sistema de ecuaciones necesario para determinar cuántos listones de cada longitud ha comprado este cliente.

   b) Clasifique el siguiente sistema de ecuaciones y resuélvalo, si es posible:

$$\begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ 2x - 2y + z = 18 \\ x - 3z = 0 \end{cases}$$

Solución:

a) Sea x el número de listones de $0,9\ m$, y el de $1,5\ m$ y z el de $2,4\ m$.

Podemos plantear en una tabla los distintos datos del problema:

	Longitud	Precio
x	$0,9\ m$	4 €
y	$1,5\ m$	6 €
z	$2,4\ m$	10 €
19	$30\ m$	126 €

Observando las columnas de las distintas magnitudes, podemos plantear el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 19 \\ 0,9x + 1,5y + 2,4z = 36 \\ 4x + 6y + 10z = 126 \end{cases}$$

b) Para clasificar el sistema, pasamos a la matriz del mismo:

$$\left(\begin{array}{ccccc} 3 & -1 & -1 & \vdots & 0 \\ 2 & -2 & 1 & \vdots & 18 \\ 1 & 0 & -3 & \vdots & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -3 & \vdots & 0 \\ 2 & -2 & 1 & \vdots & 18 \\ 3 & -1 & -1 & \vdots & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-2F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -3 & \vdots & 0 \\ 0 & -2 & 7 & \vdots & 18 \\ 0 & -1 & 8 & \vdots & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(-2)F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -3 & \vdots & 0 \\ 0 & -2 & 7 & \vdots & 18 \\ 0 & 0 & -9 & \vdots & 18 \end{array}\right)$$

El sistema es compatible determinado: de F_3 $-9z = 18 \Longrightarrow z = -2$. De F_2 obtenemos que $-2y + 7z = 18 \Longrightarrow y = -16$. Y de F_1 se deduce que $x - 3(-2) = 0 \Longrightarrow x = -6$.

La solución es $(-6, -16, -2)$.

4. (**Andalucía 2009**) Una tienda dispone de latas de conserva de tomate de tres fabricantes: A, B y C. El fabricante A envasa el tomate en latas de 250 g, el fabricante B lo envasa en latas de 500 g y el fabricante C en latas de 1 kg. Esas latas de tomate se venden a 1, 1,8 y 3,3 euros, respectivamente. Compramos en total 20 latas, que pesan un total de 10 kg y nos cuestan 35,6 euros. Queremos saber cuántas latas de cada fabricante hemos comprado.

   a) Plantee el sistema de ecuaciones que resolvería el problema anterior.

   b) Resuelva el problema.

Solución:

a) La siguiente tabla representa los datos del problema:

Fábrica	A	B	C	Total
Peso	250 g	500 g	1 kg	10 kg
Precio	1€	1,8€	3,3€	35,6 €

La tabla nos permite traducir el problema al lenguaje algebraico de los sistemas:

$$\left\{\begin{array}{c} x + y + z = 20 \\ 0,25x + 0,5y + z = 10 \\ x + 1,8y + 3,3z = 35,6 \end{array}\right.$$

siendo x, y y z el número de latas de los fabricantes A, B y C, respectivamente.

b) Pasamos a matrices:

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & \vdots & 20 \\ 0,25 & 0,5 & 1 & \vdots & 10 \\ 1 & 1,8 & 3,3 & \vdots & 35,6 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-0,25F_1} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & \vdots & 20 \\ 0 & 0,25 & 0,75 & \vdots & 5 \\ 0 & 0,8 & 2,3 & \vdots & 15,6 \end{array}\right) \xrightarrow{4F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 20 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots & 20 \\ 0 & 0,8 & 2,3 & \vdots & 15,6 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-0,2F_2]{F_1-F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 20 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots & 20 \\ 0 & 0 & -0,1 & \vdots & -0,4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-10F_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 20 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots & 20 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1+2F_3]{F_2-3F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 8 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 8 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 4 \end{pmatrix}$$

Esta matriz deja poco lugar a dudas. $x = 8$, $y = 8$ y $z = 4$.

Solución: Hemos comprado 8 latas que provienen de la fábrica A, 8 que provienen de la B y 4 de la C.

5. (**Comunidad Valenciana, junio de 2009**) Resuelve el sistema:

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + z = 3 \\ x + 5y - 7z = 4 \end{cases}$$

Si $(x, y, 0)$ es una solución del sistema anterior, ¿cuáles son los valores de x e y?

Solución: Pasamos a lenguaje matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 2 \\ 2 & 0 & 1 & \vdots & 3 \\ 1 & 5 & -7 & \vdots & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3+7F_2]{F_1+F_2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & \vdots & 5 \\ 2 & 0 & 1 & \vdots & 3 \\ 15 & 5 & 0 & \vdots & 25 \end{pmatrix} \xrightarrow{1/5F_3}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & \vdots & 5 \\ 2 & 0 & 1 & \vdots & 3 \\ 3 & 1 & 0 & \vdots & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_1} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & \vdots & 5 \\ 2 & 0 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Esta última matriz nos dice que estamos ante un sistema compatible indeterminado.
Si $x = \lambda$:
De F_2: $2x + z = 3 \Longrightarrow 2\lambda + z = 3 \Longrightarrow z = 3 - 2\lambda$
De F_1: $3x + y = 5 \Longrightarrow y = 5 - 3x \Longrightarrow y = 5 - 3\lambda$.

La solución es $(\lambda, 5 - 3\lambda, 3 - 2\lambda)$ $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $z = 0$ entonces $\lambda = 3/2$. Lo solución para este valor de λ es $(3/2, 1/2, 0)$.

6. (**Comunidad Valenciana, septiembre de 2009**) En un sondeo se obtiene que el número de individuos a favor de cierta normativa duplica a la suma de los que están en contra y los que no opinan. El total de entrevistados asciende a 360 personas y la diferencia entre los que expresan su opinión y los que no lo hacen duplica a la

diferencia entre el número de individuos a favor y el número de los que están en contra de la citada normativa. Determina cuántos entrevistados estaban a favor de la normativa, cuántos en contra y cuántos no opinaron.

Solución: Sea x el número de entrevistados que están a favor, y el número de los que están en contra y z los que no opinaron. Traducimos el enunciado a lenguaje algebraico:

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=360 \\ x=2(y+z) \\ x+y-z=2(x-y) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=360 \\ -x+2y+2z=0 \\ x-3y+z=0 \end{array}\right.$$

Pasamos a matrices:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 360 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2+F_1]{F_3-F_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 360 \\ 0 & 3 & 3 & 360 \\ 0 & -4 & 0 & -360 \end{array}\right) \xrightarrow[-1/4F_3]{1/3F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 360 \\ 0 & 1 & 1 & 120 \\ 0 & 1 & 0 & 90 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-F_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 240 \\ 0 & 1 & 1 & 120 \\ 0 & 1 & 0 & 90 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-F_3} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 240 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & 90 \end{array}\right)$$

<u>Solución</u>: 240 están a favor, 90 en contra y 30 no opinan.

7. (**Madrid, junio de 2009**) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones, dependiente de un parámetro real k:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+kz=4 \\ 2x-y+2z=5 \\ -x+3y-z=0 \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores del parámetro k.

b) Resuélvase el sistema en el caso en el que tenga infinitas soluciones.

c) Resuélvase el sistema para $k=0$.

Solución:

a) Pasamos el sistema a matrices:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & k & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2-2F_1]{F_3+F_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & k & 4 \\ 0 & -3 & 2-2k & -3 \\ 0 & 4 & k-1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2+F_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 1-k & \vdots & 1 \\ 0 & 4 & k-1 & \vdots & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-4F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 1-k & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & -5+5k & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Si $-5+5k=0 \Longrightarrow k=1$ (SCI). Si $k \neq 1$ (SCD).

b) Un sistema tiene infinitas soluciones cuando es compatible indeterminado. Así pues, nos piden que resolvamos el sistema para $k=1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1-F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Sea $z=\lambda$. De F_2: $y=1$ y de $F_1:\ x=-\lambda+3,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

La solución es $(-\lambda+3, 1, \lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

c) Si $k=0$ la matriz del sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & -5 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

De $F_3: -5z=0 \Longrightarrow z=0$. De $F_2: y+z=1 \Longrightarrow y=1$. Y de F_1: $x+1=4 \Longrightarrow x=3$.
La solución es $(3,1,0)$.

8. (**Madrid, septiembre de 2009**) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones, dependiente de un parámetro real k:

$$\left\{ \begin{array}{c} x+y+z=3 \\ x+ky+z=3 \\ kx-3z=6 \end{array} \right.$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de k.

b) Resuélvase el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.

c) Resuélvase el sistema para $k=3$.

Solución:

a) Trabajemos sobre la matriz del sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & k & 1 & 3 \\ k & 0 & -3 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 \\ k & 0 & -3 & 6 \end{array}\right)$$

Podemos discutir el sistema a partir de F_2. Si $k-1=0$, luego $k=1$, tenemos un SCI. Mientras que para $k \neq 1$ tenemos un SCD ya que $(k-1)y=0 \Longrightarrow y=0$. Para x y z basta con sustituir $y=0$ y resolver el sistema que queda.

b) Si $k=1$ hemos dicho que el sistema es compatible indeterminado porque tenemos una fila de ceros:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right)$$

Añadimos $z=\lambda$ y como de F_3 tenemos que: $x-3z=6 \Longrightarrow x-3\lambda=6 \Longrightarrow x = 6+3\lambda$.
De F_1 obtenemos que $x+y+z=3$ de donde $6+3\lambda+y+\lambda=3 \Longrightarrow y=-4\lambda-3$.

La solución es $(6+3\lambda, -4\lambda-3, \lambda)$ $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) Si $k=3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{1/3F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

De F_2 obtenemos que $y=0$, de F_3 podemos deducir que $-2z=-1 \Longrightarrow z=1/2$ y de F_1 sacamos que $x+z=3 \Longrightarrow x+\frac{1}{2}=3 \Longrightarrow x=\frac{5}{2}$.

La solución es $\left(\frac{5}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$

9. (**Castilla-La Mancha, junio de 2009**) Con las 12 monedas que tengo en el bolsillo (de 50 céntimos, de 20 céntimos y de 10 céntimos de euro) puedo comprar un pastel cuyo precio es 2,80 euros. Si una moneda de 50 céntimos lo fuera de 20, entonces el número de 20 céntimos y el número de las de 10 céntimos coincidiría. ¿Cuántas monedas tengo de cada clase?

Solución: Sea x el número de monedas de 50 céntimos, y las de 20 y z las de 10. Traducimos el enunciado al lenguaje algebraico de los sistemas:

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=12 \\ 0,50x+0,20y+0,10z=2,80 \\ y+1=z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=12 \\ 5x+2y+z=28 \\ y-z=-1 \end{array}\right.$$

Pasamos a matrices y aplicamos Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 5 & 2 & 1 & 28 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_2]{F_1-2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 11 \\ 5 & 3 & 0 & 27 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2-5F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 11 \\ 0 & -7 & 0 & -28 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{-1/7F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3-F_2]{F_1-2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3 \\ y=4 \\ z=5 \end{array}\right.$$

<u>Solución:</u> Tenemos 3 monedas de 50 céntimos, 4 de 20 céntimos y 5 de 10 céntimos.

10. (**Castilla-La Mancha, septiembre de 2009**) En una caja hay monedas de 1, de 2 y de 5 céntimos de euro. El número de monedas de 2 céntimos excede en cuatro unidades a la suma del número de las de 2 céntimos y del número de las de 5 céntimos. El número de monedas de 2 céntimos excede en una unidad al 40 % del número de monedas de 1 céntimo. Sabiendo que si tuviéramos una moneda más de 1 céntimo, el valor de todas ellas sería de 50 céntimos, calcula el número de monedas que hay de cada clase.

Solución: Sea x el número de monedas de 1 céntimo, y el de 2 céntimos y z el de 5 céntimos. Traduciendo se obtiene:

$$\left\{\begin{array}{c} y+z=x+4 \\ y=0,4x+1 \\ x+1+2y+5z=50 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} -x+y+z=-4 \\ -2x+5y=5 \\ x+2y+5z=49 \end{array}\right.$$

Pasamos a la matriz del sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -4 \\ -2 & 5 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 49 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2-2F_1]{F_3+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & -2 & 13 \\ 0 & 3 & 6 & 45 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & -2 & 13 \\ 0 & 0 & 8 & 32 \end{array}\right)$$

De F_3: $8z=32 \Longrightarrow z=4$. De F_2 obtenemos que $3y-8=13 \Longrightarrow y=7$. Y por último, de F_1 podemos deducir que $-x+y+z=-4 \Longrightarrow -x+7+4=-4 \Longrightarrow x=15$.

<u>Solución:</u> En la caja hay 15 monedas de 1 céntimo, 7 de 2 céntimos y 4 de 5 céntimos.

1.7. Ejercicios propuestos

1. (**Castilla-La Mancha, septiembre de 2008**) En la XXI Olimpiada Nacional de Química se contrataron 5 autobuses de 55 plazas cada uno, incluida la del conductor, para el transporte de alumnos, profesores y acompañantes. La suma del 10 % del número de profesores y del 20 % del número de acompañantes excede en una unidad al 10 % del número de alumnos. El número de alumnos duplicaría al de profesores en el caso de que hubiera asistido 5 profesores menores. Determina el número de alumnos, de profesores y de acompañantes.

   Solución: Asisten 150 alumnos, 80 profesores y 40 acompañantes.

2. (**Castilla-La Mancha, septiembre de 2008**) Un instituto compra 500 paquetes de folios a tres proveedores diferentes a $2,75$; $2,70$ y $2,80$ euros cada paquete, respectivamente. La factura total asciende a 1360 euros. La diferencia entre el número de paquetes suministrados por el 2º y el 3º proveedor, es triple del número de paquetes suministrados por el 1º proveedor. ¿Cuántos paquetes suministra cada uno de los proveedores?

   Solución: El primer proveedor suministra 100 paquetes, el segundo 350 y el tercero 50.

3. (**Castilla-La Mancha, septiembre de 2008**) Los 147 alumnos de un Instituto participan en un taller de percusión organizado pr el Departamento de Música. Hay tres modalidades: Merengue, Tango y Samba. Si 15 alumnos de los que han elegido Merengue hubieran elegido Samba, entonces ambas modalidades hubieran tenido el mismo número de alumnos inscritos. La suma del número de inscritos en Merengue y el doble del número de inscritos en Samba excede en 20 al doble del número de inscritos en Tango. Determina el número de alumnos inscritos en cada modalidad.

   Solución: Hay 62 inscritos en Merengue, 53 en Tango y 32 en Samba.

4. (**Comunidad Valenciana, septiembre de 2008**) Antonio ha conseguido 1372 euros trabajando durante las vacaciones. Ese dinero puede gastarlo íntegramente comprando un ordenador portátil, una cámara digital y haciendo un viaje. EL precio del ordenador portátil excede en 140 euros a la suma de los precios de la cámara y del viaje. Teniendo en cuenta que el precio de un segundo acompañante para el viaje es la mitad del precio inicial, Antonio podría invitar a su hermano al viaje en el caso de que no se comprara la cámara digital y todavía le quedarían 208 euros. Calcula los precios del ordenador, de la cámara y del viaje.

   Solución: El precio del portátil es de 756 €, el de la cámara 344 € y el del viaje 272 €.

5. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\left\{\begin{array}{r} 2x+y+z=1 \\ 4x+y \quad =-2 \\ -2x+2y+z=7 \end{array}\right.$ **Sol:** $x=-1,\ y=2,\ z=1$

b) $\left\{\begin{array}{l} 3x-2y+z=1 \\ \ x+y-z=2 \\ 6x+y-2z=7 \end{array}\right.$ **Sol: Incompatible**

c) $\left\{\begin{array}{l} x+y+3z \quad =0 \\ 3x-2y-5z+7w=-31 \\ x+2y-z+3w=18 \\ x-3y+z+2w=-26 \end{array}\right.$ **Sol:** $x=1,\ y=10,\ z=3,\ w=0$

d) $\left\{\begin{array}{l} x+2y+1=-1 \\ 2x+5y+1=0 \\ 3x+8y+z=1 \end{array}\right.$ **Sol:** $x=-5-3\lambda,\ y=2+\lambda,\ z=\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}$

6. **(Murcia 2006)** Discute los siguientes sistemas según los valores del parámetro m. Resuelve en caso de compatibilidad:

a) $\left\{\begin{array}{c} x+y+z=m-1 \\ 2x+y+mz=m \\ x+my+z=1 \end{array}\right.$ **Sol:** $\left\{\begin{array}{c} \text{Si } m=1 \text{ sistema incompatible} \\ \text{Si } m\neq 1 \text{ sistema compatible determinado} \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{c} x-y+z=1 \\ 2x-y+z=m \\ 3x+2y-mz=0 \end{array}\right.$ **Sol:** $\left\{\begin{array}{c} \text{Si } m=2 \text{ sistema incompatible} \\ \text{Si } m\neq 2 \text{ sistema compatible determinado} \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{c} mx+3y \quad =0 \\ mx+my+z=0 \\ 3x+3y+z=0 \end{array}\right.$ **Sol:** $\left\{\begin{array}{c} \text{Si } m=2 \text{ sistema compatible indeterminado} \\ \text{Si } m\neq 3 \text{ sistema compatible determinado} \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{c} mx+y+z=1 \\ x+my+z=1 \\ x+y+mz=1 \end{array}\right.$ **Sol:** $\left\{\begin{array}{c} \text{Si } m=1 \text{ sistema compatible indeterminado} \\ \text{Si } m\neq 1 \text{ y } m=-2 \text{ sistema compatible indeterminado} \\ \text{Si } m\neq 1 \text{ y } m\neq -2 \text{ sistema compatible determinado} \end{array}\right.$

7. Dos amigos invierten 20 000 € cada uno. El primero coloca una cantidad A al 4 % de interés, una cantidad B al 5 % y el resto al 6 %. El otro invierte la misma cantidad A al 5 %, la B al 6 % y el resto al 4 %. Determina las cantidades A, B y C sabiendo que el primero obtiene unos intereses de 1 050 € y el segundo de 950 €.

   Solución: $A=5\,000$; $B=5\,000$ € $C=10\,000$ €.

8. **(Murcia 2003)** En un estudio de mercado, se eligen tres productos, A, B y C y cuatro tiendas. En la primera, por una unidad de cada producto cobran, en total, 4,25 euros. En la segunda, 2 unidades de A y 3 de C valen 8,25 euros más que una unidad de B. En la tercera, una unidad de A y 2 de C valen 4 euros más que 2 unidades de B y, en la cuarta, una unidad de B vale 1,25 euros menos que una de C. ¿Tienen A, B y C el mismo precio en las cuatro tiendas o no? Si la respuesta es no, justifique por qué y si la respuesta es sí, diga cuál es ese precio.

   Solución: No. El sistema en el que se traduce el enunciado es:

$$\begin{cases} x + y + z = 4,25 \\ 2x \quad\ + 3z = 8,25 \\ x \quad\ + 2z = 2y + 4 \\ \quad\ y \quad\ = z - 1,25 \end{cases}$$

9. **(Murcia 2004)** Encontrar tres números A, B y C, tales que su suma sea 210, la mitad de la suma del primero y del último más la cuarta parte del otro sea 95 y la media de los dos últimos sea 80.
Solución: $A = 50, \ B = 40, \ C = 120$.

10. **(Murcia 2006)** La suma de las tres cifras de un número es 6 y si se intercambian la primera y la segunda, el número aumenta en 90 unidades. Finalmente si se intercambian la segunda y la tercera, el número aumenta en 9 unidades. Calcular dicho número.
Solución: el número buscado es 123.
Indicación: un número de tres cifras, como por ejemplo, 345, en nuestro sistema de numeración, se descompone como $3 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5$.

Capítulo 2

Matrices

2.1. Introducción

El estudio del objeto matemático **matriz** nos va a proporcionar una herramienta importante en la resolución de diversos problemas, que tienen que ver con situaciones de la vida cotidiana. Sin ir más lejos, hemos visto, como el método de Gauss en la resolución de sistemas, se reduce a una serie de transformaciones, aplicadas a una matriz. La resolución de sistemas nos ayudaron a plantear problemas y hallar la solución de los mismos. Es decir, de partida, ya conocemos una de las muchas aplicaciones que tienen las matrices, no sólo en las Ciencias Sociales, sino en prácticamente todas las parcelas del conocimiento.

Ejemplos de lo dicho, pueden ser, la aportación a la Economía, a la Física, a la Biología, incluso a las propias Matemáticas.

Comenzaremos con la definición propia de matriz, para posteriormente exponer los distintos tipos de matrices.

Las operaciones entre matrices nos ayudarán a entender que, las podemos tratar como si fueran números, con un cierto grado de comprensión. Es decir, podemos reducir el estudio de matrices, al estudio de letras del tipo A, B, X, sabiendo que forman parte de la ecuación

$$A \cdot X = B$$

Uno de los puntos importantes de la unidad, será el cálculo de la matriz inversa. Recordemos que, el inverso de 2, 2^{-1}, es $\frac{1}{2}$, de manera que $2x = 3 \Longrightarrow 2^{-1} \cdot 2 \cdot x = 2^{-1} \cdot 3 \Longrightarrow x = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$.

Si sabemos entonces, como hallar X^{-1}, la solución a la ecuación $A \cdot X = B$, no es otra que $X = A^{-1} \cdot B$.

2.2. Definición de Matriz

Recordemos que, para resolver el sistema

$$\left\{ \begin{array}{c} x + 2y + z = 9 \\ x - y - z = -10 \\ 2x - y + z = 5 \end{array} \right.$$

utilizamos la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 9 \\ 1 & -1 & -1 & \vdots & -10 \\ 2 & -1 & 1 & \vdots & 5 \end{pmatrix}$. Diremos que esta matriz, es una matriz de dimensión 3×4 puesto que tiene 3 filas y 4 columnas.

En general, se tiene:

Definición 2. *Una matriz A, de* ***dimensión*** $m \times n$*, es un objeto matemático del tipo:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

siendo $a_{ij} \in \mathbb{R}$

La ***entrada*** a_{ij}*, es el número real que se encuentra en la fila i columna j.*

En ocasiones, para denotar que A es una matriz, no utilizaremos la caja anterior, sino que, escribiremos $A = (a_{ij})_{m,n}$. De esta manera, estamos diciendo que, la matriz es de dimensión $m \times n$ y que las entradas de A son a_{ij}. Esto, nos puede ayudar a distinguir a la matriz A de la B, pues podemos escribir $B = (b_{ij})_{m,n}$, que es una matriz de la misma dimensión pero con distintas entradas.

Ejemplo 11. *En la matriz del sistema* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 9 \\ 1 & -1 & -1 & \vdots & -10 \\ 2 & -1 & 1 & \vdots & 5 \end{pmatrix}$, $a_{11} = 1$, $a_{22} = -1$ *y* $a_{31} = 2$.

Veamos un ejemplo en el que una matriz nos ayudará a representar una situación de la vida cotidiana.

Ejemplo 12. *La matriz A representa los consumos anuales de tres familias α, β, γ, de pan, carne y mantequilla:*

$$A = \begin{pmatrix} 430 & 157 & 8 \\ 545 & 210 & 1 \\ 120 & 80 & 3 \end{pmatrix}$$

Es una matriz 3×3. La entrada $a_{11} = 430$, nos informa que la familia α ha consumido 430 unidades de pan y la entrada $a_{23} = 1$, que la familia β ha consumido una unidad de mantequilla.

Ejercicio 3. *Interpreta el resto de entradas.*

En lo sucesivo, y conforme vayamos introduciendo nuevos conceptos, veremos distintas situaciones representadas por matrices.

Pasemos a conocer los distintos tipos de matrices.

Definición 3.

D1 *Diremos que una matriz M es una matriz* ***fila*** *o* ***columna*** *cuando conste de una sola fila o una sola columna.*

Ejemplo 13. $A = (3 \quad -4\sqrt{2}, \ \frac{3}{7})$ *es una matriz fila, mientras que* $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *es una matriz columna.*

D2 *Diremos que una matriz A, de dimensión $m \times n$, es una* ***matriz cuadrada*** *cuando $m = n$. Diremos en este caso, que la matriz es cuadrada de orden n.*

La matriz del ejemplo anterior, es una matriz cuadrada de orden 3.

D3 *Llamaremos* ***diagonal principal*** *de una matriz cuadrada A, a las entradas a_{ii}.*

D4 *Se llama matriz* ***traspuesta*** *de una matriz A, denotada por A^t, a la matriz que resulta de cambiar las filas por las columnas.*

Esta matriz, es de suma importancia en el cálculo de la matriz inversa (no en este curso). Si calculamos la traspuesta de la matriz A del ejemplo anterior, llegamos a que

$$A = \begin{pmatrix} 430 & 157 & 8 \\ 545 & 210 & 1 \\ 120 & 80 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^t = \begin{pmatrix} 430 & 545 & 120 \\ 157 & 210 & 80 \\ 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

D5 *Una matriz A es* ***simétrica*** *si $A^t = A$.*

Ejercicio 4. *Encuentra una matriz cuadrada de orden* 2 *que sea simétrica.*

D6 *Una matriz A se llama* ***triangular (superior o inferior)****, cuando todas las entradas, por debajo o por encima, de la diagonal principal son cero.*

Ejemplo 14. *La matriz* $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ *es una matriz triangular (superior).*

D7 *Diremos que dos matrices $A = (a_{ij})_{m,n}$ y $B = (b_{ij})_{p,q}$ son* ***iguales****, $A = B$, cuando $m = p$, $n = q$ y $a_{ij} = b_{ij}$.*

Una vez que hemos introducido las definiciones básicas, introduciremos las operaciones entre matrices. Comenzaremos con la suma de matrices, para continuar con el producto.

2.3. Operaciones con matrices

2.3.1. Suma de matrices

Recordemos el ejemplo de las familias α, β y γ. Supongamos por un momento, que el consumo de artículos que representa la matriz A, se refiere al año 2004. Pongamos que la matriz $B = \begin{pmatrix} 435 & 200 & 5 \\ 570 & 198 & 3 \\ 115 & 82 & 5 \end{pmatrix}$, representa el consumo de dichas familias, pero esta vez en el año 2005. Si quisiéramos averiguar el consumo de los artículos pan, carne y mantequilla, pero de los dos años, nada sería más natural que, realizar la suma, entrada por entrada, de las dos matrices. Luego, la matriz

$$\begin{pmatrix} 430+435 & 157+200 & 8+5 \\ 545+570 & 210+198 & 1+3 \\ 120+115 & 80+82 & 3+5 \end{pmatrix}$$

representa el consumo de las tres familias citadas en los dos años, 2004 y 2005.

Al hilo de lo dicho, demos la definición de suma de matrices.

Definición 4. *Sean dos matrices A y B del mismo orden $m \times n$, $A = (a_{ij})_{m,n}$ y $B = (b_{ij})_{m,n}$. Se define la suma de A y B, denotado por $A + B$, como la matriz*

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m,n}$$

.

Es por tanto necesario que las matrices sean de la misma dimensión.

La matriz que representa el consumo en los años 2004 y 2005, es la matriz suma de A y B.

2.3.2. Producto de una matriz por un escalar

Definición 5. *Diremos que k es un escalar, cuando $k \in \mathbb{R}$. Es decir, cuando k sea un número real.*

Sea $A = (a_{ij})_{m,n}$ una matriz de dimensión $m \times n$, y sea $k \in R$ un escalar. Se define el producto de k por la matriz A, kA, como la matriz

$$kA = (ka_{ij})_{m,n}$$

Ejemplo 15. *Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & \sqrt{3} & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, y sea $k = -1$, entonces*

$$(-1)A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 3 & -\sqrt{3} & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Es pues lógico, escribir $(-1)A = -A$. Es decir, $-A$ es la matriz que resulta de multiplicar todas las entradas de A por -1.

Si realizamos la suma $A + (-1)A$, podemos comprobar que $A + (-1)A = A - A = 0_3$, siendo 0_3 la matriz cuadrada de orden tres cuyas entradas son todas cero.

Ejercicio 5. *Comprueba que* $A - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 6. *Sean las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 8 & -10 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcula $-2A + 7B + 4C - 3D$

<u>**Solución:**</u> Lo primero que debemos hacer es hallar las matrices $-2A$, $7B$, $4C$, $-3D$, ya que

$$E = -2A + 7B + 4C - 3D = (-2A) + 7B + 4C + (-3D)$$

$$E = (-2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 8 & -10 & 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -8 & -2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 0 & 7 \\ -28 & 7 & 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 28 & 4 & -4 \\ 32 & -40 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & -3 & -15 \\ -18 & -6 & -12 \end{pmatrix}$$

Ahora se trata de sumar las cuatro matrices. Ni que decir tiene, que para sumar cuatro matrices, debemos aplicar la asociatividad, de la misma manera que la aplicamos cuando sumamos cuatro números. Es decir, podemos sumar todas las entradas a la vez. Tenemos por tanto que:

$$E = \begin{pmatrix} -2-7+28+9 & 0+0+4-3 & 4+7-4-15 \\ -8-28+32-18 & -2+7-40-6 & 6+21+0-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 1 & -8 \\ -22 & -41 & 15 \end{pmatrix}$$

Ahora se trata de sumar las cuatro matrices. Ni que decir tiene, que para sumar cuatro matrices, debemos aplicar la asociatividad, de la misma manera que la aplicamos cuando sumamos cuatro números. Es decir, podemos sumar todas las entradas a la vez. Tenemos por tanto que:

2.3.3. Producto de matrices

Para realizar el estudio del producto de matrices, primero debemos darle un sentido a dicha operación.

La operación de suma, es bastante intuitiva, ya que al sumarse entrada a entrada, queda claro que lo que hacemos es sumar los datos de una matriz con los de la otra. La información que nos ofrece la suma es clara. Ahora bien, el producto de matrices no se realiza entrada por entrada. Realmente, si tomamos las matrices que nos da la información del consumo de las familias α, β, γ, poco sentido tiene hacer $430 \cdot 435$. Porque, ¿qué información nos ofrece el producto $430 \cdot 435$?

En primer lugar, daremos la definición de producto de una fila por una columna.

Definición 6. *Sea* $A = (a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$*, y sea* $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$*. Se define el producto* $A \cdot B$*, como*

$$(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$$

Para definir ahora el producto de dos matrices, veremos que éstas, deben tener cierta conexión. Para empezar, si nos fijamos en el producto anterior, vemos que el números de columnas de la fila, ha de ser el mismo que el número de filas de la columna. Cuando multipliquemos dos matrices, el número de columnas de la primera matriz ha de ser igual al número de filas de la segunda.

Definición 7. *Sea* $A = (a_{ij})_{m,n}$ *y* $B = (b_{ij})_{n,p}$ *(igual número de filas de* A *que de columnas de* B*). Se define el producto de* A *por* B*,* $A \cdot B$ *o* AB*, como la matriz* $C = (c_{ij})_{m,p}$*, siendo* c_{ij} *el número que resulta de multiplicar la fila* i *de* A *por la columna* j *de* B*. Es decir*

$$c_{ij} = (a_{i1},\ a_{i2},\ \ldots,\ a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \ldots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj}$$

Ejemplo 16. *Si* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$*. Si* $C = AB$*, siendo* $C = (c_{ij})_{2,2}$*, entonces*

$$c_{11} = (2\ 3\ 5) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 7 + 5 \cdot 0 = 23$$

$$c_{12} = (2\ 3\ 5) \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-5) = -7$$

$$c_{21} = (7\ 2\ 4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = 7 \cdot 1 + 2 \cdot 7 + 4 \cdot 0 = 21$$

$$c_{22} = (7\ 2\ 4) \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = 7 \cdot 6 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-5) = 26$$

Ejercicio 7. *Calcula, si es posible, el producto de los siguientes pares de matrices:*

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

- $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$

Ejercicio 8. *Halla matriz, I_3, de dimensión 3×3 que, multiplicada por cualquier matriz A de la misma dimensión, la deje igual. Es decir:*

$$A \cdot I_3 = I_3 \cdot A = A$$

La matriz I_3 se llama matriz unidad de orden 3. Cuando la tengas, sabrás obtener una matriz unidad de cualquier orden.

Solución: Sea $A = (a_{ij})_{3,3}$, y sea $I = (b_{jk})_{3,3}$. Queremos que $AI_3 = I_3A = A$, es decir, que cada vez que multipliquemos la fila i de A por la columna j de I_3 nos dé a_{ij}. Para aclararnos, Sea $C = AI_3$, $C = (c_{ij})_{3,3}$, siendo c_{ij} el resultado de multiplicar la fila i de A con la columna j de I_3. Y queremos que $c_{ij} = a_{ij}$. Así que

$$c_{11} = (a_{11},\ a_{12}, a_{13}) \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ \dots \\ b_{13} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = a_{11}$$

Como la matriz I_3 la elegimos nosotros, es lo mismo que elegir las entradas b_{ij}, luego, podemos elegir b_{11}, b_{21} y b_{31}, de manera que $a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} = a_{11}$. Así que, tomando $b_{11} = 1$, $b_{21} = 0$ y $b_{31} = 0$, tenemos que $a_{11} \cdot 1 + a_{12} \cdot 0 + a_{13} \cdot 0 = a_{11}$.

Podemos comprobar que $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.4. Inversa de una matriz

Al principio del tema, se dijo, que un objetivo importante era, dada una matriz A, encontrar otra A^{-1} (inversa), que nos permitiera resolver $AX = B$, siendo X y B, matrices. Ahora bien, no siempre se puede hallar A^{-1}, ya que, a diferencia de los números reales (salvo el cero), no siempre se puede obtener la inversa de otra matriz.

En primer lugar, para que a una matriz le podamos calcular la inversa, ésta tiene que ser cuadrada. Sin embargo, esto no es suficiente, nos encontraremos matrices, cuadradas, que no tienen matriz inversa.

Demos las definiciones previas al cálculo de la matriz inversa.

Definición 8. *Sea A una matriz cuadrada de orden n, y sea I_n la matriz cuadrada del mismo orden, tal que*

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$$

A esta matriz la llamaremos matriz unidad de orden n.

Si recordamos el ejercicio 8; vimos que en dicho ejercicio, hallábamos una matriz I_3, tal que $A \cdot I_3 = I_3 \cdot A = A$, y que $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se puede comprobar que, en general

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definición 9. *Sea A una matriz cuadrada de orden n. Diremos que A^{-1} es la matriz inversa de A, cuando $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$*

Ejemplo 17. *La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$, tiene por inversa la matriz $A^{-1} = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 3 \\ 9 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, ya que, si hacemos $A \cdot A^{-1}$ y $A^{-1} \cdot A$, podemos comprobar que, el resultado es $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.*

Ejercicio 9. *Comprueba que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_3$*

2.4.1. Pasos a seguir para hallar $\mathbf{A^{-1}}$

Utilizaremos el método de Gauss, para hallar A^{-1}. Tomaremos la matriz A, a la que queremos hallar la inversa. A su izquierda escribiremos la matriz unidad del mismo orden. Mediante transformaciones elementales en filas y/o columnas, transformaremos la matriz A en la matriz unidad, y las mismas transformaciones se las aplicaremos, de forma simultánea, a la matriz unidad. En el momento que A pase a ser I_n, la matriz de la derecha será A^{-1}. De forma esquemática, el proceso es

$$(A|I) \xrightarrow{\text{Transformaciones elementales}} (I|A^{-1})$$

Existen ciertas matrices, a las que no podemos calcular la matriz inversa. Reconoceremos que estamos ante una de dichas matrices, porque cuando apliquemos Gauss, nos encontraremos con que hay al menos una fila o columna de ceros. En este caso, paramos el proceso, repasamos las transformaciones hechas (puede haber algún error en las cuentas), y concluimos que la matriz no tiene inversa.

Ejercicio 10. *Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices o averigua que no la tiene.*

Solución:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{(A|I) \xrightarrow{\text{Transformaciones}} (I|A^{-1})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-7F_1]{F_2-4F_1}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-2F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$

Vemos que en la matriz A hemos conseguido una fila de ceros, por lo tanto, estamos ante una matriz **no inversible**.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(A|I) \xrightarrow{\text{Transformaciones}} (I|A^{-1})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_1}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2-2F_1]{F_1-2F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1+F_3}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Hay una forma muy fácil de comprobar que la matriz que hemos hallado, es justamente la matriz inversa, y es demostrar que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_3$. Ahora bien:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y de la misma manera, vemos que $A^{-1} \cdot A = I_3$.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(A|I) \xrightarrow{\text{Transformaciones}} (I|A^{-1})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2-F_1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+2F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -4 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3:(-10)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \end{array}\right) \xrightarrow[F_2+2F_3]{F_1-3F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{3}{10} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{10} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \end{array}\right)$$

Luego la matriz inversa de A, es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{5}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Se puede comprobar que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_3$.

Ejercicio 11. *Comprueba si las siguientes matrices tienen o no inversa:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

2.5. Rango de una matriz

Cuando aplicamos el método de Gauss en la resolución de matrices, lo que hacemos es convertir a la matriz del sistema, en una matriz diagonal superior. Es decir, hacemos ceros por debajo de la diagonal principal. De esta manera, podemos comprobar como será el sistema; si será compatible o incompatible, y si es compatible, si se trata de un compatible o de un compatible indeterminado. Todo ello, nos lo dice el número de ceros que hay en la última de las filas. A parte de dicha información, podemos sacar otra información, podemos decir qué rango tiene. Vemos qué significa el rango de una matriz y cómo calcularlo.

Definición 10. *Sea A una matriz de orden $n \times m$. Sea $\tilde{A}$ la matriz que resulta de aplicarle Gauss a dicha matriz. Definiremos el **rango** de A, como el número de filas distintas de cero que tiene $\tilde{A}$.*

Ejercicio 12. *Calcula el rango de la siguiente matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & m \end{pmatrix}$$

según los valores del parámetro m.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & m \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & m-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

De F_3 tenemos que si $m = 0$ entonces la matriz $\tilde{A}$ tendrá dos filas distintas de cero y luego el rango será 2. Si por el contrario, $m \neq 0$, el rango de A será 3.
Por tanto, si $m = 0$ el rango es 2 y si es $m \neq 0$ el rango es 3.

Ejercicio 13. *Calcula el rango de la siguiente matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m+2 \\ 1 & 1 & m & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & 1 & 1 \\ 0 & 1+m & 0 & 1+m \\ 0 & 1+m & m-1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & 1 & 1 \\ 0 & 1+m & 0 & 1+m \\ 0 & 0 & m-1 & 2-m \end{array}\right)$$

De F_2 podemos deducir que si $1 + m = 0 \Longrightarrow m = -1$, entonces, el rango de A es 2, mientras que si $m \neq -1$, el rango de la matriz A es 3, ya que, en F_3 no podemos hacer cero, de forma simultánea $m - 1$ y $2 - m$.

Ejercicio 14. *Calcula el rango de las siguientes matrices:*

1. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Ejercicio 15. *Calcula el rango de las siguientes matrices, según los valores del parámetro* m*:*

1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & m \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} m+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & m \\ 1 & m & 2 \end{pmatrix}$

2.6. Expresión matricial de un sistema

Cualquier sistema de ecuaciones se puede expresar como una ecuación matricial. A saber, sea por ejemplo el sistema:

$$\left\{\begin{array}{c} x+y-z=3 \\ 3x+4y-z=5 \\ x+2y+3z=-1 \end{array}\right. \tag{2.1}$$

Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes, sea $B=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ la de los términos independientes, y sea $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ la matriz de las incógnitas. Entonces, el sistema (2.1) se puede expresar como

$$AX=B$$

Puesto que la matriz A es una matriz regular, es decir, existe A^{-1}, podemos despejar X, siendo

$$X=A^{-1}B$$

Ejercicio 16. *Traduce los siguientes sistemas a ecuaciones matriciales, comprobando, si se puede despejar la matriz de incógnitas:*

1. $\left\{\begin{array}{c} x+y+z=3 \\ x-2y+2z=1 \\ 2x+y+3z=6 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{c} x+y+z=6 \\ x-y-z=-4 \\ 3x+y+z=8 \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{c} 3x-2y+z=1 \\ x+y-z=2 \\ 6x+y-2z=10 \end{array}\right.$

2.7. Problemas resueltos

1. (**Castilla-La Mancha, junio de 2009**) Despejar la matriz X en la ecuación: $2X+AX=I$

2. Halla la matriz X de la ecuación anterior sabiendo que: $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   Solución:

a) $2X + AX = I \Longrightarrow (2I + A)X = I \Longrightarrow X = (2I + A)^{-1}I = (2I + A)^{-1}$

b) Evidentemente tendremos que hallar la matriz $(2I + A)^{-1}$

$$2I + A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -23 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - 3F_1]{1/2F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 + 3F_2]{F_1 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3/2 & -3 \end{array}\right)$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 3/2 & -3 \end{pmatrix}$$

3. (**Castilla-La Mancha, septiembre de 2009**)

   a) Despeja la matriz X en la ecuación $A^2 + A \cdot X = B$

   b) Halla la matriz X de la ecuación anterior sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $A^2 + A \cdot X = B \Longrightarrow AX = B - A^2 \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(B - A^2) \Longrightarrow X = A^{-1}B - A$

b) Hallemos A^{-1}. Para ello, como siempre tomamos la matriz A junto con la matriz I_3, identidad de orden 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 + F_2]{F_1 - F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{1/2F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 + F_3]{F_2 - F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

Así pues: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Resolvemos la ecuación:

$$X = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

4. (**Comunidad Valenciana, septiembre de 2009**) Obtén todas las matrices columna $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ que sean soluciones de la ecuación matricial $AX = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. ¿Cuáles de esas matrices X tienen la primera fila nula?

   Solución: Nos están pidiendo que resolvamos un sistema de ecuaciones que está escrito en modo matricial. Aplicamos Gauss a la matriz del sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

   Estamos ante un S.C.I. Si $z = \lambda \Longrightarrow y - z = -1 \Longrightarrow y = -1 + \lambda$. Y como $x + 2y = 0 \Longrightarrow x + 2(-1 + \lambda) = 0 \Longrightarrow x = 2 - 2\lambda$

   Las matrices columna que nos pide el ejercicio son $X = \begin{pmatrix} 2 - 2\lambda \\ -1 + \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$. Y las matrices que tiene la primera fila nula son $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ya que $x = 0 \Longrightarrow 2 - 2\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 1$.

5. (**Andalucía 2009**)

a) Plantee y resuelva el sistema de ecuaciones dado por:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1-2x & 0 \\ 2 & x+1 & 2 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, calcule la matriz $M = A^t \cdot A^{-1}$.

Solución:

a) El sistema que resulta es:

$$\left\{ \begin{array}{c} 3y + 2(1-2x) = -1 \\ 2y + 2(x+1) + 2 = 2 \\ 2 + z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -4x + 3y = -3 \\ 2x + 2y = -2 \\ z = -2 \end{array} \right.$$

Basta resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que queda.

La solución es $(0, -1, -2)$.

b) Calculamos en primer lugar A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{array} \vdots \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \vdots \begin{array}{cc} -5 & 3 \\ -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[-F_2]{1/2F_1} \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \vdots \begin{array}{cc} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{array} \right)$$

Tenemos que $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Luego:

$$M = A^t \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

6. (**Andalucía 2009**) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcule A^2 y $2B + I_2$.

b) Resuelva la ecuación matricial $AX - I_2 = 2B^2$.

Solución:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$2B + I_2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $AX - I_2 = 2B^2 \Longrightarrow AX = 2B^2 + I_2 \Longrightarrow X = A^{-1}(2B^2 + I_2)$. Necesitamos pues, hallar A^{-1}.

$$A^{-1} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 2 & \vdots & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{1/2F_2} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \vdots & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$2B^2 + I_2 = 2\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 16 & 4 \\ -8 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 4 \\ - & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 & 4 \\ -8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 9/2 \\ -4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

7. (**Andalucía 2009**) Sea la igualdad $AX + B = A$, donde A, X y B son matrices cuadradas de la misma dimensión.

   a) Despeje la matriz X en la igualdad anterior, sabiendo que A tiene inversa.

   b) Obtenga la matriz X en la igualdad anterior, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Solución:

a)

$$AX + B = A \Longrightarrow AX = B - A \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}A - A^{-1}B \Longrightarrow X = I_2 - A^{-1}B$$

b) Hallamos A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccccc} 2 & 5 & \vdots & 1 & 0 \\ 1 & 3 & \vdots & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & \vdots & 0 & 1 \\ 2 & 5 & \vdots & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & \vdots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \vdots & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2 + 3F_1} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \vdots & 0 & -5 \\ 0 & -1 & \vdots & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{(-1)F_2} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \vdots & 0 & -5 \\ 0 & 1 & \vdots & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = I_2 - A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 10 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

8. (**Andalucía 2009**) Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \text{y } C = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -6 \\ 0 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Determine X en la ecuación matricial $X \cdot A - 2B = C$.

Solución:

$$X \cdot A - 2B = C \Longrightarrow XA = C + 2B \Longrightarrow X = (C + 2B) \cdot A^{-1}$$

$$C + 2B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -6 \\ 0 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$A^{-1} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3+3F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 13 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[F_3+13F_2]{F_1+4F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & -1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 13 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[(-1)F_2 \text{ y } (-1)F_3]{(-1)F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -13 & -1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{F_1-F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -13 & -1 \end{array} \right) \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & -13 & -1 \end{pmatrix}$$

Como $C + 2B = I_3$,

$$X = (C + 2B) \cdot A^{-1} = I_3 \cdot A^{-1} = A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & -13 & -1 \end{pmatrix}$$

2.8. Ejercicios propuestos

1. (**Comunidad Valenciana, junio de 2008**) Determina X que verifica la ecuación $AX + I = AB^t$, siendo I la matriz identidad, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y B^t la traspuesta de B.

Solución: $X = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

2. (**Andalucía, junio de 2008**) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

   a) Calcule los valores de a y b para que $A \cdot B = B \cdot A$

   b) Para $a = 1$ y $b = 0$, resuelva la ecuación matricial

$$X \cdot B - A = I_2$$

Solución: *a*) $a = 1,\ b = 4.$ *b*) $X = \begin{pmatrix} -11 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

3. (**Castilla-La Mancha, junio de 2008**)

   a) Despeja la matriz X en la ecuación $2X - B = AX$

   b) Hallar la matriz X de la ecuación anterior, sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $X = (2I - A)^{-1} \cdot B$ *b*) $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. (**Murcia, septiembre de 2008**) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, encontrar una matriz B tal que $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Solución: $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Capítulo 3

Programación lineal

3.1. Introducción

En este tema aprenderemos a resolver problemas empresariales sencillos. Se trata de la puesta en escena de unas situaciones que, se dan en la realidad a un nivel superior. Este tema es pues, la base para resolver problemas reales a nivel de empresa.

Comenzaremos con un problema que le surge a un grupo de compañeros de segundo de Bachillerato. El problema consiste en formar grupos, de manera que, pueda garantizarles un mayor ingreso de dinero, elaborando encuestas para una empresa.

Como veremos, es un problema empresarial, pero a nivel de alumnos de segundo de Bachillerato.

3.2. Función objetivo

Estudiemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 18. *(**PAU Murcia 2005**) Un grupo de alumnos formado por veinte chicas y diez chicos organizan un viaje. Para que el viaje les salga más económico deciden pedir trabajo por las tardes en una compañía que se dedica a realizar encuestas y que contrata a equipos de jóvenes de dos tipos:*

◇ *Tipo A: Parejas (una chica y un chico).*

◇ *Tipo B: Equipos de cuatro (tres chicas y un chico).*

La compañía paga 30 *euros por la tarde de la pareja y 50 euros por la tarde del equipo de cuatro.*

a) ¿Cómo les conviene distribuirse para sacar la mayor cantidad posible de dinero?

b) ¿Y si les pagara 30 *euros por la tarde de la pareja y* 30 *euros por la tarde del equipo de cuatro?*

Para resolver este problema, nos vamos a plantear unas incógnitas, y una **función objetivo**. La función objetivo no es más que una función en dos variables, que nos va a proporcionar el dinero que ganaremos según hagamos el reparto.

Las incógnitas, como siempre, nos las pide el enunciado del problemas. De la pregunta: *¿cómo les conviene distribuirse para sacar la mayor cantidad posible de dinero?* se deduce que podemos tomar:

$$\begin{array}{l} x \longrightarrow \text{número de parejas tipo } A \\ y \longrightarrow \text{número de parejas tipo } B \end{array}$$

Según ésto, obtendremos un beneficio B de:

$$B(x, y) = 30x + 50y$$

Analicemos con un poco más de detalle a la función. Si por ejemplo, nos dejamos llevar por el dinero que se le da al equipo tipo B, y hacemos el mayor número posible de dichos grupos, que es 6, vemos que, sacamos 300 €. Si hacemos 6 grupos B, ya hemos colocado a 18 chicas y a 6 chicos con lo que, quedarían 4 chicos y dos chicas por colocar. Con estos compañeros, podemos hacer dos grupos A y quedarían dos chicos sin trabajar. ¿Es posible mejorar esto? ¿podemos encontrar otra opción en la que todos trabajen y se saque más dinero? Contestaremos a estas preguntas en la siguiente sección cuando estudiemos las restricciones del problema.

Antes de introducir el estudio de las restricciones, proponemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 19. *Una finca necesita al día 9 kg de abono nitrogenado (N), 5 de abono fosforado (P) y 6 de potasio (K). En la Cooperativa Agrícola se venden dos tipos de cajas. Las de tipo A llevan una bolsa con 1 kg de N, otra con 1 kg de P y otra con 2 kg de K y valen 2 euros. Las de tipo B tiene una bolsa con 3 kg de N, otra con 1 kg de P y otra con 1 kg de K y valen 3 euros.*

1. *¿Cuántas cajas de cada tipo deberán comprarse para cubrir las necesidades de la finca con mínimo gasto?*
2. *¿Cuál es ese mínimo gasto necesario?*
3. *¿Qué tipos de abono se aprovecharán completamente y de cuáles sobrarán?*

En este caso, el problema es el de reducir costes. De nuevo, el problemas nos lleva a identificar las incógnitas de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l} x \longrightarrow \text{número de cajas de tipo } A \\ y \longrightarrow \text{número de cajas de tipo } B \end{array}$$

La función objetivo es una función de coste, así que, en este caso la denotaremos por C:

$$C(x, y) = 2x + 3y$$

3.3. Restricciones

Los siguientes ejemplos nos enseñarán a sacar las restricciones de un problema.

Ejemplo 20. *Volvamos de nuevo, al primer problema. Traduzcamos las condiciones al lenguaje algebraico. Puesto que los equipos son de chicos y chicas, atenderemos al número de chicos y al de chicas, de manera que, intentemos que nadie se quede sin trabajar. Por ello, la siguiente tabla nos puede venir bien:*

	Chicos	*chicas*
Equipo A (x)	*1*	*1*
Equipo B (y)	*1*	*3*
	10	*30*

Según la tabla, y puesto que no hay más de 10 *chicos y* 20 *chicas, la traducción será la siguiente:*

$$\begin{cases} x + y \leq 10 \text{ (chicos)} \\ x + 3y \leq 20 \text{ (chicas)} \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Comprobamos que las condiciones de la empresa, junto a nuestra situación, es decir, las restricciones del problema, se traducen en una serie de inecuaciones. La última inecuación, es la traducción de una obviedad; no puede haber un número negativo de equipos. Dejémoslo en el aire por el momento.

Pasemos a escribir las restricciones del problema de los abonos.

Ejemplo 21. *Recordemos el problema de la finca:*

Una finca necesita al día 9 *kg de abono nitrogenado* (N), 5 *de abono fosforado* (P) *y* 6 *de potasio (K). En la Cooperativa Agrícola se venden dos tipos de cajas. Las de tipo A llevan una bolsa con* 1 *kg de* N, *otra con* 1 *kg de* P *y otra con* 2 *kg de* K *y valen* 2 *euros. Las de tipo B tiene una bolsa con* 3 *kg de* N, *otra con* 1 *kg de* P *y otra con* 1 *kg de* K *y valen* 3 *euros.*

Para el problema de los abonos, nos planteamos la siguiente tabla:

	Abono (N)	Abono (P)	Abono (K)
Cajas tipo A (x)	1	1	2
Cajas tipo B (y)	3	1	1
	9	5	6

Se necesitan, al menos, 9 *kg* de abono nitrogenado, 5 de abono fosforado y 6 de potasio. la expresión “al menos” , la vamos a traducir en $\geq$, de donde:

$$\begin{cases} x + 3y \geq 9 \\ x + y \geq 5 \\ 2x + y \geq 6 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Ahora nos hacemos la pregunta de qué hacer con estas restricciones. Está claro que, cualquier par de números (x, y) que cumplan las cuatro desigualdades de arriba nos vale, pero ¿uno cualquiera es el óptimo a nuestros intereses?

Volvamos de nuevo al ejemplo de los equipos de alumnos de Bachillerato. Queremos encontrar la mejor combinación, es decir, la distribución que nos proporcione el mayor ingreso. Recordemos las restricciones:

$$\left\{\begin{array}{c} x+y \leq 10 \text{ (chicos)} \\ x+3y \leq 20 \text{ (chicas)} \\ x, y \geq 0 \end{array}\right.$$

Tomemos una pareja de números (x, y) al azar, que cumpla las restricciones, como por ejemplo, $(2, 6)$, es decir, 2 parejas de chico y chica, y 6 equipos de cuatro, de manera que:

$$\left\{\begin{array}{c} 2+6 \leq 10 \text{ (chicos)} \\ 2+3\cdot 6 \leq 20 \text{ (chicas)} \\ 2, 6 \geq 0 \end{array}\right.$$

Ahora bien, ¿es la mejor opción? La función beneficio, $B(x, y)$, nos dice que ganamos:

$$B(2, 6) = 30 \cdot 2 + 50 \cdot 6 = 360 \text{ €}$$

Veamos ahora si el par $(5, 5)$ también cumple las restricciones:

$$\left\{\begin{array}{c} 5+5 \leq 10 \text{ (chicos)} \\ 5+3\cdot 5 \leq 20 \text{ (chicas)} \\ 5, 5 \geq 0 \end{array}\right.$$

sin embargo, para este par, obtenemos un ingreso de

$$B(x, y) = 30 \cdot 5 + 50 \cdot 5 = 400 \text{ €}$$

El par $(5, 5)$ nos da un beneficio mayor que el par $(2, 6)$, y sin embargo, ambos cumplen las desigualdades. Esto nos lleva a buscar un método, que, lo primero, nos busque soluciones, y segundo, halle el par óptimo a nuestros intereses.

3.4. Región factible. Puntos extremos

En esta sección vamos a representar geométricamente las restricciones. En el siguiente ejemplo, vamos a dibujar lo que llamaremos región factible de un problema que no conocemos, pero del que sí tenemos sus inecuaciones.

Ejemplo 22. *Vamos a representar, geométricamente las restricciones:*

$$\left\{\begin{array}{l} 3x+4y \leq 12 \\ 2x+y \geq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right.$$

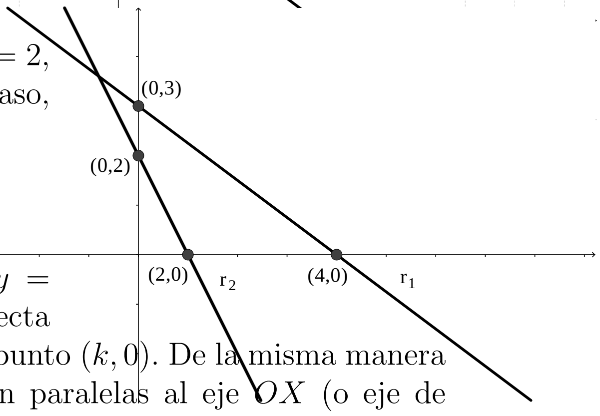
En primer lugar, representaremos las rectas $r_1 \equiv 3x+4y = 12$, $r_2 \equiv 2x+y = 2$, $r_3 \equiv x = 0$, $r_4 \equiv y = 0$. Para ello, damos valores a la x, al menos 2, de manera que podamos trazar la recta.

Comencemos con la recta $r_1 \equiv 3x + 4y = 12$, que, como vemos, pasa por los puntos $(4, 0)$ y $(0, 3)$. Estos puntos, los podemos obtener mediante la tabla:

x	y
0	3
4	0

De la misma manera representamos la recta $r_2 \equiv 2x+y = 2$, de la que obtenemos los puntos $(0, 2)$ y $(1, 0)$. En este caso, la tabla de valores es:

x	y
0	2
1	0

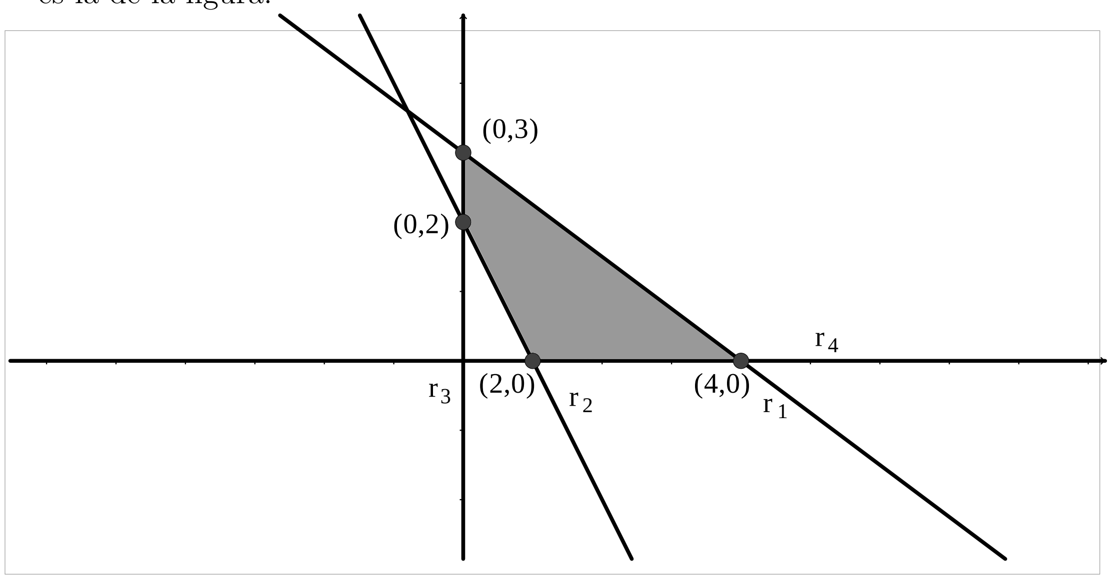


Para representar las rectas $r_3 \equiv x = 0$ e $r_4 \equiv y = 0$, recordemos que, una recta del tipo $x = k$, es una recta paralela al eje OY (o eje de ordenadas), que pasa por el punto $(k, 0)$. De la misma manera ocurre con las rectas del tipo $y = k$; en este caso, son paralelas al eje OX (o eje de abscisas).

El siguiente paso es, averiguar que semiplano debemos tomar para cada una de las inecuaciones que forman las restricciones. Por ejemplo, en el caso de la inecuación $3x+4y \leq 12$ seguiremos los siguientes pasos:

- P1 Elegimos un punto que no pertenezca a la recta $3x + 4y = 12$, como por ejemplo el $(0, 0)$.
- P2 Averiguamos si cumple, o no, la desigualdad: $3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0 \leq 12$.
- P3 Si la cumple, tomamos el semiplano que contiene al punto elegido. Si no la cumple, tomamos el semiplano simétrico, con respecto a la recta anterior.

Haremos lo mismo con cada una de las desigualdades que forman el conjunto de restricciones. Las restricciones $x \geq 0$ e $y \geq 0$ forman el primer cuadrante. La región final es la de la figura:



La región resultante es un polígono convexo. Los vértices de este polígono son: el $(4,0)$, el $(1,0)$, el $(0,2)$ y el $(0,3)$. Estos vértices serán en lo sucesivo de extrema importancia, ya que uno de ellos será el punto donde se alcance el óptimo, ya sea para maximizar beneficios o para minimizar costes. A estos puntos, los llamaremos **puntos extremos**.

Nota: No todas las regiones factibles son acotadas (cerradas). Se puede dar el caso de tener infinitos puntos extremos. Trataremos más adelante alguno de estos casos. De momento, nos vamos a dedicar a resolver problemas en los que las regiones sean acotadas.

Ya estamos en disposición de dar solución a los dos problemas que hemos planteado hasta la fecha. Se trata de hallar la región factible. Tomamos los vértices del polígono y los sustituimos en la función objetivo. El que nos aporte un mayor beneficio o menor coste es el que nos va a dar la solución. Veamos cada uno de los dos casos.

Ejemplo 23. *Un grupo de alumnos formado por veinte chicas y diez chicos organizan un viaje. Para que el viaje les salga más económico deciden pedir trabajo por las tardes en una compañía que se dedica a realizar encuestas y que contrata a equipos de jóvenes de dos tipos:*

- ◇ *Tipo A: Parejas (una chica y un chico).*
- ◇ *Tipo B: Equipos de cuatro (tres chicas y un chico).*

La compañía paga 30 *euros por la tarde de la pareja y 50 euros por la tarde del equipo de cuatro.*

a) ¿Cómo les conviene distribuirse para sacar la mayor cantidad posible de dinero?

b) ¿Y si les pagara 30 *euros por la tarde de la pareja y* 30 *euros por la tarde del equipo de cuatro?*

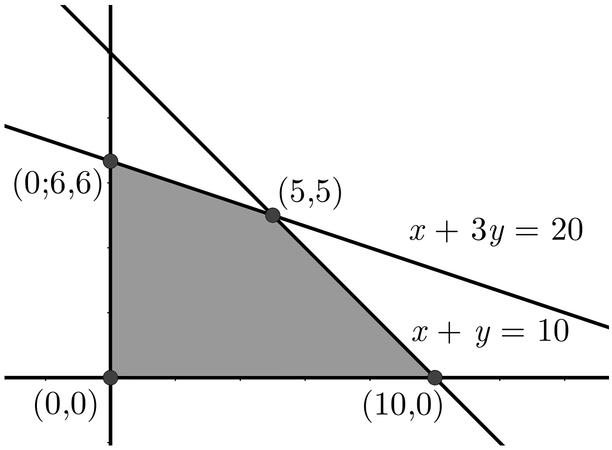
Solución: Lo primero es representar las rectas $r_1 \equiv x + y = 10$ y $r_2 \equiv x + 3y = 20$. Recordemos que las restricciones $x \geq 0$ e $y \geq 0$, forman el primer cuadrante.

1. $x + y = 10 \Longrightarrow$ $\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 10 \\ \hline 10 & 0 \end{array}$ Los puntos a representar son: $(10,0)$ y $(0,10)$.

2. $x + 3y = 20 \Longrightarrow$ $\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 6,\widehat{6} \simeq 6,6 \\ \hline 20 & 0 \end{array}$ Los puntos a representar son: $(0;6,6)$ y $(20,0)$.

Para representar las rectas, hemos tomado cada cuadrícula como si fueran dos unidades. En muchos casos, lo que haremos será algo parecido, tendremos que cambiar la escala, para poder representar.

Puesto que, el $(0,0)$ cumple las dos primeras restricciones, la región factible está formada por los puntos que se encuentran en la zona sombreada. Los vértices de la misma son: $(0,0)$, $(10,0)$, $(0;6,6)$ y el vértice que se encuentra en la zona interior del dibujo. ¿Cómo calculamos este punto? No hay más que caer en la cuenta de que este punto, es la intersección de las rectas r_1 y r_2. Basta pues, con resolver el sistema



$$\left.\begin{array}{r} x+y=10 \\ x+3y=20 \end{array}\right\}$$

La solución de este sistema es $x = 5$ e $y = 5$.

El siguiente paso es, sustituir los puntos extremos, es decir, los vértices, en la función objetivo. Y en este caso, la solución está en el punto que nos de un mayor valor para la función $B(x, y)$:

- $(0, 0) \Longrightarrow B(0, 0) = 30 \cdot 0 + 50 \cdot 0 = 0$
- $(10, 0) \Longrightarrow B(0, 0) = 30 \cdot 10 + 50 \cdot 0 = 300$
- $(0; 6, 6) \Longrightarrow B(0, 0) = 30 \cdot 0 + 50 \cdot 6,6 = 330$
- $(5, 5) \Longrightarrow B(0, 0) = 30 \cdot 5 + 50 \cdot 5 = \boxed{400}$

Como ya dijimos, se saca más dinero con 5 equipos de cada tipo.

3.5. Problemas resueltos

1. (**Andalucía, junio de 2009**) En un examen de Matemáticas se propone el siguiente problema: indique dónde se alcanza el mínimo de la función $F(x, y) = 6x + 3y - 2$ en la región determinada por las restricciones

$$2x + y \geq 6,\ 2x + 5y \leq 30 \text{ y } 2x - y \leq 6$$

   a) Resuelva el problema.

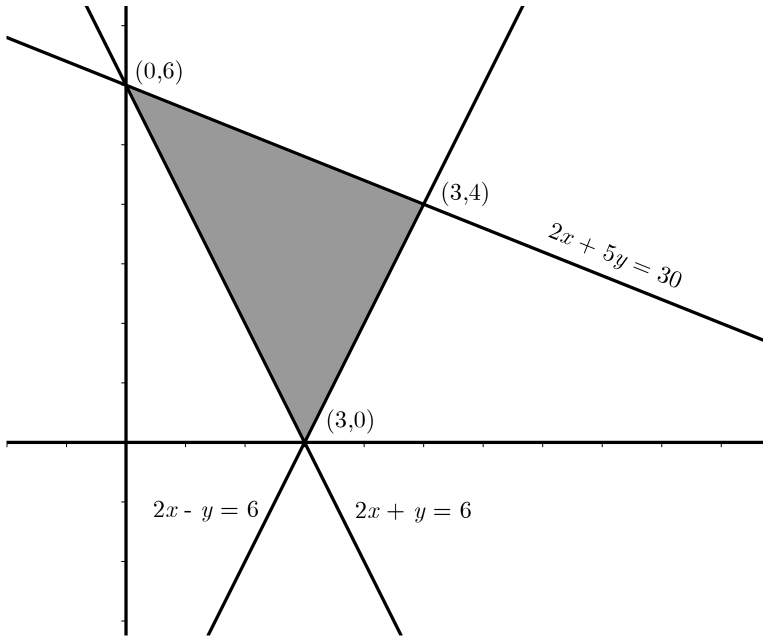
   b) Ana responde que se alcanza en $(1, 4)$ y Benito que lo hace en $(3, 0)$. ¿Es cierto que se alcanza el mínimo en $(1, 4)$? ¿Y en (3,0)?

Solución:

a) Vamos primeramente a representar las restricciones. Para ello representamos las rectas

$$2x + y = 6,\ 2x + 5y = 30 \text{ y } 2x - y = 6$$

(lo más cómodo en estos casos es ver los puntos de corte y luego elegir la región que sirve de conjunto de soluciones). Una vez representadas las restricciones, la



región factible es la representada en la figura.

Los vértices o candidatos a máximos y a mínimos son precisamente $V_1(3,0)$, $V_2 = (0,6)$ y $V_3 : \begin{cases} 2x - y = 6 \\ 2x + 5y = 30 \end{cases}$, es decir, V_3 es la intersección de las rectas del sistema. Luego $V_3(3,4)$.

Por otro lado, $F(x,y) = 6x + 3y - 2$ y sólo hay que sustituir los puntos que tenemos en F:
$F(3,0) = 18 - 2 = 16$
$F(0,6) = 18 - 2 = 16$
$F(3,4) = 18 + 12 - 2 = 28$

Así, podemos asegurar que el mínimo se alcanza en $(0,6)$, $(3,0)$ y en cualquier punto perteneciente al segmento comprendido entre ambos.

b) Ana responde que el mínimo se alcanza en $(1,4)$. Para ver si tiene razón, veamos si $(1,4)$ pertenece a la recta $2x + y = 6$ que pasa por V_1 y V_2.

$$V_3 \in r \equiv 2x + y = 6 \text{ porque } \ 2 \cdot 1 + 4 = 6$$

Efectivamente, $(1,4)$ es mínimo de la función objetivo (la minimiza).

Benito también tiene razón, pues $(3,0)$ es vértice de la región factible.

2. (**Murcia, junio de 2009**) Un atleta debe tomar por lo menos 4 unidades de vitamina A, 6 unidades de vitamina B y 23 de vitamina C cada día. Existen en el mercado dos productos, P_1 y P_2, que en cada bote contienen las siguientes unidades de esas vitaminas:

	A	B	C
P_1	4	1	6
P_2	1	6	10

Si el precio de un bote del producto P_1 es de 100 euros y el de un bote del producto P_2 es de 160 euros, averiguar:

a) ¿Cómo deben mezclarse ambos productos para obtener la dieta deseada con el mínimo precio?

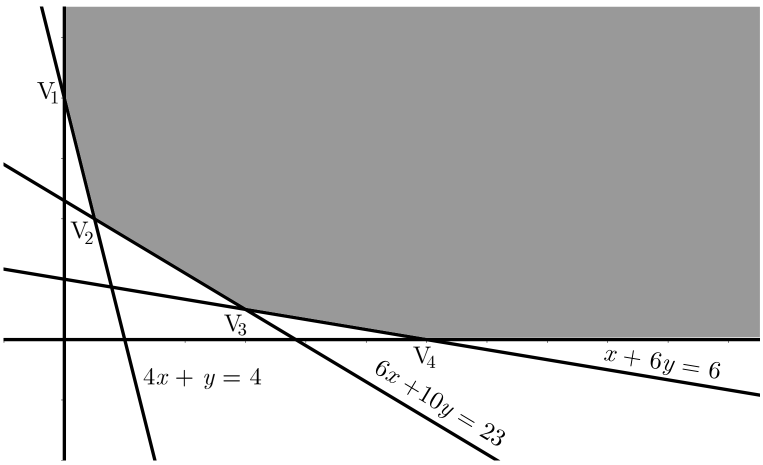
b) ¿Qué cantidad tomará de cada vitamina si decide gastar lo menos posible?

Solución:

La estructura del problema consiste en:

$$\text{Minimizar: } 100x + 160y$$
$$\text{s.a.} \begin{cases} 4x + y \geq 4 \\ x + 6y \geq 6 \\ 6x + 10y \geq 23 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Tomamos la información necesaria para construir la región factible: las intersecciones con los ejes coordenados de las rectas $4x + y = 4$, $x + 6y = 6$ y $6x + 10y = 23$ son los puntos $(0,4)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(6,0)$, $(0,23/10)$, $(23/6,0)$.



Veamos cuáles son los candidatos a mínimo:

$V_1(0,4)$

$$V_2 : \begin{cases} 4x + y = 4 \\ 6x + 10y = 23 \end{cases} \longrightarrow V_2\left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

$V_3 : \left\{ \begin{array}{l} 6x + 10y = 23 \\ x + 6y = 6 \end{array} \right. \longrightarrow V_3\left(3, \dfrac{1}{2}\right)$

$V_4(6, 0)$

Hagamos la valoración de los puntos en la función objetivo $F(x, y) = 100x + 160y$:

$F(0, 4) = 640$

$F\left(\dfrac{1}{2}, 2\right) = 50 + 320 = 370$

$F\left(3, \dfrac{1}{2}\right) = 300 + 80 = 380$

$F(6, 0) = 600$

a) La dieta deseada con el mínimo precio se obtiene con medio bote del producto 1 y 2 botes del producto 2.

b) Tomará 4 unidades de la vitamina A, 25/2 de la vitamina B y 23 unidades de la vitamina C.

3. (**Murcia, septiembre de 2009**) Una escuela prepara una excursión para 400 alumnos. La empresa de transporte dispone de 40 plazas y 10 de 50 plazas, pero sólo dispone de 9 conductores. El alquiler de 1 autocar grande es de 80 € y el de uno pequeño de 60 €.

   a) Calcular cuántos autocares de cada tipo hay que utilizar para que la excursión resulte lo más económica posible para la escuela.

   b) ¿Cuántas plazas sobrarán?

   Identificar en el planteamiento las variables, las restricciones y la función objetivo a optimizar.

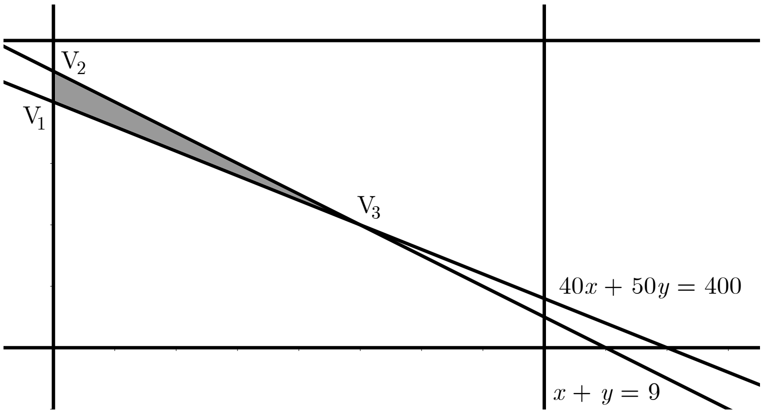
Solución: Sea x el número de autocares de 40 plazas e y el de 50 plazas.

Para que la excursión sea lo más económica posible, hay que reducir gastos, para ello habrá que minimizar el número de autocares pero satisfaciendo las necesidades mínimas (llevar a los 400 alumnos) por ello, el problema es:

$$\text{Minimizar: } F(x, y) = 60x + 80y$$

$$\text{s.a.} \left\{ \begin{array}{l} 40x + 50y \geq 400 \\ x \leq 8 \text{ e } y \leq 10 \\ x + y \leq 9 \\ x, y \geq 0 \end{array} \right.$$

Estas restricciones son porque el número de plazas es de 400, sólo hay 8 autobuses de 40 plazas (x), sólo hay 10 autobuses de 50 plazas (y) y la empresa sólo dispone de 9 conductores. Y con esta información construimos la región factible.



Los vértices son:

$V_1(0,8)$

$V_2(0,9)$

$$V_3 : \left\{ \begin{array}{c} 40x + 50y = 400 \\ x + y = 9 \end{array} \right. \longrightarrow V_3(5,4)$$

Realizamos la valoración de los puntos en la función objetivo:

$F(x,y) = 60x + 80y$

$F(0,8) = 60 \cdot 0 + 80 \cdot 8 = 640$ €

$F(0,9) = 60 \cdot 0 + 80 \cdot 9 = 720$€

$F(5,4) = 60 \cdot 5 + 80 \cdot 4 = 620$ €

Así, la solución más barata es contratar 5 autocares de 40 plazas y 4 autocares de 50 plazas.

4. (**Madrid, junio de 2009**) Una carpintería vende paneles de contrachapado de dos tipos A y B. Cada m^2 de panel del tipo A requiere $0,3$ horas de trabajo para su fabricación y $0,2$ horas de trabajo para su barnizado, proporcionando su venta un beneficio de 4 €. Cada m^2 de panel del tipo B requiere $0,2$ horas de trabajo para su fabricación y $0,2$ horas para su barnizado, proporcionando su venta un beneficio de 3 €. Sabiendo que en una semana se trabaja un máximo de 240 horas en el taller de fabricación y de 200 horas en el taller de barnizado. Calcular los m^2 de cada tipo de panel que debe vender semanalmente la carpintería para obtener el máximo beneficio. Calcular dicho beneficio máximo.

   Solución: Sea x los m^2 de paneles del tipo A e y los m^2 de paneles del tipo B. La función objetivo es
$$B(x,y) = 4x + 3y$$

   En una tabla se ve claramente cómo se plantea el problema:

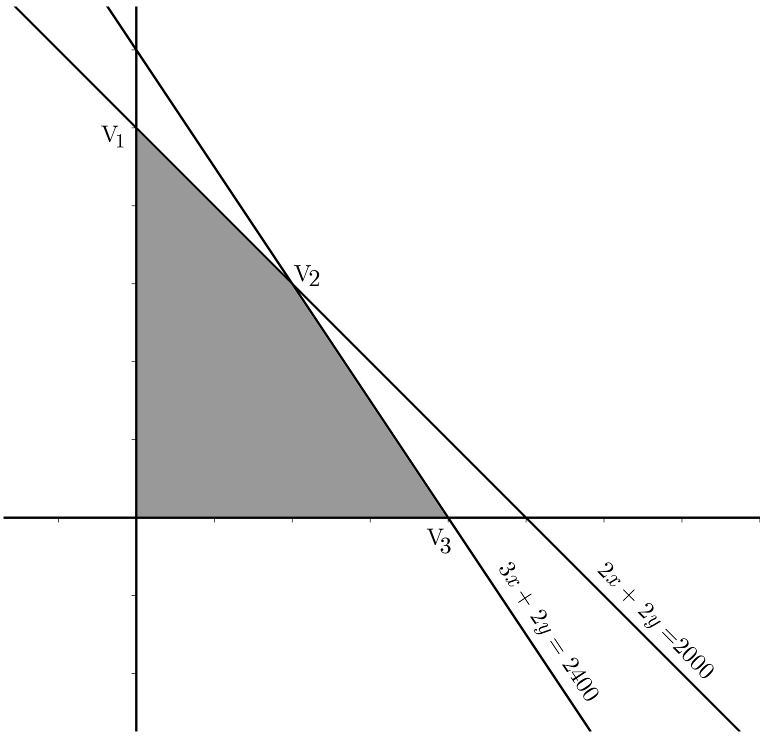
	Trabajo Fabricación	Trabajo Barnizado	Beneficio
Paneles tipo A	$0,3$	$0,2$	4 €
Paneles tipo B	$0,2$	$0,2$	3 €
Máximo horas	$240\ h$	$200\ h$	

Se trata pues de resolver el problema:

$$\text{Maximizar: } B(x,y) = 4x + 3y$$

$$\text{s.a. } \left\{ \begin{array}{c} 0,3x + 0,2y \leq 240 \longrightarrow 2x + 3y = 2400 \\ 0,2x + 0,2y \leq 200 \longrightarrow 2x + 2y = 2000 \\ x, y \geq 0 \end{array} \right.$$

La región factible, como siempre, son las soluciones del sistema de restricciones.



Los candidatos a maximizar la función objetivo serán

$V_1(0, 100)$

$$V_2 : \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 2400 \\ 2x + 2y = 2000 \end{array} \right. \longrightarrow V_2(400, 600)$$

$V_3(800, 0)$

Hagamos ahora la valoración de los puntos en la función objetivo $B(x, y) = 4x + 3y$:

$B(0, 1000) = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 1000 = 3000$

$B(400, 600) = 4 \cdot 400 + 3 \cdot 600 = 3400$

$B(800, 0) = 4 \cdot 800 = 3200$ €.

Así, podemos asegurar que se debe fabricar 400 paneles del tipo A y 600 del tipo B para obtener beneficio máximo.

5. (**Madrid, septiembre de 2009**) Una refinería utiliza dos tipos de petróleo A y B, que compra a un precio de 350 € y 400 €por tonelada respectivamente. Por cada tonelada de petróleo de tipo A que refina, obtiene $0,10$ toneladas de gasolina y $0,35$ toneladas fuel-oil. Por cada tonelada de petróleo tipo B que refina, obtiene $0,05$ toneladas de gasolina y $0,55$ toneladas de fuel-oil. Para cubrir sus necesidades necesita obtener al menos 10 toneladas de gasolina y al menos 50 toneladas de fuel-oil. Por cuestiones de capacidad no pueden comprar más de 100 toneladas de cada tipo de petróleo ¿Cuántas toneladas de petróleo de cada tipo debe comprar la refinería para cubrir sus necesidades a mínimo coste? Determinar dicho coste mínimo.

Solución: Comencemos metiendo los datos en una tabla:

	Gasolina	Fuel-oil	Total
A	$0,1$	$0,35$	350
B	$0,05$	$0,55$	400
Total	10 Tm (al menos)	50 Tm (al menos)	

El problema a resolver pasa a ser:

$$\text{Minimizar: } C(x,y) = 350x + 400y$$

$$\text{s.a.} \left\{ \begin{array}{l} 0,1x + 0,05y \geq 10 \\ 0,35x + 0,55y \geq 50 \\ x, y \leq 100 \\ x, y \geq 0 \end{array} \right.$$

Construimos las región factible a partir de las inecuaciones de arriba.

Los vértices de la región factible son:

$V_1(50, 100)$

$V_2 : \left\{ \begin{array}{l} x = 100 \\ y = 100 \end{array} \right. \longrightarrow V_2(100, 100)$

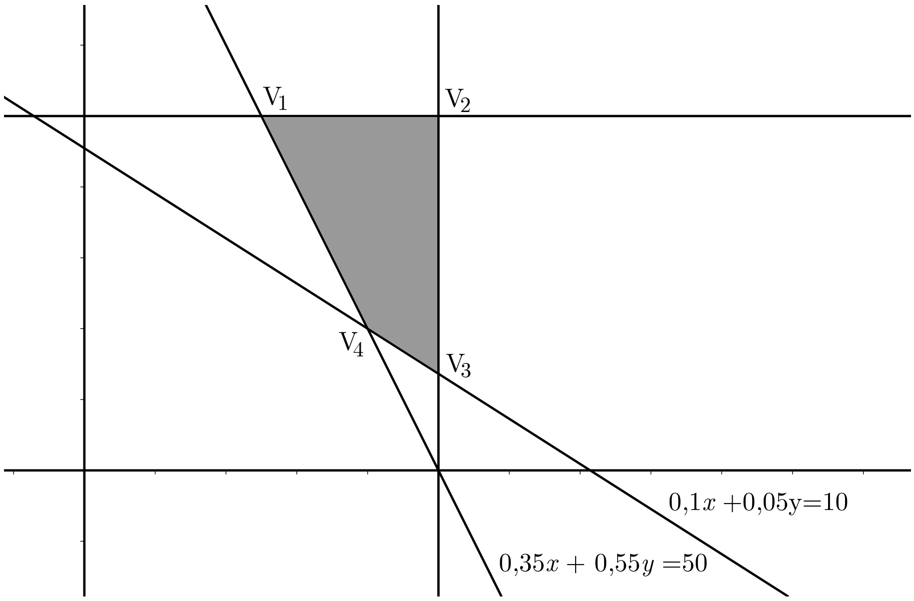
$V_3 : \left\{ \begin{array}{c} 0,35x + 0,55y = 50 \\ x = 100 \end{array} \right. \longrightarrow V_3(100; 27,3)$

$V_3 : \left\{ \begin{array}{c} 0,1x + 0,05y = 10 \\ 0,35x + 0,55y = 50 \end{array} \right. \longrightarrow V_4(56,4; 87,3)$

Hagamos ahora la valoración de los puntos en la función de costes

$$C(x,y) = 350x + 400y$$

$C(50, 100) = 350 \cdot 50 + 400 \cdot 100 = 17500 + 40000 = 57500$



$$C(100, 100) = 350 \cdot 100 + 400 \cdot 100 = 35000 + 40000 = 75000$$
$$C(100; 27, 3) = 350 \cdot 100 + 400 \cdot 27, 3 = 35000 + 10920 = 45920$$
$$C(54, 6; 87, 3) = 350 \cdot 54, 6 + 400 \cdot 87, 3 = 19005 + 34920 = 53925$$

Para cubrir sus necesidades al mínimo coste, la refinería debe comprar 100 toneladas de petróleo tipo A y $27, 3$ toneladas de petróleo tipo B. El coste mínimo es de 45920 €.

6. (**Castilla-La Mancha, junio de 2009**) Una confitería realiza una oferta a sus clientes a través de dos tipos de lotes A y B. El lote A lleva 3 tabletas de turrón y 5 cajas de bombones. El lote B está compuesto por 5 tabletas de turrón y 3 cajas de bombones. Por cuestiones de estrategia comercial, el número de lotes tipo B debe ser menor que el número de lotes de tipo A incrementado en 4. El número de tabletas de tabletas de turrón disponibles en el almacén para esta oferta es 52 y el de cajas de bombones, 60. La venta de un lote del tipo A reporta una ganancia de $6, 5$ € y uno del tipo B, $8, 5$ €.

   a) Dibuja la región factible.
   b) Determinar el número de lotes de cada tipo que debe vender para que la ganancia sea lo mayor posible.
   c) Calcula esa ganancia máxima.

Solución: En estos casos, una sencilla tabla de contingencia nos permite ver fácilmente la función objetivo y las restricciones:

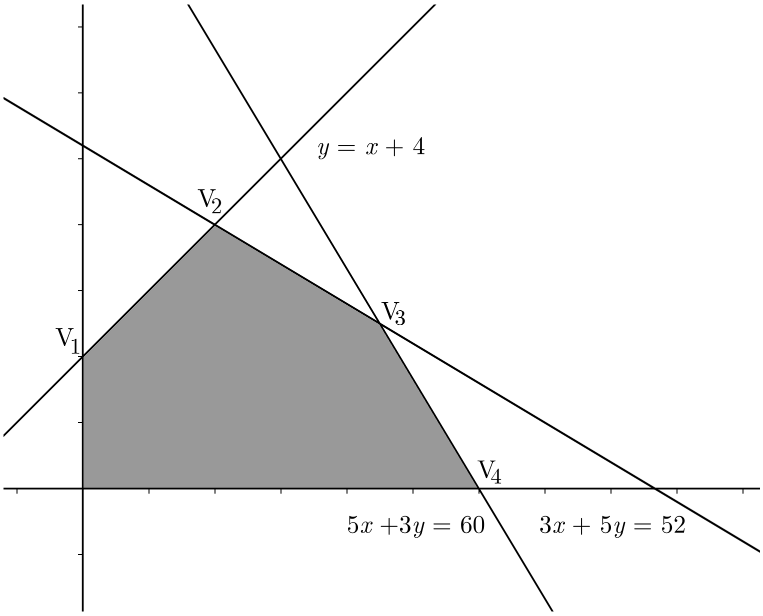
	Turrón	Bombones	Totales
Lote A (x)	3	5	$B < A + 4$
Lote B (y)	5	3	
Totales	52	60	

Así pues, el problema a resolver es:

$$\text{Maximizar: } F(x,y) = 6,5x + 8,5y$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} 3x + 5y \leq 52 \\ 5x + 3y \leq 60 \\ y < x + 4 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

a) Para dibujar la región factible, como en los ejercicios anteriores, representamos la recta (al ser lineal, con los puntos de corte es suficiente) y elegimos la región correspondiente.



Veamos los vértices de la región (candidatos a maximizar o minimizar la función objetivo):

$V_1(0,4)$

$$V_2 : \begin{cases} y = x + 4 \\ 3x + 5y = 52 \end{cases} \longrightarrow V_2(4,8)$$

$$\begin{cases} 3x + 5y = 52 \\ 5x + 3y = 60 \end{cases} \longrightarrow V_3(800,0)$$

$V_4(12,0)$

Hagamos ahora la valoración de los puntos en la función objetivo $F(x,y) = 6,5x + 8,5y$:

$F(0,4) = 34$

$F(4,8) = 94$

$F(9,5) = 101$

$F(12,0) = 78$

b) Para que las ganancias sean lo mayor posible, se deben vender 9 lotes tipo A y 5 lotes tipo B.

c) La ganancia máxima es de 101 €.

7. (**Castilla-La Mancha, septiembre de 2009**) Una persona decide ingresar parte de sus ahorros en dos entidades bancarias con las siguientes condiciones: (a) La cantidad "x" depositada en la entidad A no puede superar los 1200 euros. (b) La cantidad "y" depositada en la entidad B no puede superar los 800 euros. (c) La suma del quíntuplo de la cantidad depositada en A y del séxtuplo de la cantidad depositada en B no puede exceder de 7800 euros. El interés anual ofrecido por la entidad A es del $3,5\,\%$ y el ofrecido por la entidad B es del $3,75\,\%$.

   a) Dibuja la región factible.

   b) Determina las cantidades que debe depositar en cada una de las entidades para que, en las condiciones expuestas, el beneficio sea lo mayor posible.

   c) Calcula el beneficio máximo.

Solución: Llamamos x a la cantidad en A e y a la cantidad en B.

El problema queda planteado de la siguiente forma:

$$\text{Maximizar: } B(x,y) = 0,035x + 0,0375y$$
$$\text{s.a.} \begin{cases} x \le 1200 \\ y \le 800 \\ 5x + 6y \le 7800 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

Representamos las rectas y señalamos el conjunto de soluciones, que será la Región factible.

a) Región factible:

$V_1(0,800)$

$$V_2 : \begin{cases} 5x + 6y = 7800 \\ y = 800 \end{cases} \longrightarrow V_2(600,800)$$

$$V_3 : \begin{cases} x = 1200 \\ 5x + 6y = 7800 \end{cases} \longrightarrow V_3(1200,300)$$

$V_4(1200,0)$

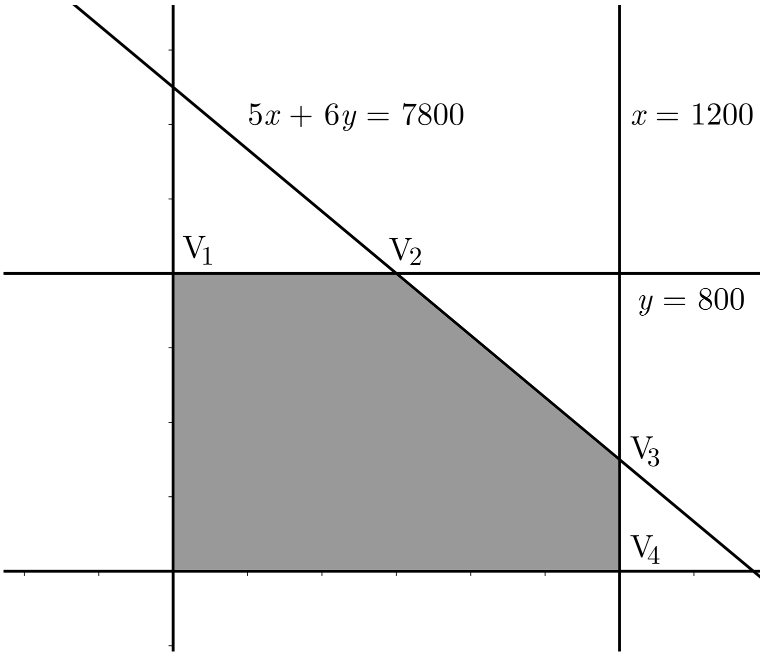
La valoración de los puntos en la función objetivo $B(x,y) = 0,035x + 0,0375y$ es: :

$B(0,800) = 0,0375 \cdot 800 = 30$

$B(600,800) = 0,035 \cdot 600 + 0,0375 \cdot 800 = 51$

$B(1200,300) = 0,035 \cdot 1200 + 0,0375 \cdot 300 = 53,25$

$B(1200,0) = 0,035 \cdot 1200 = 42$



b) Para obtener el máximo beneficio, debe invertir 1200 euros en la entidad A y 300 euros en la entidad B.

c) El beneficio obtenido es de $53,25$ €.

8. (**Murcia, junio 2003**) Se dispone de 60 cuadernos, 50 carpetas y 40 rotuladores que se agrupan en dos tipos de lotes, los del tipo I, con 2 cuadernos, 1 carpeta y 2 rotuladores, que se venden a 4 euros y los del tipo II, con 3 cuadernos, 1 carpeta y 1 rotulador, que se venden a 5 euros. Si se venden todos los lotes que se hagan:

a) ¿Cuántos se deben hacer de cada tipo para ganar lo máximo posible?

b) ¿Sobrarán rotuladores, carpetas o cuadernos después de vender todos los lotes?

Solución: Lo primero es, identificar las incógnitas:

$$x \longrightarrow \text{número de lotes de tipo } I$$
$$y \longrightarrow \text{número de lotes de tipo } II$$

Para la función objetivo, que será de beneficio, observamos que cada lote de tipo I lo vendemos a 4 euros, y que los lotes tipo II, los vendemos a 3 euros. Luego la función objetivo, $B(x,y)$ es:

$$B(x,y) = 4x + 3y$$

Y como siempre, en estos casos, hacemos una tabla que nos proporcione la información necesaria:

	Cuadernos	Carpetas	Rotuladores
Lotes tipo I	2	1	2
Lotes tipo II	3	1	1
Total	60	50	40

Para la región factible, las restricciones que tenemos que tener en cuenta son:

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 60 \\ x + y \leq 50 \\ 2x + y \leq 40 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Representamos en primer lugar

a) $2x + 3y \leq 60 \Longrightarrow$

x	y
0	20
30	0

Los puntos a representar son: $(0, 20)$ y $(30, 0)$.

b) $x + y \leq 50 \Longrightarrow$

x	y
0	50
50	0

Los puntos a representar son: $(0, 50)$ y $(50, 0)$.

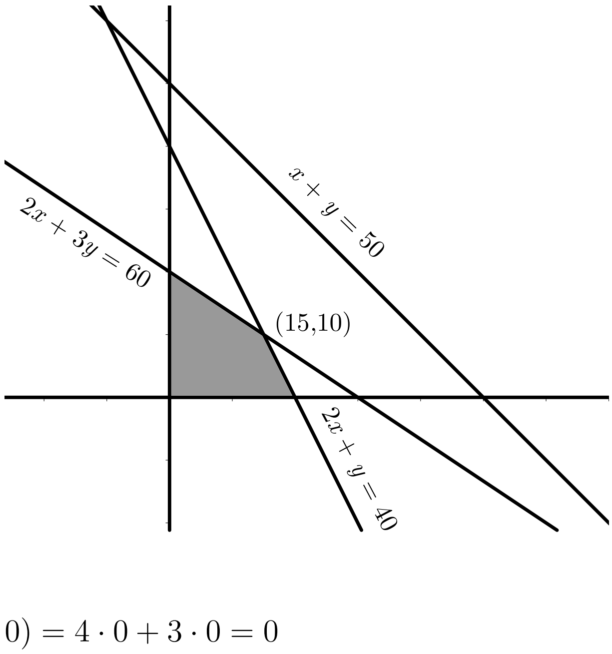
c) $2x + y \leq 40 \Longrightarrow$

x	y
0	40
20	0

Los puntos a representar son: $(0, 40)$ y $(20, 0)$.

Tomaremos las unidades de 10 en 10 para que el gráfico no se salga de los márgenes. Los vértices de esta región, que además es acotada, son: $(20, 0)$, $(0, 20)$, $(0, 0)$ y $(15, 10)$.

Queda pues, sustituir los puntos anteriores en la función objetivo:



- $(0, 0) \Longrightarrow B(0, 0) = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$
- $(20, 0) \Longrightarrow B(20, 0) = 4 \cdot 20 + 3 \cdot 0 = 80$
- $(0, 20) \Longrightarrow B(0, 0) = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 20 = 60$
- $(15, 10) \Longrightarrow B(0, 0) = 4 \cdot 15 + 3 \cdot 10 = \boxed{90}$

El máximo se alcanza cuando vendemos 15 lotes del tipo I y 10 lotes del tipo II.

Sólo queda añadir al ejercicio que, como podemos observar, hay una recta, $x+y=50$, que no ofrece nada a la hora de tomar los punto. Ello es debido a que, se quedarán artículos sin vender. Veamos qué artículos:

$$\left\{\begin{array}{c} 15 \text{ lotes tipo } I \longrightarrow \left\{\begin{array}{c} 30 \text{ cuadernos} \\ 15 \text{ carpetas} \\ 30 \text{ rotuladores} \end{array}\right. \\ 10 \text{ lotes tipo } II \longrightarrow \left\{\begin{array}{c} 30 \text{ cuadernos} \\ 10 \text{ carpetas} \\ 10 \text{ rotuladores} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

En total son 60 cuadernos, 25 carpetas y 40 rotuladores. Vemos que quedan 25 carpetas por vender.

Cuando nos suceda algo del estilo, diremos que hay excedentes de uno o varios artículos. Todo dependerá de las restricciones. Está claro que si hubiéramos metido más carpetas en los lotes (encareciendo el producto) no habría excedente. La restricción $x+y\leq 50$ es innecesaria.

9. (**Murcia, junio 2004**) Un autobús Madrid-París ofrece plazas para fumadores al precio de 100 euros y para no fumadores al precio de 60 euros. Al no fumador se le deja llevar 50 kg de peso y al fumador 20 kg. Si el autobús tiene 90 plazas y admite un equipaje de hasta 3000 kg, ¿cuál debe ser la oferta de plazas de la compañía para optimizar el beneficio?

   Solución: Las incógnitas son:

$$\begin{array}{c} x \longrightarrow \text{número de plazas de fumadores } I \\ y \longrightarrow \text{número de plazas de no fumadores} \end{array}$$

La función objetivo, será de beneficio, $B(x,y)$ será:

$$B(x,y)=100x+60y$$

Las restricciones saldrán directamente del enunciado. Entre fumadores y no fumadores, pueden llevar hasta 3000 kg y además, el autobús puede llevar a 90 perdonas:

$$\left\{\begin{array}{c} 50x+20y\leq 3000 \\ x+y\leq 90 \\ x,y\geq 0 \end{array}\right.$$

Representamos en primer lugar

a) $50x + 20y = 3000 \equiv 5x + 2y = 300 \Longrightarrow$

x	y
40	50
60	0

Los puntos a representar son: $(0, 150)$ y $(60, 0)$.

b) $x + y = 90 \Longrightarrow$

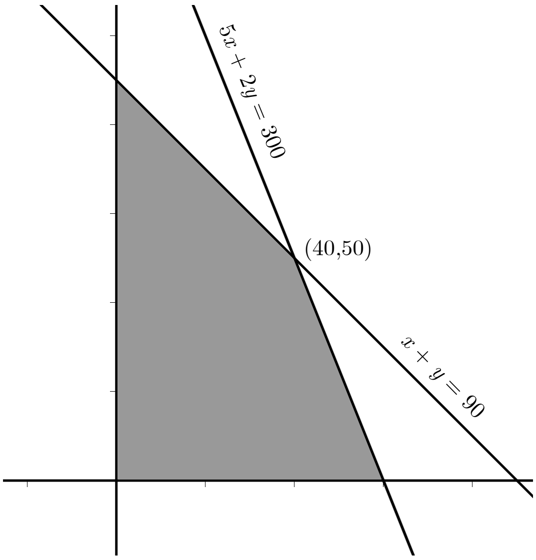
x	y
0	90
90	0

Los puntos a representar son: $(0, 90)$ y $(90, 0)$.

Hemos elegido el punto $(40, 50)$ y no el $(0, 150)$ sólo por comodidad. Como vemos, el punto de intersección, es decir, la solución del sistema:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 300 \\ x + y = 90 \end{cases}$$

es el punto $(40, 50)$. Los vértices de la región factible, que vuelve a ser acotada, son: $(0, 90)$, $(60, 0)$, $(0, 0)$ y $(40, 50)$.



Sustituyendo en la función objetivo:

- $(0, 90) \Longrightarrow B(0, 90) = 100 \cdot 0 + 60 \cdot 90 = 5400$
- $(60, 0) \Longrightarrow B(60, 0) = 100 \cdot 60 \cdot 0 = 6000$
- $(0, 0) \Longrightarrow B(0, 0) = 100 \cdot 0 + 60 \cdot 0 = 0$
- $(40, 50) \Longrightarrow B(40, 50) = 100 \cdot 40 + 60 \cdot 50 = \boxed{7000}$

Para maximizar beneficios, el autobús debe ofrecer, 40 plazas de fumadores por 50 de no fumadores.

10. (**Murcia, septiembre 2005**) Una fábrica de tableros de madera pintados produce dos tipos de tableros: tableros normales (una mano de imprimación más otra mano

de pintura) y tableros extras (una mano de imprimación y tres manos de pintura). Disponen de imprimación para 10000 m^2 , pintura para 20000 m^2 y tableros sin pintar en cantidad ilimitada. Sus ganancias netas son: 3 euros por el m^2 de tablero normal y 5 euros por el m^2 de tablero extra.

a) ¿Qué cantidad de tablero de cada tipo les conviene fabricar para que las ganancias sean máximas?

b) ¿Y si ganara 1 euro por el m^2 de tablero normal y 4 euros por el m^2 de tablero extra?

Solución: Las incógnitas son:

$$x \longrightarrow \text{metros cuadrados tableros normales}$$
$$y \longrightarrow \text{metros cuadrados tableros extra}$$

La función objetivo, será de beneficio, $B(x, y)$ será:

$$B(x, y) = 3x + 5y$$

Las restricciones se deducen de la siguiente: tabla:

	Imprimación	Pintura
m^2 tableros normales	1	1
m^2 tableros extra	1	3
Total	1000	2000

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x + y \leq 1000 \\ x + 3y \leq 2000 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Representamos las rectas $r_1 \equiv x + y = 1000$ y $r_2 \equiv x + 3y = 2000$

a) $x + y = 1000 \Longrightarrow$

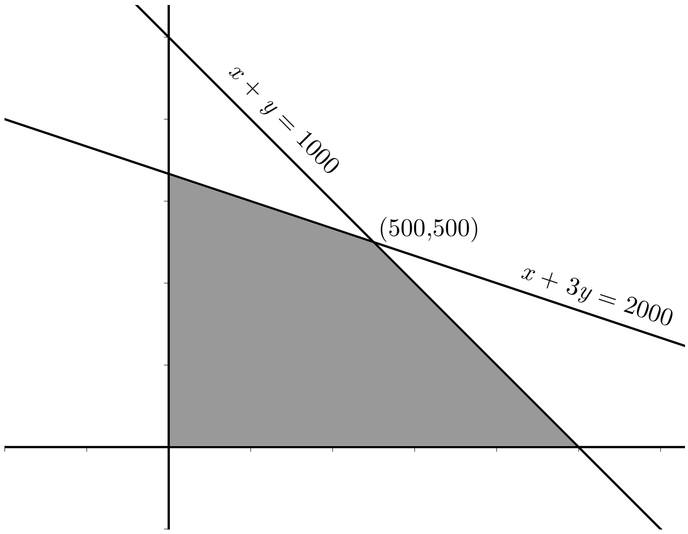
x	y
0	1000
1000	0

Los puntos a representar son: $(0, 1000)$ y $(1000, 0)$.

b) $x + 3y = 2000 \Longrightarrow$

x	y
500	500
800	400
0	$666, 666\ldots$
2000	0

Los puntos a representar son: $(500, 500)$ y $(800, 400)$ o los puntos $(0, 666, 6)$ y $(2000, 0)$, si bien estos puntos dificultan algo más la representación.



Los vértices de la región factible, que vuelve a ser acotada, son: $(0,0)$, $(1000,0)$, $(0,666,6)$ y $(500,500)$. Sustituyendo en la función objetivo:

- $(0,0) \Longrightarrow B(0,0) = 3 \cdot 0 + 5 \cdot 90 = 0$
- $(1000,0) \Longrightarrow B(1000,0) = 3 \cdot 1000 + 5 \cdot 0 = 3000$
- $(0,666,6) \Longrightarrow B(0,666,6) = 3 \cdot 0 + 5 \cdot 666,6 = 3333$
- $(500,500) \Longrightarrow B(500,500) = 3 \cdot 500 + 5 \cdot 500 = \boxed{4000}$

Para maximizar beneficios, la oferta ha de ser de 500 tableros de cada tipo.

3.6. Problemas propuestos

1. (**Castilla-La Mancha, septiembre de 2009**) Un camión para el transporte de electrodomésticos cobra 25 euros por cada frigorífico de $0,6$ m^2 de base y 22 euros por cada lavavajillas de 05 m^2 de base. El camión dispone de 9 m^2 como máximo para este tipo de carga. Por necesidades de demanda el número de lavavajillas no puede superar al 60 % del número de frigoríficos. Se deben transportar como mínimo 5 frigoríficos.

   a) Dibuja la región factible.

   b) Determina el número de electrodomésticos de cada clase para que el beneficio obtenido con el transporte sea lo más grande posible.

   c) Calcula el beneficio máximo.

   Solución: El beneficio máximo se consigue vendiendo 10 frigoríficos y 6 lavavajillas.

2. (**Castilla-La Mancha, septiembre de 2008**) Una fábrica de artículos de cerámica lanza al mercado platos y jarrones para adorno al precio de 20 euros cada plato y 15 euros cada jarrón. Cada plato necesita 25 minutos de modelado y 25 minutos de

pintura y cada jarrón necesita 30 minutos de modelado y 10 minutos de pintura. El número de operarios existentes en la fábrica permite dedicar un máximo de 25 horas para trabajos de modelado y 16 horas y 40 minutos para trabajos de pintura.

a) Dibuja la región factible.

b) ¿Cuántas piezas de cada clase conviene fabricar para que el beneficio obtenido con su venta sea lo mayor posible?

c) Calcula el beneficio máximo posible.

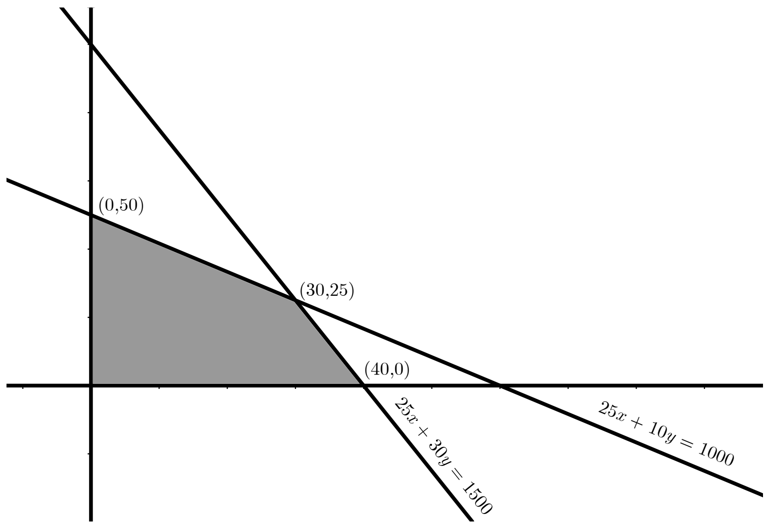
Solución:
Max: $20x + 15y$

$$\text{s.a.} \begin{cases} 25x + 30y \leq 1500 \\ 25x + 10y \leq 1000 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Hacemos uso de la tabla:

	Modelado	Pintura
Plato	25 h	25 h
Jarrón	30 h	10 h
	25 h (1500′)	16 h 40′ (1000′)

a) La región factible es la que hemos sombreado:



b) Conviene fabricar 30 platos y 25 jarrones para obtener el máximo beneficio.

c) El beneficio máximo posible es de 975 €.

3. (**Comunidad Valenciana, septiembre de 2008**) Cierto armador se dedica a la pesca de rape y merluza. Las cuotas pesqueras imponen que sus capturas totales no excedan las 30 toneladas (Tm). Por otro lado, la cantidad de rape como máximo

puede triplicar a la de merluza y, además esta última no puede superar las 18 Tm. Si el precio del rape es de 15 €/kg, ¿qué cantidades de cada especie debe pescar para maximizar sus ingresos?

Solución: Debe pescar 12 Tm de merluza y 18 Tm de rape.

4. (**Andalucía, septiembre de 2008**) Un pastelero dispone de 150 kg de harina, 22 kg de azúcar y 26 kg de mantequilla para hacer dos tipos de tartas, A y B. Para hacer una hornada de tartas del tipo A se necesitan 3 kg de harina, 1 kg de mantequilla, mientras que para hacer una hornada de tartas del tipo B se necesitan 6 kg de harina, $0,5$ kg de azúcar y 1 kg de mantequilla. Sabiendo que el beneficio que se obtiene al vender una hornada del tipo A es de 20 € y de 30 € al vender una hornada del tipo B, determine cuántas hornadas de cada tipo debe hacer y vender para maximizar sus beneficios.

   Solución: El máximo beneficio se obtiene vendiendo 2 hornadas de las del tipo A y 24 de las del tipo B.

5. (Murcia, septiembre de 2009) Un fabricante de coches lanza una oferta especial de sus modelos, ofreciendo al modelo A a un precio de 15000 euros y el modelo B a un precio de 20000 euros. La oferta limitada por las existencias que son 20 coches del modelo A y 10 del modelo B, queriendo vender al menos tantas unidades del modelo A como del modelo B.
   Por otra parte, para cubrir gastos de esta campaña, los ingresos obtenidos en ella deben ser, al menos de 60000 euros.

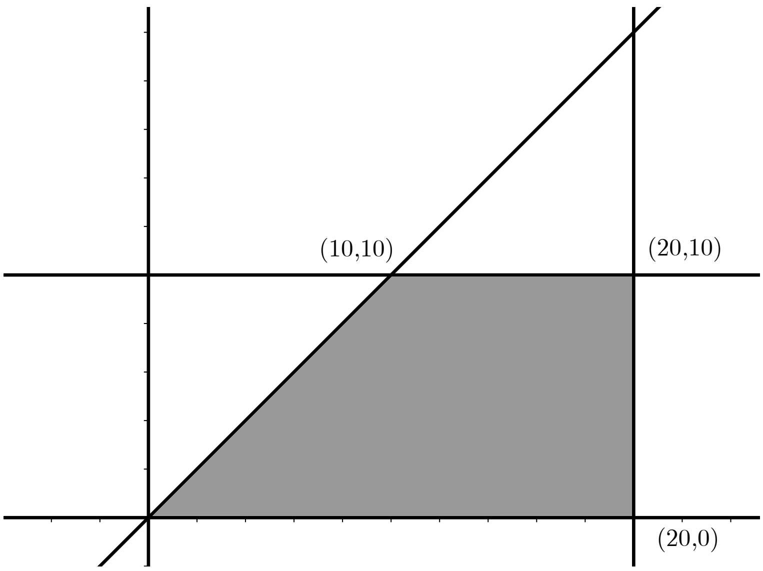
   a) Plantear el problema y representar gráficamente su conjunto de soluciones.
   b) ¿Cuántos coches deberá vender de cada modelo para maximizar sus ingresos? ¿Cuál es su importe?

   Solución:

   a) La región factible de posibles soluciones es la sombreada en la figura:
   b) Deberá vender 20 coches del modelo A y 10 del modelo B. El beneficio es de 500000 euros.

6. (**Murcia, septiembre de 2008**) Un frutero quiere liquidar 500 kg de naranjas, 400 kg de manzanas y 230 de peras. Para ello prepara dos bolsas de fruta oferta: la bolsa A consta de 1 kg de naranjas y 2 de manzanas y la bolsa B consta de 2 kg de naranjas, 1 kg de manzanas y 1 kg de peras. Por cada bolsa del tipo A obtiene un beneficio de $2,5$ euros y 3 euros por cada una del tipo B. Suponiendo que vende todas las bolsas, ¿cuántas bolsas de cada tipo debe preparar para maximizar sus ganancias? ¿Cuál es el beneficio máximo?

   Solución: Debe preparar 100 bolsas del tipo A y 200 del tipo B. Siendo el beneficio de 850 €.


(10,10)
(20,10)
(20,0)

Capítulo 4

Límites y continuidad

4.1. Introducción.

Si buscamos en el diccionario la palabra “continuidad” , encontraremos que se entiende por continuidad la cualidad que cumple todo aquello que se extiende si interrupción. Esta idea está íntimamente relacionada con el concepto matemático de función continua.

La idea más primitiva de función continua es la que nos lleva a dibujar su gráfica sin levantar el lápiz del papel. Son numerosos los casos de continuidad que se nos presentan en la realidad. Por ejemplo, pensemos en la línea continua que nos invita a avanzar en carretera cuando vamos por la autovía... ¿Qué nos representa, por ejemplo, la línea discontinua?

4.2. Concepto de límite. Caracterización.

Intuitivamente la idea que tenemos de límite de una función en un punto es el número hacia el que tienden o se aproximan los valores que toma la función cuando la variable independiente se acerca o aproxima a ese punto.

Esta idea queda formalmente definida mediante la siguiente definición:

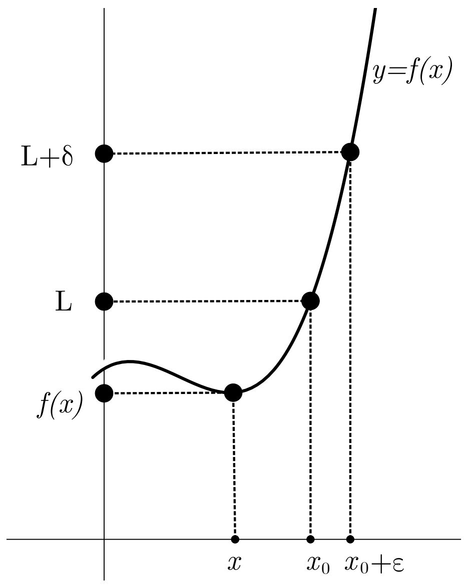
Definición 11. *Decimos que una función $f(x)$ tiene por límite L cuando x tiene a x_0 si para todo entorno $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ existe otro entorno $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ de modo que para todo $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ se verifica que $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. Abreviadamente podemos decir que:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \mid \ \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \Rightarrow f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$$

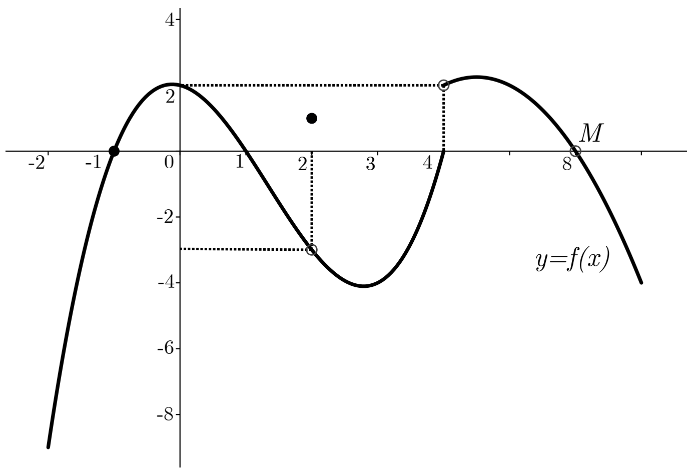
o lo que es lo mismo:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \mid \ \forall x \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Para que una función tenga límite en un punto de abscisa x_0, no es necesario que la función este definida en ese punto. Cuando existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, decimos que f es convergente en el punto de abscisa x_0.



Ejemplo 24. *Estudia la convergencia de la siguiente función en los puntos que se indican y calcula los valores que toma la función en ellos.*



Observando la gráfica obtenemos lo siguiente:

- $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 0; \quad f(-1) = 0$
- $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -3; \quad f(2) = 1$
- $\nexists \lim\limits_{x\to 4} f(x); \quad f(4) = 0$
- $\lim\limits_{x\to 6} f(x) = 0; \quad \nexists f(6) = 0$

Por tanto, la función es convergente en los puntos de abscisa -1, 2 y 6, y no es convergente para el punto de abscisa 4.

4.2.1. Límites laterales.

Existen funciones, como la del ejemplo anterior, en las cuales no es posible calcular directamente el límite en algún punto. Esto es debido a que están definidas de distinta forma a la izquierda y a la derecha del punto. Es por ello que para estudiar estos casos recurrimos a los límites laterales. Veamos su definición de forma abreviada. Así decimos que existe:

- el límite lateral por la derecha si:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \mid\ \forall \text{ si } 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

- el límite lateral por la izquierda si:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \mid\ \forall \text{ si } 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Así, el límite de una función existirá si existen sus límites laterales y además coinciden y podemos concluir diciendo que:

$$\boxed{\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L = \lim_{x\to x_0^-} f(x)}$$

El uso de los límites laterales se hace imprescindible en las funciones definidas a trozos o por ramas. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 25. *Estudiar la continuidad de la función* $f(x) = \begin{cases} 2x & si \quad x \leq 1 \\ x^2 & si \quad x > 1 \end{cases}$

Dado que las funciones $2x$ y x^2 son polinomios, son funciones continuas y sólo tendremos que ver que ocurre en el punto $x = 1$ que es donde se separan las ramas:

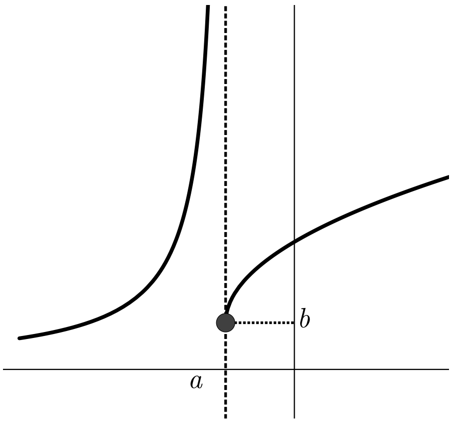
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 2x = 2 \\ \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} x^2 = 1 \end{array}\right\} \text{ y como } 2 \neq 1 \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 1} f(x)$$

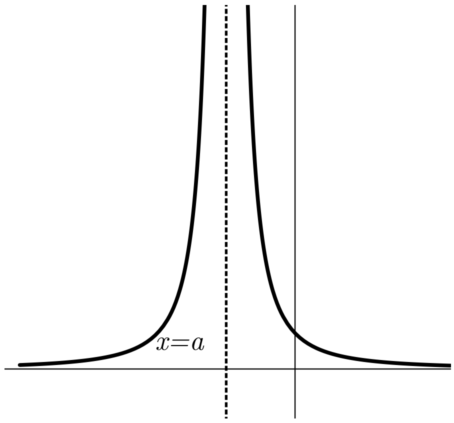
4.3. Límites infinitos y límites en el infinito.

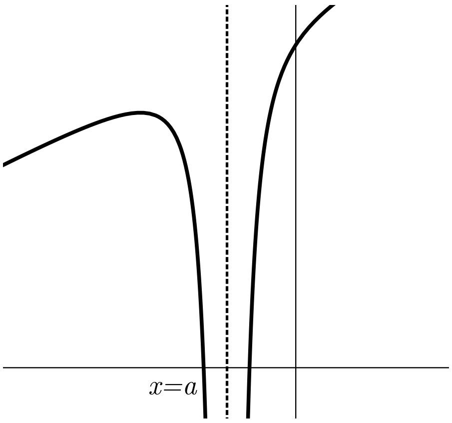
4.3.1. Límites infinitos.

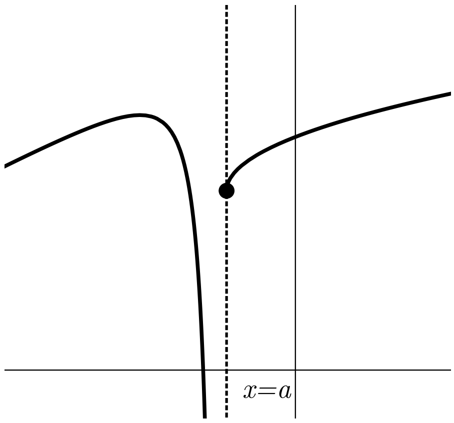
Definición 12. *Decimos que* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ *si cuando la función toma valores próximos a* $x = a$ *a ambos lados, la función toma valores muy grandes que no se pueden controlar. De la misma forma decimos que* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ *si los valores que toma son muy negativos.*

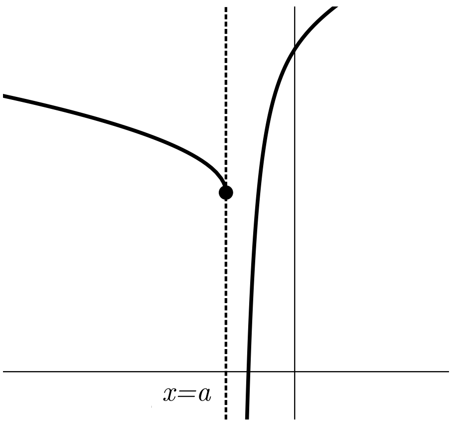
Tanto en el caso de que exista el límite infinito, como cuando exista alguno de los límites laterales de una función en un punto $x = a$ y tome los valores $\pm\infty$, sabemos por cursos anteriores que $x = a$ será una asíntota vertical de la función. Todos los casos que pueden darse, se presentan en las siguientes gráficas:

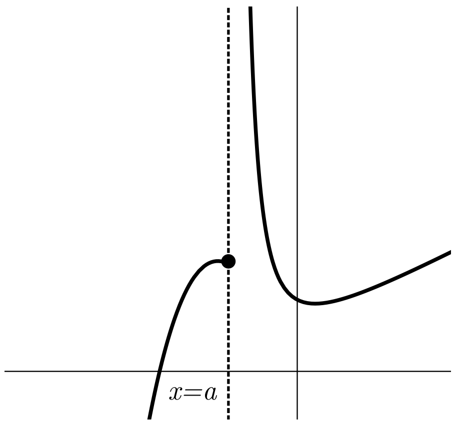

b
a

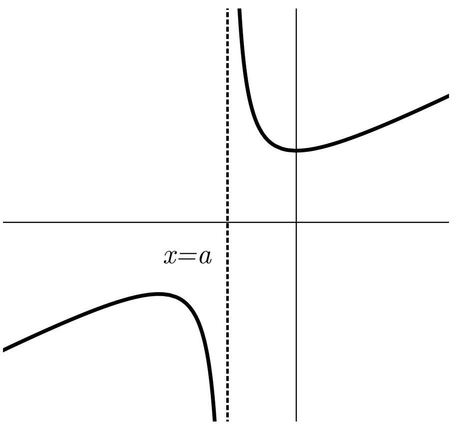

$x=a$

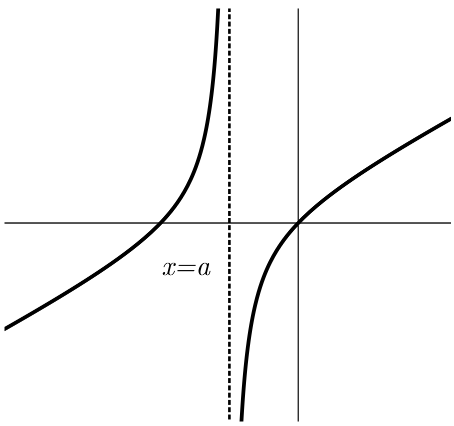

$x=a$


$x=a$


$x=a$


$x=a$


$x=a$


$x=a$

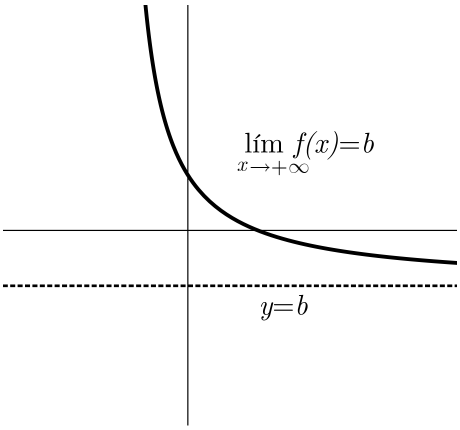
4.3.2. Límites en el infinito.

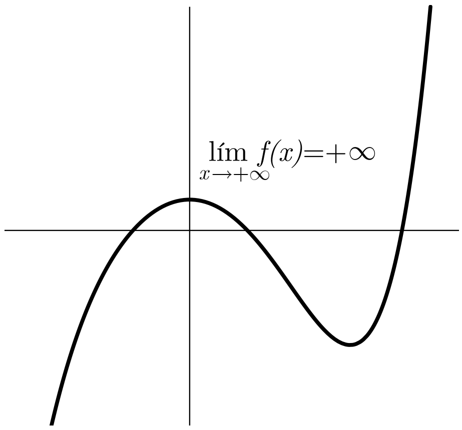
Definición 13. *Decimos que* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ *(ó* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$*) si cuando la función toma valores muy grandes y positivos (ó muy negativos), el valor de la función se aproxima a un número b.*

En este caso sabemos de cursos anteriores que la función $y = f(x)$ presente una asíntota horizontal en $y = b$.

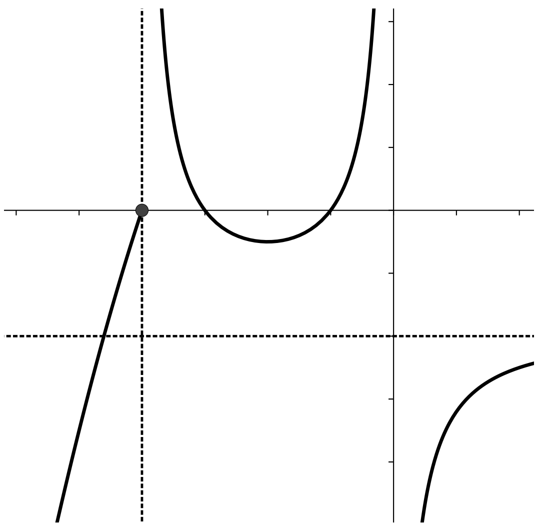
Además puede darse el caso que los límites en el infinito sean infinitos, es decir, tiendan a $+\infty$ ó $-\infty$. En este caso tenemos una rama parabólica.

Un ejemplo de esto puede verse en las siguientes gráficas de funciones:





Ejemplo 26. *Vamos a calcular los límites infinitos y los límites en el infinito de la siguiente función dada por la gráfica:*



Estudiando que pasa en $x = -4$ y $x = 0$ y en el infinito tenemos:

$\lim_{x\to-4^-} f(x) = 0$ $\qquad\qquad$ $\lim_{x\to-4^+} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = -2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$$

Y podemos concluir que la función tiene por asíntotas verticales las rectas $x = -4$ y $x = 0$ y por asíntota horizontal la recta $y = -2$.

4.4. Cálculo de límites

Para el cálculo de límites es muy importante tener en cuenta que el límite de una suma o resta de funciones es la suma o resta de los límites. Y no sólo eso con el producto y el cociente ocurre los mismo. En la mayoría de los casos estos límites se calculan sin más pero existen casos que no pueden resolverse a la ligera, que dan duda, y que conocemos como indeterminaciones.

Veamos en primer apartado un cuadro que resume que hacer cuando hay límites finitos e infinitos y después veremos en un segundo apartado como resolver casa uno de los casos de indeterminaciones.

4.4.1. Límites sin indeterminación.

Para el cálculo de límites si indeterminación tendremos en cuenta lo siguiente:

1. **Suma**

$$a + \infty = +\infty \qquad +\infty + \infty = +\infty$$

$$a - \infty = -\infty \qquad -\infty - \infty = -\infty$$

2. **Producto**

$$(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$$

$$(+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$$

$$(-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$$

$$\text{Si } a > 0 \Rightarrow \begin{cases} a\cdot(+\infty) = +\infty \\ a\cdot(-\infty) = -\infty \end{cases}$$

$$\text{Si } a < 0 \Rightarrow \begin{cases} a\cdot(+\infty) = -\infty \\ a\cdot(-\infty) = +\infty \end{cases}$$

3. **Cociente**

$$\frac{a}{+\infty} = 0 \qquad \frac{a}{-\infty} = 0$$

$$\text{Si } a > 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{+\infty}{a} = +\infty \\ \dfrac{-\infty}{a} = -\infty \end{cases}$$

$$\text{Si } a < 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{+\infty}{a} = -\infty \\ \dfrac{-\infty}{a} = +\infty \end{cases}$$

4.4.2. Indeterminaciones

Una indeterminación surge cuando el conocimiento de los límites de las funciones que intervienen no es suficiente para saber cual es el límite de la suma, producto o cociente de las mismas funciones. Los casos más típicos que resolveremos son los siguientes:

Caso 1: Indeterminación del tipo $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Estas indeterminaciones aparecen al calcular el límite de cociente de polinomios. Y aplicaremos las siguiente regla:

• Si el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, el límite es $\pm\infty$ dependiendo del signo del coeficiente principal del polinomio del numerador.

Ejemplo 27.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3-1}{10x^2-7x+3} = +\infty$$

• Si el grado del numerador es igual que el grado del denominador, el límite es el cociente de los coeficientes principales de los polinomios.

Ejemplo 28.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^3-5x-1}{6x^3-5x^2+3} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

• Si el grado del numerador es menor que el grado del denominador, el límite es cero.

Ejemplo 29.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{10x-3}{-5x^2+2} = 0$$

Caso 2: Indeterminación del tipo $\infty - \infty$

Aparecen al calcular límites de diferencia de funciones racionales o irracionales. En el caso de funciones racionales se resuelven operando convenientemente. En el caso de radicales es conveniente utilizar la fórmula de Bernoulli que en el caso elemental, es la identidad notable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. De esta manera tenemos una resta que multiplicaremos por la suma y el problema de la identerminación será el caso anterior. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 30. *Dado que el* $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+5} - (x+2) = \infty - \infty$ *multiplicando y dividiendo por la suma tendremos:*

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+5} - (x+2)) = \frac{(\sqrt{x^2+5} - (x+2)) \cdot (\sqrt{x^2+5} + (x+2))}{\sqrt{x^2+5} + (x+2)} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+5})^2 - (x+2)^2}{\sqrt{x^2+5} + (x+2)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+5-(x^2+2x+4)}{\sqrt{x^2+5} + (x+2)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4x+1}{\sqrt{x^2+5} + (x+2)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-4x}{x}+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+5}{x^2}}+\frac{x}{x}+\frac{2}{x}} = \frac{-4}{2} = -2$$

Caso 3: Indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$

Esta indeterminación aparece al calcular el límite en un punto de cocientes de polinomios $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Veamos un esquema para calcular los límites en un punto $x = a$.

Si $Q(a) \neq 0$, entonces se tiene que $\lim\limits_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$

$Q(a) = 0$, entonces puede ocurrir dos casos:

1. Si $P(a) \neq 0$, tenemos que estudiar los límites laterales para ver si existe el límite en el punto, ya que puede no existir o valer $+\infty$ ó $-\infty$.
2. Si $P(a) = 0$, resulta que $x = a$ es raíz de $P(x)$ y de $Q(x)$ y su factorización tendrá un factor del tipo $(x-a)$, con lo cual, si $P(x) = (x-a)\cdot P_1(x)$ y $Q(x) = (x-a)\cdot Q_1(x)$, se tiene que:

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)P_1(x)}{(x-a)Q_1(x)} = \lim_{x\to a} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

Y procedemos desde el principio con la función $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ hasta que se dé uno de los casos anteriores.

Ejemplo 31. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+1}{x^3-x+1}$, *como* $Q(1) = (1)^3 - (1) + 1 = 1 - 1 + 1 = 1 \neq 0$ *entonces*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+1}{x^3-x+1} = \frac{(1)^2+1}{(1)^3-(1)+1} = \frac{1+1}{1-1+1} = \frac{2}{1} = 2$$

Ejemplo 32. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-1}{x-2}$, *como* $Q(2) = 2 - 2 = 0$ *entonces calculamos los límites laterales:*

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^3-1}{x-2} = -\infty \ \ y \ \lim_{x\to 2^+} \frac{x^3-1}{x-2} = +\infty$$

Y como los límites laterales no coinciden se tiene que el límite no existe.

Ejemplo 33. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$, *como* $Q(1) = 1 - 1 = 0$ *y* $P(1) = (1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$ *, factorizando* $Q(x) = (x-1)(x+1)$ *tendremos:*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 1 + 1 = 2$$

Ejemplo 34. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}$, *como* $Q(2) = 2^2+2-6 = 4+2-6 = 0$ *y* $P(2) = 2^2-4 = 4-4 = 0$ *, factorizando* $P(x) = x^2-4 = (x-2)(x+2)$ *y* $Q(x) = x^2+x-6 = (x-2)(x+3)$ *tendremos:*

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2+x-6} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x+3} = \frac{2+2}{2+3} = \frac{4}{5}$$

Caso 4: Indeterminaciones del tipo $0 \cdot (\pm\infty)$

Este tipo de indeterminaciones se resuelven transformando dicha inderminación a una de los dos casos anteriores. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 35. *Como* $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3}{\sqrt{x^4-2}} \cdot (2x-3) = 0 \cdot (-\infty)$ *si operamos tendremos:*

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{3}{\sqrt{x^4-2}} \cdot (2x-3) = \lim_{x\to -\infty} \frac{6x-9}{\sqrt{x^4-2}} \approx \lim_{x\to -\infty} \frac{6x}{x^2} = 0$$

Caso 5: Interminaciones del tipo 1^∞**.**

Estas indeterminaciones se resuelven con el siguiente resultado que no vamos a demostrar.

Propiedad. *Dados dos funciones* $f(x)$ *y* $g(x)$ *con* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1, \quad \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ *entonces:*

$$\lim_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)(f(x)-1)}$$

Ejemplo 36. *Como el* $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2+3}{x^2-1}\right)^{2x} = 1^\infty$ *entonces aplicando la propiedad se tiene:*

$$e^{\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2+3}{x^2-1}\right)^{2x}} = e^{\lim\limits_{x\to +\infty} 2x\left(\frac{x^2+3}{x^2-1} - 1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x(x^2+3-x^2+1)}{x^2-1}} = e^{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{8x}{x^2+1}} = e^0 = 1$$

4.5. Continuidad

Definición 14. *Decimos que una función* $f(x)$ *es continua en* $x = a$ *si existe el límite de la función en dicho punto y vale* $f(a)$*, es decir, que* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$*.*

El ejemplo de funciones continuas por excelencia son las funciones polinómicas. El estudio de la continuidad, salvo en las funciones por ramas, esta íntimamente ligado al dominio de una función. Y una cosa muy importante es que no sólo tiene que existir el límite sino que éste tiene que valer el valor de la función en el punto. Por ejemplo, la función $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ tiene límite en $x = 1$ y es $+\infty$ pero no es continua ya que $\nexists f(1)$ porque $1 \notin D(f)$.

Definición 15. *Una función f se dice que es continua en un intervalo (finito o infinito) de $\mathbb{R}$ si es continua en cada punto el intervalo*

En ocasiones es importante saber si al menos una función es continua por alguno de los lados y para ello tenemos las siguientes definiciones.

Definición 16. *Una función f se dice que es continua por la izquierda en un punto de abscisa x_0, si existe el límite por la izquierda en dicho punto y coincide con el valor de la función en dicho punto, o sea f es continua por la izquierda en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.*
De forma análoga f es continua por la derecha en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

De esta forma concluimos con la siguiente definición.

Definición 17. *Una función f es continua en x_0 si lo es por la izquierda y por la derecha y además coinciden, o sea:*
f es continua en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$

El estudio de la continuidad lateral es muy importante para las funciones definidas a trozos. Veamos algunos ejercicios de este tipo que han aparecido en selectividad.

Ejemplo 37. *Estudia la continuidad e la función* $f(x) = \begin{cases} 3x+10 & si \quad -3 \le x < -2 \\ x^2 & si \quad -2 \le x < 1 \\ \dfrac{x+3}{2} & si \quad 1 \le x \le 3 \end{cases}$
en el intervalo $[-3, 3]$ (Comunidad Valenciana 2006).

Dado que las ramas de la función son continuas, tan sólo hay que estudiar la continuidad en $x = -2$ y $x = 1$. Estudiando los límites laterales tenderemos:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} 3x+10 = -6+10 = 4 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} x^2 = (-2)^2 = 4 \\ f(-2) = (-2)^2 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{f es continua en } x = -2.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = (1)^2 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{1+3}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{f no es continua en } x = 1.$$

En conclusión la función es continua en $[-3, 1) \cup (1, 3]$.

Ejemplo 38. *Halla los valores de los parámetros a y b para que la función:*

$$f(x) = \begin{cases} -2x + a & si \quad x \leq 0 \\ x - 1 & si \quad 0 < x \leq 2 \\ bx - 5 & si \quad x > 2 \end{cases}$$

sea continua en todo $\mathbb{R}$.

Para calcular a y b tan sólo tendremos que calcular los límites laterales en $x = 0$ y $x = 2$ e igualar dichos límites para que la función sea continua.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x^2 = -a \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x - 1 = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow -a = -1 \Rightarrow a = 1.$$

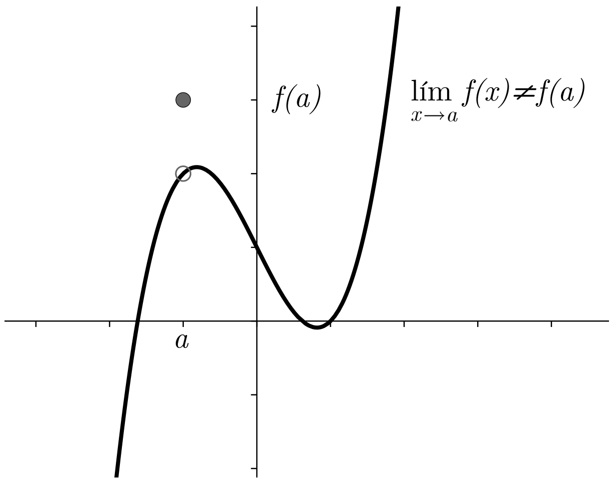
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} x - 1 = 2 - 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} bx - 5 = 2b - 5 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = 2b - 5 \Rightarrow 2b = 6 \Rightarrow b = \frac{6}{2} = 3.$$

Con lo cual f es continua en $\mathbb{R}$ si $a = 1$ y $b = 3$.

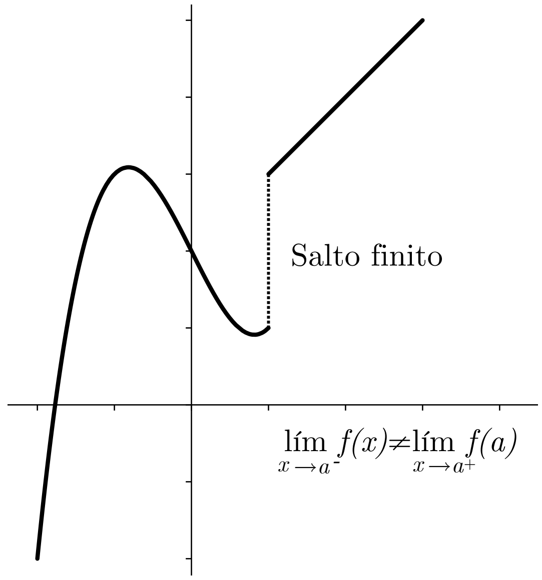
4.5.1. Tipos de discontinuidades

Cuando una función no es continua, decimos entonces que es discontinua y esto puede pasar en tres casos, o tipos de discontinuidades:

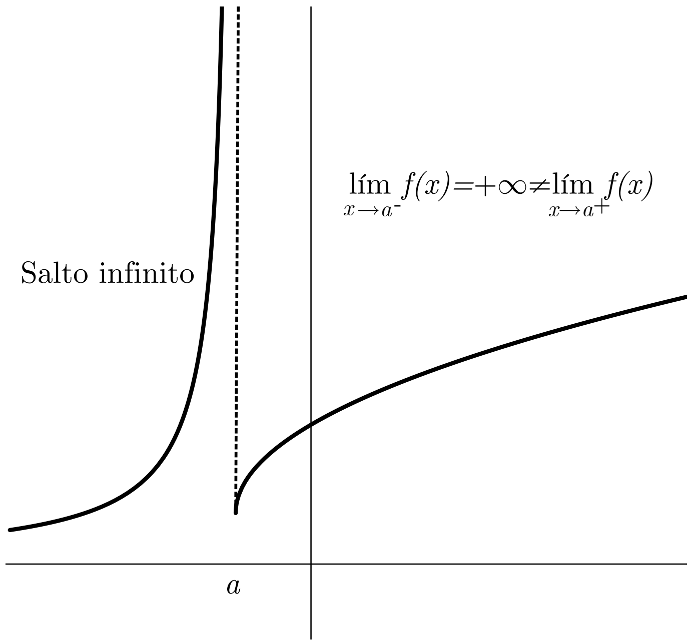
1. **Discontinuidad evitable:** Se presenta cuando existe el límite de la función en el punto pero no coincide con el valor de la función en dicho punto.



2. **Discontinuidad de salto finito:** Cuando los límites laterales no coinciden y su diferencia es un número finito.



3. **Discontinuidad de salto infinito:** Cuando los límites laterales no coinciden y su diferencia es $\pm\infty$.



4.6. Ejercicios

1. Calcula los siguientes límites:

   a) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{-3x^4 + 2x^2 - 5}{4x^4 - 7}$ *b*) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{-4x + 1}{\sqrt{x^2 + 5} + x + 2}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^5}{\sqrt{x^4-3}}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4x^6-3x^2-4}}{\sqrt[3]{x^18-4x^6-3x^4+1}}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-\sqrt{x^2-5})$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} (3x^2-\sqrt{-4x^4+7x^3-3x^2})$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2-\dfrac{3x^4-7x^2+1}{(x+3)^2})$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\dfrac{3x^2-4x+2}{-x^2+4}-x)$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{x^2+3}{2x^2-3}\right]^{2x}$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{4x^4-5x^3}{7x^4+5x-3}\right]^{-7x^3+4x}$

l) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{3x^2-3x+1}{2x^2+5x-1}\right]^{3x^2-4}$

m) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$

n) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-6x+9}{x-3}$

ñ) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-8x+8}{x^2-5x+6}$

o) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-5x^2+5x-1}{x^2-2x+1}$

p) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4-5x^2+4}{(x-2)^2}$

q) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4-3x^3+3x}{x^2+x}$

r) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2-\sqrt{x}}{x-4}$

s) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{3-\sqrt{x}}{x-9}$

t) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{10-\sqrt{5x}}{15-3x}$

u) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt{x}}{x-1}$

v) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x^2-5x+2}{x^2+2x}-\dfrac{x^3+2x+1}{x^3+x}\right)$

w) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{2}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{x(x-1)}\right)$

x) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x^2+3}{x^3}-\dfrac{1}{x}\right)$

y) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{x^2-3x+4}{x^2-4}-\dfrac{3x+5}{x-2}\right)$

z) $\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{3x-5x^3}{x^2-3x}-\dfrac{x^2-4x-1}{x-3}\right)$

2. Estudia la continuidad de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{x} & si \quad x<-\dfrac{3}{2} \\ 2x+1 & si \quad -\dfrac{3}{2}\le x<0 \\ x^2+1 & si \quad x\ge 0 \end{cases}$$

(Solución: f es continua en todo $\mathbb{R}$.)

3. Estudia si $f(x)$ es continua en $x=2$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} & si \quad x\le 2 \\ \dfrac{3x^2-2x}{x+2} & si \quad x>2 \end{cases}$$

(Solución: f es continua en $x=2$.)

4. Halla k para que la siguiente función sea continua

$$f(x) = \begin{cases} x + k & si \quad x < 5 \\ \dfrac{x^2}{5} - 2x + 8 & si \quad x \geq 5 \end{cases}$$

(Solución: $k = -2$.)

5. Estudia la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & si \quad x < -\dfrac{1}{2} \\ -x^2 + 3x & si \quad -\dfrac{1}{2} \leq x \leq \\ |-x+3| & si \quad x > 3 \end{cases}$$

(Solución: f es continua en $\mathbb{R} \backslash \{-\frac{1}{2}\}$)

6. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5} & si \quad x \neq 5 \\ 0 & si \quad x = 5 \end{cases}$

   a) Demuestra que f(x) es continua en $x = 5$.

   b) ¿Existe una función continua que coincida con f(x) para todos los valores $x \neq 5$?. En caso afirmativo da su expresión.

Capítulo 5

Derivadas

5.1. Introducción

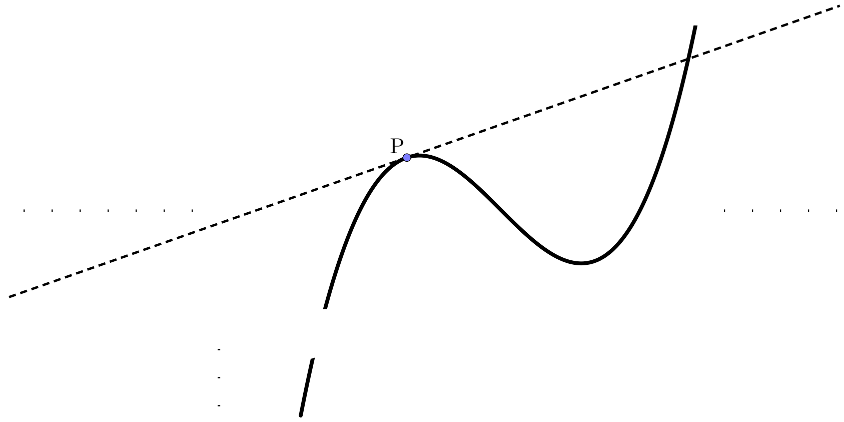
Entramos en una de las partes más importantes de las Matemáticas. El concepto de derivada, a la vez que el de "paso al límite", que hemos estudiado en el tema anterior, supusieron para las ciencias puras, y luego para todas las ciencias, un paso definitivo hacia la búsqueda de nuevos terrenos. Terrenos que han permitido al hombre alcanzar metas jamás soñadas en el siglo $XVII$. Debemos dar gracias pues a Newton y Leibniz, que descubrieron por separado y en la misma época, esta herramienta tan importante como es la derivada de una función.

5.2. Derivada de una función en un punto

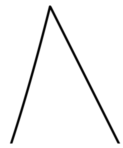
No vamos a introducir de forma directa el concepto de derivada, lo haremos poco a poco, apoyándonos en la recta tangente a una curva.

Definición 18. *Diremos que una función $y = f(x)$ es derivable, en un punto de abscisa $x = a$, si su gráfica es "suave" en el punto $(a, f(a))$.*

¿Qué significa que la curva sea suave en un punto?
Una curva será suave en un punto, cuando se pueda trazar la recta tangente a la misma en dicho punto. Un ejemplo es el de la imagen de abajo.
La función debe ser continua en el punto. Habrá casos en los que, siendo continua la curva en el punto, no podamos trazar la recta tangente a la misma.

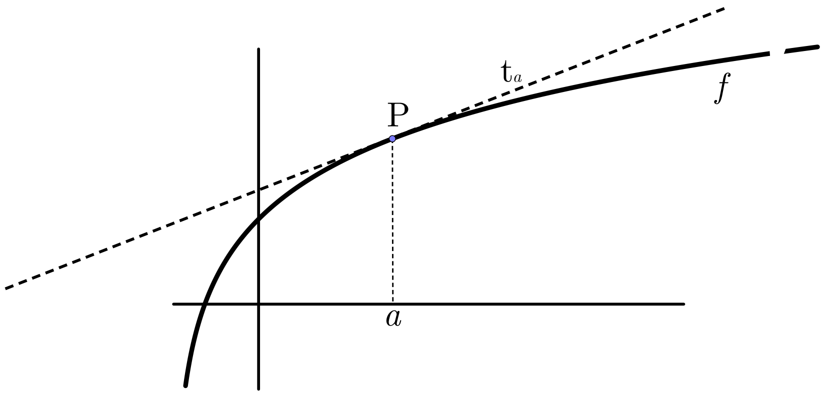


Un ejemplo en el que la función no es suave en un punto es el que nos proporciona la figura del margen. Si nos fijamos, la función presenta un pico. Será imposible que nosotros podamos trazar la tangente en dicho punto.



Aclaremos un poco el concepto de tangente en un punto.

Definición 19. *Sea $y = f(x)$ una función, que supondremos suave en todos sus puntos. Diremos que t_a es la tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = a$, cuando corte en un sólo punto a la misma, cerca de dicho punto.*



Al hilo de esto, daremos la definición de derivada en un punto.

Definición 20. *Diremos que una función $y = f(x)$ es derivable en el punto de abscisa $x = a$ cuando podamos trazar la recta tangente en $(a, f(a))$.*

Dicha recta tangente tendrá la forma:

$$t_a \equiv y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

siendo

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

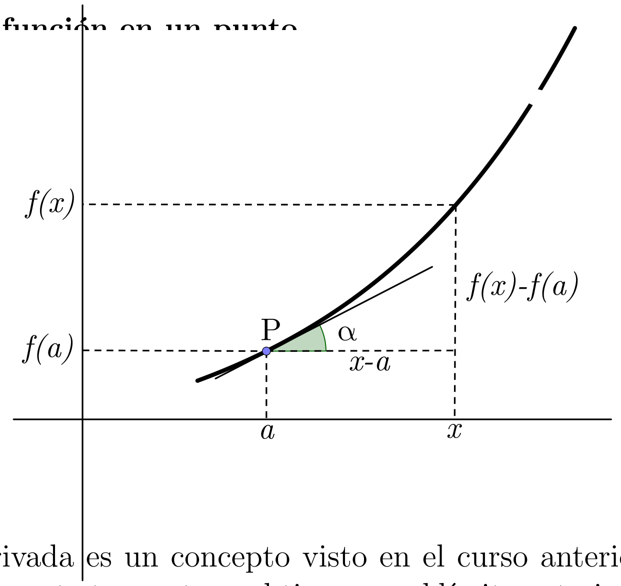
Para encontrar el significado al límite anterior, partamos de la ecuación explícita de una recta cualquiera en el plano. La ecuación explícita de la recta tiene la forma $y = mx + n$, en la que, m es la pendiente de la recta, y n es la ordenada en el origen. Recordemos además que, la pendiente de una recta, tiene que ver con el ángulo que forma la recta con el eje OX, en su sentido positivo.

En la figura de arriba α es el ángulo que forma la recta tangente con el eje OX. La pendiente de la recta es la tangente de este ángulo, $m = \operatorname{tg} \alpha$. Es decir,

$$\boxed{m = f'(a) = \operatorname{tg} \alpha}$$

Desarrollando en la expresión $y = f(a) + f'(a)(x - a)$, tenemos que

$$y = \underbrace{f'(a)}_{m} x + \underbrace{f(a) - f'(a)a}_{n}$$



Puesto que la derivada es un concepto visto en el curso anterior, no entraremos en cómo la pendiente de la recta tangente se obtiene con el límite anterior. Sí conviene resaltar la relevancia de este hecho puesto que las aplicaciones de la derivada vienen todas por este camino.

Podemos ya, dar la definición rigurosa de función derivable en un punto.

Definición 21. *Diremos que $y = f(x)$ es derivable en $x = a$ cuando exista*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Recordemos que, para que exista un límite los límites laterales deben coincidir. Por ello, para que $y = f(x)$ sea derivable en $x = a$ será

$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Pasemos a estudiar unos ejemplos concretos de funciones derivables.

En la mayoría de los casos, en vez de usar la notación $f'(x)$, manejaremos y'.

Ejemplo 39. Sea $y = f(x) = k$, siendo $k \in \mathbb{R}$. Demostremos que $f'(a) = 0$ para cualquier valor de a.

Si llamamos $f(x) = k$, entonces

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{k-k}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{0}{x-a}=0$$

Así que, para cualquier función constante su derivada será nula. La interpretación geométrica es clara; el ángulo que forma la tangente en cualquier punto con el eje OX es 0 y $\operatorname{tg} 0 = 0$.

Ejemplo 40. Sea $y = f(x) = kx$, siendo $k \in \mathbb{R}$. Demostremos que $f'(a) = k$ para cualquier valor de a.

Si llamamos $f(x) = kx$, entonces

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{kx - ka}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{k(x-a)}{x - a} = k$$

Ejemplo 41. Si $y = x^2$, entonces $y' = 2x$.

Llamemos $f(x) = x^2$, entonces

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{(x+a)(x-a)}{x - a} = \lim_{x\to a}(x + a) = 2a$$

Puesto que esto vale para cualquier $a \in \mathbb{R}$, podemos asegurar que $y' = 2x$.

Ejemplo 42. Si $y = x^3$, entonces $y' = 3x^2$.

Llamemos como siempre $f(x) = x^3$, entonces

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{(x^2 + ax + a^2)(x-a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x\to a}(x^2 + ax + a^2) = a^2 + a \cdot a + a^2 = 3a^2$$

Y puesto que esto vale para cualquier $a \in \mathbb{R}$, podemos asegurar que $y' = 3x^2$.

El siguiente ejemplo nos muestra una función, $y = |x|$, que no es derivable en $x = 0$.

Ejemplo 43. La función $y = |x|$ no es derivable en $x = 0$.

Recordemos que

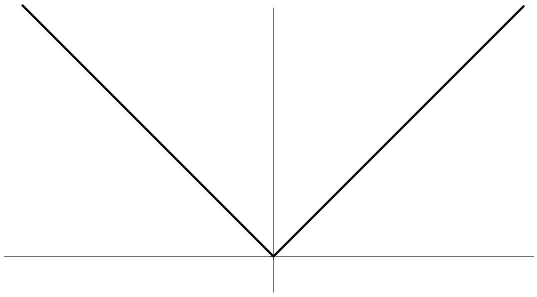
$$y = \begin{cases} -x & si \quad x \leq 0 \\ x & si \quad x > 0 \end{cases}$$

En este caso, debemos estudiar la derivada por la izquierda y por la derecha, puesto que la función cambia en $x = 0$. Si $f(x) = |x|$ entonces:

$$\left.\begin{array}{r} \displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{-x - |0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{x} = -1 \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x - |0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1 \end{array}\right\} \nexists \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

La función $y = |x|$ presenta un pico en $x = 0$, y por eso, los límites laterales no coinciden.

Ejercicio 17. *Halla la ecuación de la recta tangente a la curva de la función $y = x^3$ en $x = 2$.*



Solución: Hemos dicho que, la recta tangente t_a tiene por ecuación $t_a \equiv y = f(a) + f'(a)(x-a)$. En nuestro caso $a = 2$, y tenemos que hallar tanto $f(2)$ como $f'(2)$, siendo $f(x) = x^3$; $f(2) = 2^3 = 8$ y $f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$, luego

$$t_2 \equiv y = 8 + 12(x-2) \Longrightarrow \boxed{y = 12x - 16}$$

La recta tangente a la curva de $y = x^3$ en $x = 2$ es $t_2 \equiv y = 12x - 16$ y para representarla usamos una tabla de valores:

x	y
1	-4
2	8

$\Longrightarrow$ $(1, -4)$ y $(2, 8)$ son dos puntos de la tangente a la $y = x^3$. Ya podemos representar dicha recta en el plano.

Ejercicio 18. *Halla la ecuación de la recta tangente a la curva de la función $y = 3$ en $x = 2$.*

Solución: $t_2 \equiv y = f(2) + f'(2)(x-2)$, ahora bien $f(x) = 3$, luego $f(2) = 3$ y $f'(3) = 0$, así que

$$t_2 \equiv y = 3 + 0(x-2) \Longrightarrow \boxed{y = 3}$$

Vemos que, la tangente no depende del punto, pues $f(a) = 3$ y el término $(x-a)$ desaparece valga lo que valga a.

NOTA: Es importante resaltar el hecho de que, cuando la tangente es paralela al eje OX, la derivada es 0.

En el capítulo siguiente nos vamos a dedicar a calcular la derivada de una función. Enunciaremos una serie de reglas que nos ayudarán a calcular la derivada de cualquier función.

5.3. Reglas de derivación

La siguiente tabla, nos muestra las derivadas de las funciones elementales. Algunas de ellas, ya las hemos calculado. Estas derivadas, junto con las reglas de derivación, nos llevarán al cálculo de la derivada de cualquier función.

Derivadas de las funciones elementales

Función	Expresión analítica	Derivada
Constante	$y = k$	$y' = 0$
Potencial	$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
Raíz cuadrada	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
Raíz n-ésima	$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
Exponencial	$y = e^x$	$y' = e^x$
Exponencial	$y = a^x$	$y = a^x \ln a$
Logarítmica	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
Logarítmica	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x} \ln x$
Seno	$y = \operatorname{sen} x$	$y' = \cos x$
Coseno	$y = \cos x$	$y' = -\operatorname{sen} x$
Tangente	$y = \operatorname{tg} x$	$y' = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
Arco seno	$y = \operatorname{arc\,sen} x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Arco coseno	$y = \operatorname{arc\,cos} x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
Arco tangente	$y = \operatorname{arc\,tg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$

5.3.1. Reglas de derivación

R1 La derivada de la suma (o resta) de dos funciones es igual a la suma (o resta) de las derivadas.

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

R2 La derivada de una constante por una función es la constante por la derivada de la función.

$$(kf(x))' = kf'(x)$$

R3 la derivada de un producto de funciones es igual a la derivada de la primera por la segunda sin derivar más la primera sin derivar por la derivada de la segunda.

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

R4 La derivada de un cociente de funciones es igual a la derivada del numerador por el denominador sin derivar menos el numerador sin derivar por la derivada del denominador, y todo dividido por el cuadrado del denominador.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Los siguientes ejemplos nos ilustran la aplicación directa de las reglas de derivación, junto con el manejo de las derivadas de las funciones elementales.

Ejemplo 44. Comprobemos $(2x^3+7x^4)' = 6x^2+28x^3$

Derivemos cada una de ellas por separado. La función $y = 2x^3$ es el producto de una constante por una función, la derivada será el producto de la constante por la derivada de la función. En consecuencia $y' = 6x^2$. De la misma manera calculamos la derivada de $y = 7x^4$, que es, $y' = 28x^3$, luego

$$(2x^3+7x^4)' = 6x^2+28x^3$$

Ejemplo 45. Dadas las funciones $f(x) = 3x^2 - 7\ln x + 1$ y $g(x) = 8x^3 + 3\operatorname{sen} x - 4e^x$, calcularemos $(f(x)\cdot g(x))'$
Aplicaremos la regla de la derivada de un producto: $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
Ahora bien, $f'(x) = 6x - \frac{7}{x}$ y $g'(x) = 24x^2 + 3\cos x - 4e^x$, luego

$$(f\cdot g)' = f'\cdot g+f\cdot g' = (6x-\frac{7}{x})\cdot(8x^3+3\operatorname{sen} x-4e^x)+(3x^2-7\ln x+1)\cdot(24x^2+3\cos x-4e^x)$$

Dejaremos, de momento, indicado el producto.

Ejemplo 46. Sea la función $y = \dfrac{x^3-3x^2+1}{\cos x}$

$$y' = \frac{(3x^2-6x)\cos x-(x^3-3x^2+1)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{x^3\operatorname{sen} x+3x^2(\cos x-\operatorname{sen} x)-6x\cos x+\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$

Ejemplo 47. Calculemos la derivada de la función $y = \dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}$

$$y' = \frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)(1-\operatorname{tg} x)-(1+\operatorname{tg} x)[-(1+\operatorname{tg}^2 x)]}{(1-\operatorname{tg} x)^2} = \frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)(1-\operatorname{tg}^2 x-1-\operatorname{tg} x)}{(1-\operatorname{tg} x)^2}$$

$$= \frac{-\operatorname{tg} x(1+\operatorname{tg}^2 x)(1+\operatorname{tg} x)}{(1-\operatorname{tg} x)^2}$$

Ejemplo 48. Derivemos la función $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{tg} x}$

$$y' = \frac{\cos x(x+\operatorname{tg} x)-\operatorname{sen} x(1+1+\operatorname{tg}^2 x)}{(1+\operatorname{tg} x)^2} = \frac{x\cos x+\cos x\operatorname{tg} x-2\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} x\operatorname{tg}^2 x}{(1-\operatorname{tg} x)^2}$$

Hay funciones, como por ejemplo $y = \sqrt{\operatorname{sen} x}$, que no podemos derivar aplicando ninguna de las reglas de derivación vistas hasta ahora. Ésta, si nos damos cuenta, es una función compuesta por otras dos; la $\sqrt{x}$ y el $\operatorname{sen} x$:

$$x \longrightarrow \operatorname{sen} x \longrightarrow \sqrt{\operatorname{sen} x}$$

Para derivar este tipo de funciones, que son la mayoría, tenemos una regla especial de derivación llamada *regla de la cadena*.

5.4. Regla de la cadena

Sea $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$, entonces

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$$

Para derivar la función $f \circ g$, nos apoyaremos en la igualdad:

$$\boxed{(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

conocida por la **Regla de la cadena**.

Ejemplo 49. Si $y = \sqrt{\operatorname{sen} x}$ entonces

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}$$

Recordemos que $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ y $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$

Ejemplo 50. La función $y = \operatorname{sen}(x^2 + x - 1)$ está compuesta por $f(x) = \operatorname{sen} x$ y el polinomio $g(x) = x^2 + x - 1$

$$y' = \cos(x^2 + x - 1) \cdot (2x + 1)$$

Ejemplo 51. Si ahora $f(x) = \ln x$ y $g(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$, la composición de f y g es $(f \circ g)(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$

$$(f \circ g)'(x) = \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'}_{\frac{1\cdot(1-x)-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2}} = \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{2}{(1+x)^2} = \frac{2(1-x)}{(1+x)^3}$$

Ejercicio 19. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

1. $y = (x^2 - 3x + 1)^3$ (**Sol.** $y' = 3(x^2 - 3x + 1)^2 \cdot (2x - 3)$)
2. $y = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 1}$ $\left(\textbf{Sol. } y' = \dfrac{2x - 3}{3\sqrt[3]{(x^2 - 3x + 1)^2}}\right)$
3. $y = \ln(x + \sqrt{x} + 1)$ $\left(\textbf{Sol. } y' = \dfrac{1 + 2\sqrt{x}}{2x + 2x\sqrt{x} + 2\sqrt{x}}\right)$

En la mayoría de los casos, las funciones que tenemos que derivar, son funciones compuestas por una simple y una función f que no es difícil de derivar. Por ello, proponemos la siguiente tabla, que nos muestra las derivadas de las funciones compuestas más usuales.

Derivadas de las funciones compuestas más usuales

Función	Expresión analítica	Derivada	Compuesta	Derivada
Potencial	$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	$y = f(x)^n$	$y' = nf(x)^{n-1}f(x)'$
Raíz cuadrada	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{f(x)}$	$y = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
Raíz n-ésima	$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y = \sqrt[n]{f(x)}$	$y' = \frac{f'(x)}{n\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}$
Exponencial	$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^{f(x)}$	$y' = e^{f(x)}f'(x)$
Exponencial	$y = a^x$	$y = a^x \ln a$	$y = a^{f(x)}$	$y = f'(x)a^{f(x)} \ln a$
Logarítmica	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \ln f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
Logarítmica	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x} \ln a$	$y = \log_a f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)} \ln a$
Seno	$y = \operatorname{sen} x$	$y' = \cos x$	$y = \operatorname{sen} f(x)$	$y' = \cos f(x)f'(x)$
Coseno	$y = \cos x$	$y' = -\operatorname{sen} x$	$y = \cos f(x)$	$y' = -\operatorname{sen} f(x)f'(x)$
Tangente	$y = \operatorname{tg} x$	$y' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$y = \operatorname{tg} f(x)$	$y' = (1 + \operatorname{tg}^2 f(x))f'(x)$
Arco seno	$y = \operatorname{arc sen} x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \operatorname{arc sen} f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
Arco coseno	$y = \arccos x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arccos f(x)$	$y' = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
Arco tangente	$y = \operatorname{arc tg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$y = \operatorname{arc tg} f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}$

Esta tabla abarca casi la totalidad de las funciones con las que nos vamos a encontrar en este curso.

En la siguiente sección proponemos una serie de ejercicios, resueltos o con su solución. Algunos de ellos, están enfocados al estudio de la derivabilidad. Para este tipo de ejercicios estudiaremos las derivadas laterales.

5.5. Ejercicios

Ejercicio 20. *Calcula la derivada de las siguientes funciones:*

1. $y = (e^{2x} + 1)^3$ $\quad \left(\textbf{\textit{Sol.}}\ y' = 6(e^{2x} + 1) \cdot e^{2x}\right)$
2. $y = \operatorname{sen}(3x + 1)$ $\quad \left(\textbf{\textit{Sol.}}\ y' = 3\cos(3x + 1)\right)$
3. $y = 2^{x^3-4x^2-x}$ $\quad \left(\textbf{\textit{Sol.}}\ y' = 2^{x^3-4x^2-x}(3x^2 - 8x - 1)\ln 2\right)$
4. $y = \ln\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$ $\quad \left(\textbf{\textit{Sol.}}\ y' = \dfrac{-\sqrt{x}}{x - x^2}\right)$
5. $y = x^2 \ln x + x \ln x^2$ $\quad \left(\textbf{\textit{Sol.}}\ y' = (2x + 2)\ln x + x + 2\right)$
6. $y = (1 + \sqrt{3})^{2x}$ $\quad \left(\textbf{\textit{Sol.}}\ y' = 2(1 + \sqrt{3})^{2x} \ln 1 + \sqrt{3}\right)$
7. $y = \dfrac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \operatorname{tg}^2 x$ $\quad \left(\textbf{\textit{Sol.}}\ y' = \operatorname{tg}^5 x - \operatorname{tg}^3 x - 2\operatorname{tg} x\right)$
8. $y = \sqrt[3]{3-2x}$ $\quad \left(\textbf{\textit{Sol.}}\ y' = \dfrac{-2}{3\sqrt[3]{(3-2x)^2}}\right)$

9. $y = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ $\left(\textbf{\textit{Sol.}}\ y' = -\dfrac{1}{x^2} \cos \dfrac{1}{x} \right)$

10. $y = \sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$ $\left(\textbf{\textit{Sol.}}\ y' = \dfrac{-\operatorname{sen} x}{\sqrt{(1-\cos x)^3}} \sqrt{1+\cos x} \right)$

11. $y = \ln^2 (1+\ln x)$ $\left(\textbf{\textit{Sol.}}\ y' = 2\ln (1+\ln x) \dfrac{1}{1+\ln x} \dfrac{1}{x} \right)$

12. $y = \operatorname{arc\,tg} \ln x$ $\left(\textbf{\textit{Sol.}}\ y' = \dfrac{1}{1+\ln^2 x} \dfrac{1}{x} \right)$

13. $y = \arccos (3x^3 - 7x + 1)$ $\left(\textbf{\textit{Sol.}}\ y' = \dfrac{-9x^2+7}{\sqrt{1-(3x^3-7x+1)^2}} \right)$

Ejercicio 21. *Calcula la derivada de* $y = x^{\cos x}$

Solución.
$y = x^{\cos x}$ es una función compuesta por la función potencial y la función $y = \cos x$. Dentro de la tabla, lo más parecido es $y = a^{f(x)}$ siendo $a \in \mathbb{R}$. Nosotros no podemos aplicar la derivada de esta última porque la base no es un número real sino una función. Para derivar funciones de la forma $f(x)^{g(x)}$ aplicaremos lo siguiente:

$$y = f(x)^{g(x)} \Longrightarrow \ln y = \ln f(x)^{g(x)} \Longrightarrow \ln y = g(x) \cdot \ln f(x)$$

Derivamos

$$\frac{1}{y} \cdot y' = g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{1}{f(x)}$$

$$\boxed{y' = y \cdot \left(g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{1}{f(x)} \right) = f(x)^{g(x)} \cdot \left(g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{1}{f(x)} \right)}$$

En nuestro caso

$$\ln y = \ln (x^{\cos x}) = \cos x \cdot \ln x$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = -\operatorname{sen} x \cdot \ln x + \frac{cosx}{x}$$

$$y' = x^{\cos x} \left(-\operatorname{sen} x \cdot \ln x + \frac{cosx}{x} \right)$$

Ejercicio 22. *Calcula la derivada de las siguientes funciones*

1. $y = (\operatorname{sen} x)^{x+1}$ $\left(\textbf{\textit{Sol.}}\ y' = (\operatorname{sen} x)^{x+1} \cdot \left(\ln (\operatorname{sen} x) + \dfrac{(x+1)\cos x}{\operatorname{sen} x} \right) \right)$

2. $y = (\ln x)^{\operatorname{tg} x}$ $\quad\left(\textbf{\textit{Sol.}}\ y' = (\ln x)^{\operatorname{tg} x} \cdot \left[(1+\operatorname{tg}^2 x)\ln(\ln x) + \dfrac{\operatorname{tg} x}{\ln x}\cdot\dfrac{1}{x}\right]\right)$

3. $y = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}$ $\quad\left(\textbf{\textit{Sol.}}\ y' = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}\left(-\operatorname{sen} x \ln(\operatorname{sen} x) + \dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}\right)\right)$

Ejercicio 23. *Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones:*

1. $y = \begin{cases} 3x+2 & si \quad x \le 1 \\ x^2+x+3 & si \quad x > 1 \end{cases}$

2. $y = \begin{cases} 2x^2-3x+1 & si \quad x \le 0 \\ 2x+1 & si \quad x > 0 \end{cases}$

Solución.

1. La función es derivable en todo $\mathbb{R}$ salvo a lo sumo en $x = 1$. Estudiemos en primer lugar la continuidad en $x = 1$. Si resulta ser discontinua en dicho punto la función no será ya derivable.

   a) $\exists f(1) = 3 \cdot 1 + 2 = 5$

   b) $\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(3x+2) = 5 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+3) = 5 \end{array} \right. \Longrightarrow \exists \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 5$

   c) La tercera condición se cumple de forma trivial.

   Recordemos que una función es derivable si existe el límite $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, lo que equivale en este tipo de funciones a derivar trozo a trozo:

   $$f'(x) = \begin{cases} 3 & si \quad x \le 1 \\ 2x+1 & si \quad x > 1 \end{cases} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} f'(1^-) = 3 \\ f'(1^+) = 2\cdot 1 + 1 = 3 \end{array} \right. \Longrightarrow \exists f'(1) = 3$$

   La función es continua y derivable en $x = 1$.

2. La función es derivable en todo $\mathbb{R}$ salvo a lo sumo en $x = 0$. Estudiemos en primer lugar la continuidad en $x = 0$. Si resulta ser discontinua en dicho punto la función no será ya derivable.

   a) $\exists f(0) = 1$

   b) $\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(2x^2-3x+1) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(2x+1) = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \exists \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$

   c) La tercera condición se cumple de forma trivial.

$$f'(x) = \begin{cases} 4x-3 & si \quad x \leq 0 \\ 2 & si \quad x > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(0^-) = 4 \cdot 0 - 3 = -3 \\ f'(0^+) = 2 \end{cases} \Longrightarrow \nexists f'(0)$$

La función es continua pero no derivable en $x = 0$.

Ejercicio 24. *Calcula los parámetros a y b para que la siguiente función sea derivable en todo* $\mathbb{R}$*:*

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - bx + 1 & si \quad x \leq 1 \\ -ax + b & si \quad x > 1 \end{cases}$$

Solución. La función es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ salvo quizá en el $x = 1$. Forzaremos a la función a que lo sea incluso en dicho punto.
Estudiemos en primer lugar la continuidad

1. $\exists f(1) = a \cdot 1^2 - b \cdot 1 + 1 = a - b + 1$

2. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(ax^2 - bx + 1) = a - b + 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(-ax + b) = -a + b \end{cases}$ Para que exista el límite han de coincidir, lo que nos lleva a $a - b + 1 = -a + b$, luego $2a - 2b = -1$

3. La tercera condición de continuidad no nos aporta nada nuevo.

De momento tenemos una ecuación con dos incógnitas, a y b. La derivabilidad nos proporcionará la otra ecuación:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax - b & si \quad x \leq 1 \\ -a & si \quad x > 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(1^-) = 2a - b \\ f'(1^+) = -a \end{cases}$$

Si queremos que la función sea derivable en $x = 1$ debe ser $f'1^- = f'(1^+)$ lo que se traduce en $2a - b = -a$, o lo que es lo mismo $3a - b = 0$. Esta ecuación junto con $2a - 2b = -1$ nos da el sistema

$$\begin{cases} 2a - 2b = -1 \\ 3a - b = 0 \end{cases}$$

que una vez resuelto $a = 1/4$ y $b = 3/4$.

Para que la función $f(x)$ sea derivable en $x = 1$ ha de ser $a = 1/4$ y $b = 3/4$.

Ejercicio 25. *Calcula a y b para que la siguiente función sea derivable en todo* $\mathbb{R}$*:*

$$\begin{cases} x^2 - mx + 5 & si \quad x \leq 0 \\ -x^2 + n & si \quad x > 0 \end{cases}$$

*(***Sol.** $m = 0$ y $n = 5$*)*

Ejercicio 26. *Encontrar la relación que deben verificar los parámetros a y b para que la siguiente función sea derivable en el punto* $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 + bx & si \quad x < 1 \\ \ln x + 2\cos x & si \quad \geq 1 \end{cases}$$

*(***Sol.** $a + b = 2$*)*

Ejercicio 27. *Calcula a y b para que la siguiente función sea derivable en todo $\mathbb{R}$:*

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & si \quad x \leq 2 \\ x^2 - bx - 4 & si \quad x > 2 \end{cases}$$

*(***Sol.** $a = -1$ y $b = 0$*)*

Ejercicio 28. *Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones:*

1. $y = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ x^2 & si \quad 0 \leq x < 1 \\ x & si \quad x > 1 \end{cases}$

2. $y = \begin{cases} x^2 + 2 & si \quad x \leq 0 \\ 3 - (x-1)^2 & si \quad x > 0 \end{cases}$

3. $y = \frac{|x|}{e^{|x-1|}}$

   Indicación: $y = \begin{cases} \frac{-x}{e^{1-x}} & si \quad x \leq 0 \\ \frac{x}{e^{1-x}} & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{x}{x^{-(1-x)}} & si \quad x > 1 \end{cases}$

Capítulo 6

Aplicaciones de las derivadas

6.1. Introducción

En esta unidad trabajamos las aplicaciones de las derivadas, siendo una de las más significativas la optimización de funciones por las muchas aplicaciones que tiene en el campo de la Economía y las Ciencias Sociales.

En la más remota antigüedad ya se encuentran problemas de optimización. Uno de los más famosos se refiere a la Princesa Dido, fundadora de Cartago. La leyenda es la siguiente: "el rey Jarbas de Numibia daría a la princesa Dido toda la tierra que ésta pudiera encerrar con una piel de buey" . Este famoso problema fue resuelto por Jacques Bernoulli $(1654-1705)$, y se puede enunciar así: "De entre todas las curvas cerradas de igual perímetro, encontrar aquella que encierra área máxima" . La solución es la circunferencia. La Princesa Dido hizo tiras la piel de buey y encerró una superficie circular.

6.2. Función derivada. Derivadas sucesivas

Definición 22. *Si una función f es derivable en todos los puntos de un intervalo I, la función $f' : x \longrightarrow f'(x)$ definida en I se llama* función derivada *de f.*

Nota: *No se debe confundir los conceptos de* derivada de una función en un punto *que vimos en la unidad anterior, que es un número real, con* función derivada *que es una función:*

$$f' : \mathbb{R} \underset{x \longrightarrow f'(x)}{\longrightarrow} \mathbb{R}$$

Siendo $f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

El conjunto $Dom(f')$ o dominio de derivabilidad de f está formado por todos los elementos de $Dom(f)$ en los que f es derivable. Por tanto, $Dom(f') \subset Dom(f)$.

Ahora bien, si una función f es derivable, la función derivada primera de f es la función f'. Si f' es derivable, la función derivada de f' o función derivada segunda de f

es f'', pudiendo continuar este proceso indefinidamente. Si llegamos a derivar n veces, la función que obtenemos se llaman función derivada n-ésima de f y es la función

$$(f^{(n-1)})' = f^{(n)}$$

Derivadas sucesivas

- Derivada primera de $f(x) \longrightarrow f'(x)$
- Derivada segunda de $f(x) \longrightarrow f''(x) = (f'(x))'$
- Derivada tercera de $f(x) \longrightarrow f'''(x) = (f''(x))'$

- Derivada n-ésima de $f(x) \longrightarrow f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$

Ejemplo 52. *Sea $f(x) = 2x^4 - 2x^2$, calcula su función derivada y sus derivadas sucesivas.*

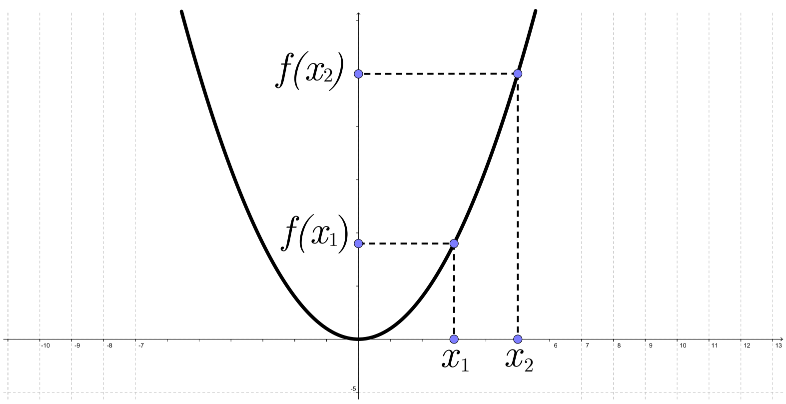
$f'(x) = 8x^3 - 4x$
$f''(x) = 24x^2 - 4$
$f'''(x) = 48x$
$f^{(4)}(x) = 48$
$f^{(5)}(x) = f^{(6)}(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = 0$

6.3. Monotonía de una función

La monotonía de una función, se basa en estudiar cómo aumenta o disminuye la variable dependiente (y) al aumentar o disminuir la variable independiente (x).

Definición 23. *Una función f es* ***estrictamente creciente*** *en un intervalo (a, b) si, y sólo si $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$*

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$



Ejemplo 53. *La parábola $y = x^2$, como función $f(x) = x^2$, sabemos que es una función creciente en el intervalo $(0, +\infty)$.*

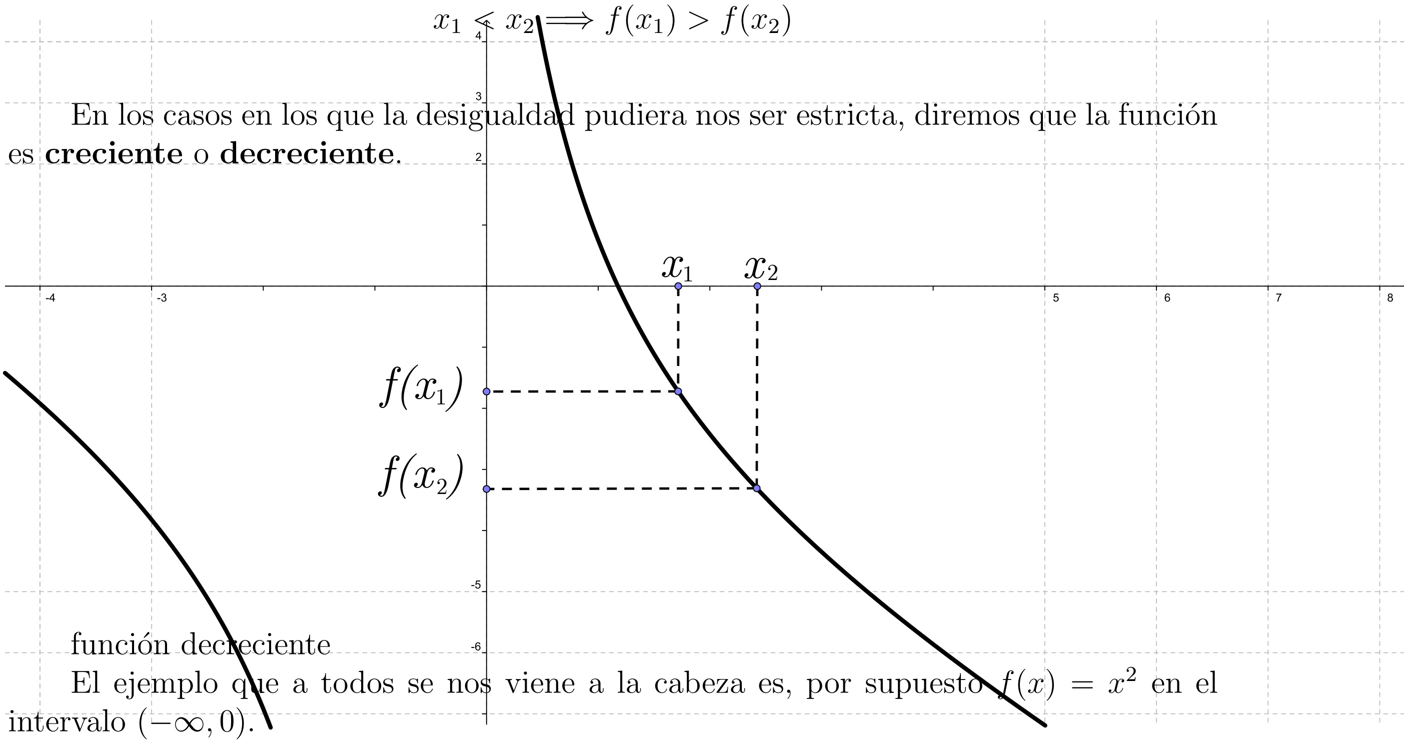
En efecto, si $0 < x_1 < x_2$ entonces $x_1^2 < x_2^2$ y luego $f(x_1) < f(x_2)$ que es la condición que pide la definición para ser función creciente.
Quizá lo veamos más claro tomando $0 < 3 < 5$, ya que, $3^2 < 5^2$, luego $f(3) < f(5)$.

Sin embargo, si tomamos $-3 < -2$, vemos que $(-3)^2 \not< (-2)^2$. Es el momento de la siguiente:

Definición 24. *Una función f es* ***estrictamente decreciente*** *en un intervalo (a, b) si, y sólo si $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$*

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

En los casos en los que la desigualdad pudiera nos ser estricta, diremos que la función es **creciente** o **decreciente**.



función decreciente

El ejemplo que a todos se nos viene a la cabeza es, por supuesto $f(x) = x^2$ en el intervalo $(-\infty, 0)$.

Sigamos con la función $f(x) = x^2$. Su derivada es $f'(x) = 2x$. Fijémonos en que $f'(x) > 0$ en el intervalo $(0, +\infty)$ que coincide con el intervalo en donde la función es creciente. Es más $f'(x) < 0$ en el intervalo $(-\infty, 0)$ que es donde la función es decreciente. ¿Es casualidad, o por el contrario es una propiedad que relaciona la monotonía de una función con su derivada?
Demos respuesta a esta cuestión en el siguiente apartado.

6.4. Intervalos de crecimiento y decrecimiento

En el apartado anterior, se intuye que la primera derivada de una función, nos puede ofrecer información sobre la monotonía de la misma. La realidad es que, nos ofrece toda la información acerca de los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$. Y sea $x_0 \in (a, b)$:

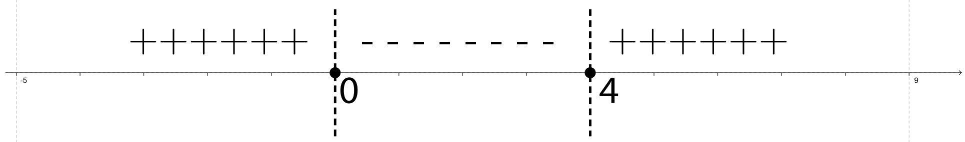
- Si $f'(x_0) > 0$ entonces f es estrictamente creciente en un intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ para un cierto $\varepsilon > 0$.

- Si $f'(x_0) < 0$ entonces f es estrictamente decreciente en un intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ para un cierto $\varepsilon > 0$.

¿Qué ocurre en el caso en el que $f'(x_0) =$ para cierto $x_0 \in (a, b)$? No podemos afirmar nada sobre el crecimiento o decrecimiento en x_0. Recordemos que si $f'(x)_0 = 0$ la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ es paralela al eje de abscisas y puede que no sea ni creciente ni decreciente.

Ejemplo 54. *Estudiar la monotonía de la función* $y = x^3 - 6x^2 + 5$

Lo primero es obtener la derivada de y: $y' = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4)$. Signo de

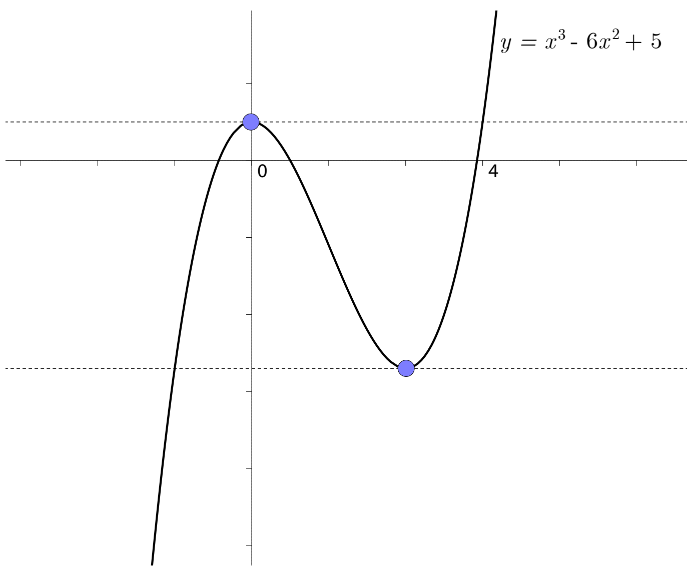


$y = 3x^2 - 12x$

Hallamos el signo de y'
y concluimos que:

- f es estrictamente creciente en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$
- f es estrictamente decreciente en $(0, 4)$

La conclusión anterior, se puede observar fácilmente en la gráfica de la función. Por otro lado, la gráfica nos muestra la representación de dos rectas tangentes. Cada una de ellas es tangente en los puntos de abscisas $x = 0$ y $x = 4$. ¿Tendrá algo que ver con los valores en donde casualmente $f'(x) = 0$? A la respuesta de esta pregunta nos dedicaremos en la siguiente sección. Función $y = x^3 - 6x^2 + 5$



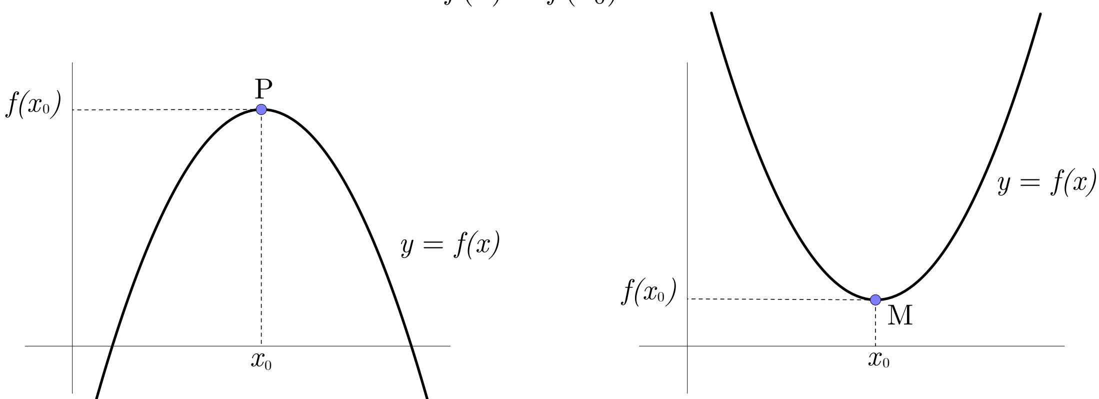
6.5. Extremos relativos

Definición 25. *Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real, continua y derivable en el intervalo I. Diremos que, $x_0 \in I$ es un punto singular de f si $f'(x_0) = 0$*

Estos puntos, en los que la recta tangente es horizontal y por lo tanto paralela al eje de abscisas, son los candidatos a ser *máximo* o un *mínimo* de nuestra función de estudio.

Definición 26. *Una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tienen un **máximo relativo** en un punto de abscisa $x_0 \in I$, si existe un entorno del mismo, $E(x_o, \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ tal que $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$ se verifica que*

$$f(x) < f(x_0)$$



Máximo y mínimo relativos

Definición 27. *Una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tienen un **mínimo relativo** en un punto de abscisa $x_0 \in I$, si existe un entorno del mismo, $E(x_o, \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ tal que $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$ se verifica que*

$$f(x_0) < f(x)$$

Está claro que los extremos relativos son una fuente importante de información a la hora de representar a la misma. Ahora bien, ¿cómo encontramos estos extremos?
Según hemos visto antes, un punto, de abscisa x_0, donde la función no es creciente ni decreciente, es un punto donde la derivada es nula. Esto es, $f'(x_0) = 0$. Parece lógico pensar, por tanto que, resolviendo la ecuación $f'(x) = 0$ habremos encontrado los extremos. Sin embargo, hay puntos donde la primera derivada es cero y que no son extremos relativos.

Criterios para encontrar extremos relativos

Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real, continua y derivable en el intervalo I.

- Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$ entonces $(x_0, f(x_0))$ es un **Máximo relativo**.
- Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$ entonces $(x_0, f(x_0))$ es un **Mínimo relativo**.

Ejemplo 55. *Determina los extremos relativos de* $f(x) = x^3 - 3x$

Derivamos f e igualamos a cero. $f'(x) = 3x^2 - 3$ y $f'(x) = 0 \Longrightarrow 3x^2 - 3x = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$.
Derivamos de nuevo y obtenemos $f''(x) = 6x$:

1. $f'(1) = 0$ y $f''(1) = 6 > 0 \Longrightarrow$ f tiene un mínimo relativo en $(1, f(1))$.
2. $f'(-1) = 0$ y $f''(-1) = -6 < 0 \Longrightarrow$ f tiene un máximo relativo en $(-1, f(-1))$.

Y como $f(1) = -2$ y $f(-1) = 2$ concluimos que en los puntos $(1, -2)$ y $(-1, 2)$ hay un mínimo y un máximo relativos respectivamente.

Ejemplo 56 (PAU). *Calcula* a, b, *y* c *para que la función* $ax^2 + bx + c$ *pase por el punto* $(4, 6)$ *y tenga un mínimo en el punto* $(2, -2)$.
Solución: En primer lugar, tenemos tres incógnitas: a, b y c. Lo que implica que para hallarlas necesitaré tres ecuaciones y resolver el sistema. Del enunciado debo conseguir las tres ecuaciones:

1. f tienen un mínimo relativo en $(2, -2)$. Este dato me aporta la siguiente información:
2. f pasa por el punto $(4, 6)$ y por lo tanto $f(4) = 6 \Longrightarrow 16a + 4b + c = 6$

   2.1 $(2, -2)$ es un punto de la gráfica de f luego $f(2) = -2 \Longrightarrow 4a + 2b + c = -2$.
   2.2 En $x = 2$ hay un extremo, con lo que $f'(2) = 0 \Longrightarrow 4a + b = 0$

   El sistema a resolver es $\left\{\begin{array}{c} 16a + 4b + c = 6 \\ 4a + 2b + c = -2 \\ 4a + b = 0 \end{array}\right.$ que resolvemos obteniendo $a = 2$, $b = -8$ y $c = 6$. La función que nos piden es

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 6$$

6.6. Optimización de funciones

Otra de las aplicaciones de las derivadas es la de optimizar funciones. Recordemos que en el tema 3 nos dedicamos a optimizar o a minimizar recursos. En este caso, se trata de lo mismo, pero manejando funciones que no tienen por qué ser lineales.

Veamos un ejemplo de problema con el que nos podemos encontrar.
Ejemplo 57. ***(Murcia, junio 2005)*** *Una hoja de papel debe tener* $18\ cm^2$ *de texto impreso, márgenes superior e inferior de* $2\ cm$ *de altura y márgenes laterales de* $1\ cm$ *de anchura. Obtener razonadamente las dimensiones que minimizan la superficie de papel.*

La dificultad de estos problemas, consiste en encontrar la expresión analítica de la función que hemos de optimizar. Los pasos a seguir son:

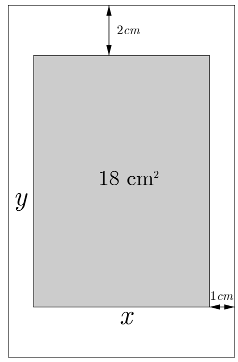
1. Si el problema, es de tipo geométrico, es de mucha utilidad dibujar la situación. El ejemplo de arriba, aunque pueda parecer que no, es de carácter geométrico.

2. Mediante los datos del problema, se construye la función que hay que maximizar o minimizar.

3. Si la función tiene más de una variable, hay que relacionar las variables mediante ecuaciones a fin de conseguir expresar la función inicial utilizando una sola variable.

4. Se hallan los extremos relativos de esta función.

5. Se interpretan los resultados obtenidos rechazando aquellos que por la naturaleza del problema no sean posibles.



Vamos a resolver el problema de la hoja de papel.

1. El dibujo ya lo tenemos.

2. La función a optimizar es la que nos da el área de la hoja, que es $f(x,y) = (x+2)\cdot(y+4)$.

3. Relacionamos las variables mediante la igualdad $x \cdot y = 18$ que obtenemos del enunciado. De donde $y = \dfrac{18}{x}$

4. La función pasa a ser de una variable: $f(x) = (x+2)\cdot\left(\dfrac{18}{x}+4\right)$. Y para obtener los extremos, derivamos:
$f'(x) = \dfrac{18}{x} + 4 - \dfrac{18}{x^2}\cdot(x+2)$ de donde $f'(x) = 0 \Longrightarrow \dfrac{18}{x} + 4 - \dfrac{18}{x^2}\cdot(x+2) = 0$
$4 - \dfrac{32}{x^2} = 0 \Longrightarrow x^2 = 8 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{8} \Longrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$

5. En este caso, la interpretación de los resultados es clara, puesto que estamos hablando de una longitud, $x = 2\sqrt{2}\ cm$.
Nos queda comprobar que se trata de un mínimo para la función f. En efecto, si derivamos de nuevo y sustituimos: $f''(x) = \dfrac{64}{x^3}$ y $f''(2\sqrt{2}) > 0$.
Para hallar la altura de la hoja, nos toca sustituir x por su valor en la expresión $y = \dfrac{18}{x}$ y por lo tanto
$y = \dfrac{18}{x} \Longrightarrow y = \dfrac{18}{2\sqrt{2}} = \dfrac{9\sqrt{2}}{2}\ cm.$

Ejemplo 58. *Halla el número positivo cuya suma con veinticinco veces su inverso sea mínima.*

Solución: Este problema no necesita de dos variables: $f(x) = x + \dfrac{25}{x}$.

Derivamos e igualamos a cero:

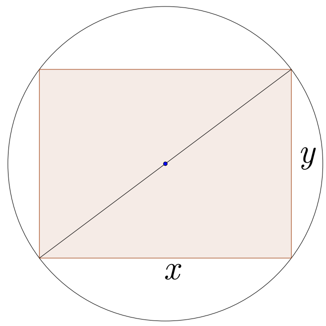
$$f'(x) = 1 - \frac{25}{x^2} \Longrightarrow 1 - \frac{25}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 5$$

$x = -5$ no es válido puesto que nos piden que hallemos un número positivo.
Comprobemos que, efectivamente, se trata de un mínimo:

$$f''(x) = \frac{50}{x^3} \text{ y } f''(5) > 0 \Longrightarrow \text{en } x = 5 \text{ hay un mínimo}$$

Ejemplo 59. *Halla las dimensiones del jardín rectangular de mayor área que se puede inscribir en un terreno circular de* 200 m *de radio.*

Solución:



- La función a optimizar es $A(x, y) = x \cdot y$
- La relación entre las variables x e y la obtenemos de $x^2 + y^2 = 200^2$. Luego

$$x = \sqrt{40000 - y^2} \Longrightarrow A(x) = x \cdot \sqrt{40000 - x^2}$$

- Optimizamos la función:

$$A'(x) = \frac{40000 - 2x^2}{\sqrt{40000 - x^2}}; A'(x) = 0 \Longrightarrow x = \pm 100\sqrt{2}$$

  $x = -100\sqrt{2}$ no es solución válida según los datos del problema. Y como $A''(x) < 0$ efectivamente, en $x = 100\sqrt{2}$ hay un máximo.

Ahora nos queda obtener y mediante la igualdad $x^2 + y^2 = 200^2$, de donde $y = 100\sqrt{2}$.
Conclusión: La función presenta un máximo en $(100\sqrt{2}, 100\sqrt{2})$, por lo que el rectángulo de mayor área es un cuadrado.

6.7. Problemas resueltos

1. (**Murcia, junio de 2009**) La función $f(x) = x^3 + px^2 + q$ tiene un valor mínimo relativo igual a 3 en el punto de abscisa $x = 2$. Halla los valores de los parámetros p y q.

   Solución: Como tenemos dos incógnitas, necesitaremos dos ecuaciones para poder resolverlo. De toda la información del problema, nos centraremos en eso:
   $\rightarrow$ Por tener un mínimo relativo en $x = 2$ es obvio que $f'(2) = 0$
   $\rightarrow$ Por ser su valor de $y = 3$, es obvio que $f(2) = 3$.
   Así pues:
   $f(x) = x^3 + px^2 + q \Longrightarrow f(2) = 8 + 4p + q = 3 \Longrightarrow 4p + q = -5$
   $f'(x) = 3x^2 + 2px \Longrightarrow f'(2) = 12 + 4p = 0 \Longrightarrow 4p = -12 \Longrightarrow p = -3$

   Sustituyendo $q = 7$. Así, los parámetros pedidos son $p = -3$ y $q = 7$.

2. (**Murcia, junio de 2009**) Hallar las dimensiones de un campo rectangular de 3600 m^2 de superficie para poderlo cercar con una valla de longitud mínima.

Solución: Un "truco" para estos ejercicios es siempre lo mismo: observar la información que me den, poner una de las variables en función de la otra, y mi función objetivo será la que me piden maximizar o minimizar. Así pues: $A = 3600\ m^2$ y

$$A = \text{base} \times \text{altura} = x \cdot y \Longrightarrow x \cdot y = 3600 \Longrightarrow y = \frac{3600}{x}$$

Y como la longitud de la valla debe ser mínima, me piden minimizar el perímetro:

$$P = 2x + 2y = 2x + 2 \cdot \frac{3600}{x} = 2x + \frac{7200}{x}$$

$$P' = 2 - \frac{7200}{x^2} = 0 \Longrightarrow 2 = \frac{7200}{x^2} \Longrightarrow x^2 = 3600 \Longrightarrow x = \pm 60$$

Me quedo con la solución positiva (porque las dimensiones del campo no pueden ser negativas). Así pues: $y = \frac{3600}{60} = 60$ y las dimensiones del campo rectangular para cercarlo con una valla de mínima longitud son 60×60.

Nota: No estaría mal comprobar que efectivamente se trata de un mínimo:
$P''(x) = \dfrac{14400}{x^3}$ y $P''(60) > 0$. Efectivamente en $x = 60$ hay un mínimo de la función $P(x) = 2x + \dfrac{7200}{x}$

3. (**Murcia, septiembre de 2009**) Dada la parábola de ecuación $y = x^2 - 8x + 12$, hallar el punto en el que la recta tangente es paralela al eje de abscisas.

   Solución: Para que sea paralela al eje de abscisas, su pendiente debe ser 0, esto es, la recta no tiene inclinación.

   Buscamos un punto x tal que $f'(x) = 0$
   $y = x^2 - 8x + 12 \Longrightarrow y' = 2x - 8$. Así pues: $y' = 0 \Longrightarrow 2x - 8 = 0 \Longrightarrow x = 4$.

   Así, podemos afirmar que el punto en el que la recta es paralela al eje de abscisas es $x = 4$.

4. (**Murcia, septiembre de 2009**) Hallar dos números cuya suma sea 20, sabiendo que su producto es máximo. Razonar el método utilizado.

   Solución: Sean x e y dichos números. Como siempre en los problemas de máximos y mínimos, la idea es relacionar una variable con la otra, información que debemos tomar del enunciado, y después sustituir dicha relación en la función que hay que maximizar. Veámoslo:

   $\rightarrow$ cuya suma sea $20 \Longrightarrow x + y = 20 \Longrightarrow y = 20 - x$
   $\rightarrow$ sabiendo que su producto es máximo: $x \cdot y$ máximo $\Longrightarrow$ como $y = 20 - x$ maximizamos la función $f(x) = x(20 - x)$

$$f`(x) = 20 - 2x \Longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 20 - 2x = 0 \Longrightarrow 20 = 2x \Longrightarrow x = 10$$

Comprobemos que efectivamente es un máximo: $f''(x) = -2 < 0$ luego para cualquier valor de x que anule la derivada se maximiza la función. En particular, ocurre con $x = 10$. Y como $y = 20 - x \Longrightarrow y = 10$.

Conclusión: Los dos números que maximizan su propio producto son $x = 10$ e $y = 10$.

5. (**Castilla-La Mancha, septiembre de 2009**) Una multinacional ha estimado que anualmente sus beneficios en eurpos vienen dados por la función

$$B(x) = -16x^2 + 24\,000x - 700\,000$$

donde x representa la cantidad de unidades vendidas. Determinar:

a) Las unidades que se han de vender para obtener un beneficio de $7\,300\,000$.

b) La cantidad de unidades que deben ser vendidas para que el beneficio sea máximo.

c) El beneficio máximo.

Solución:

a) $B(x) = 7\,300\,000$. Así pues:

$$-16x^2 + 24000x - 700000 = 7300000$$

se trata de resolver la ecuación de segundo grado dada por:

$$-16x^2 + 24000x - 8000000 = 0$$

Resolviéndola obtenemos los valores $x_1 = 500$ y $x_2 = 1000$

b)

$$B(x) = -16x^2 + 24000x - 700000 \Longrightarrow B'(x) = -32x + 24000$$

$$B'(x) = 0 \Longrightarrow -32x + 24000 = 0 \Longrightarrow x = 750$$

Veamos que efectivamente es un máximo:
$B''(x) = -32 < 0$ y esto ocurre para todo x que anula $B'(x)$, en particular lo será para $x = 750$.

La cantidad de unidades que deben ser vendidas para maximizar el beneficio son 750 unidades.

c) Simplemente sustituimos $x = 750$ en la función beneficio:

$$B(750) = -16(750)^2 + 24000 \cdot 750 - 700000 = 8300000 \text{ euros}$$

Nota: Obsérvese que obtenemos dos valores en el apartado (a). Al tratarse de una parábola invertida, es lógico que el máximo se alcance entre 500 y 1000.

6. (**Valencia, septiembre de 2009**) La especialidad de una pastelería es la fabricación de cajas de bombones "xupladits" . Los costes de fabricación $C(x)$ en euros, están relacionados con el número de cajas producidas x, mediante la función:

$$C(x) = 0,1x^2 + 20x + 2500$$

Si el precio de venta de una caja es de 80 euros y se venden todas las cajas producidas, se pide:

a) La función de ingresos que obtiene la pastelería con la venta de las cajas.

b) La función de beneficios, entendida como diferencia entre ingresos y costes de fabricación.

c) El número de cajas de bombones que se deben producir para maximizar el beneficio, y el beneficio máximo.

Solución:

a) Función ingreso:
Sea x ="número de cajas producidas" y P = precio de venta de cada caja, $P = 80$.

Así: $I(x) = P \cdot x = 80x$

b) Sea $B(x)$ = "función beneficio"

$$B(x) = I(x) - C(x) = 80x - (0,1x^2 + 20x + 2500) = -0,1x^2 + 60x - 2500$$

c) Queremos maximizar el beneficio, luego:

$$B'(x) = 0 \Longrightarrow -0,2x + 60 = 0 \Longrightarrow x = 300$$

Veamos que efectivamente se maximiza: $B''(x) = -0,2 < 0$, en particular para $x = 300$:

$$B(300) = -0,1 \cdot 300^2 + 60 \cdot 300 - 2500 = -9000 + 18000 - 2500 = 6500$$

Así pues, afirmamos que se deben producir 300 cajas de bombones, a 80 e cada una, para obtener el máximo beneficio que será de 6 500 e en total.

7. (**Castilla-La Mancha, junio de 2009**) EL coeficiente de elasticidad de un producto, en función de la temperatura (t) en grados centígrados viene definido por la función $E(t) = \dfrac{t^2}{9} - 2t + 10$:

a) ¿A qué temperatura o temperaturas se obtiene una elasticidad de 2?

b) Calcular el valor de la temperatura para que la elasticidad sea mínima.

c) Calcular ese mínimo.

Solución

a) $E(t) = 2 \Longrightarrow \dfrac{t^2}{9} - 2t + 10 = 2$. Se trata de resolver la ecuación de segundo grado: $t^2 - 18t + 72 = 0$ obteniendo $t_1 = 12$ y $t_2 = 6$.

Así, las temperaturas donde conseguimos un coeficiente de elasticidad de 2, es precisamente en 12^oC y 6^oC.

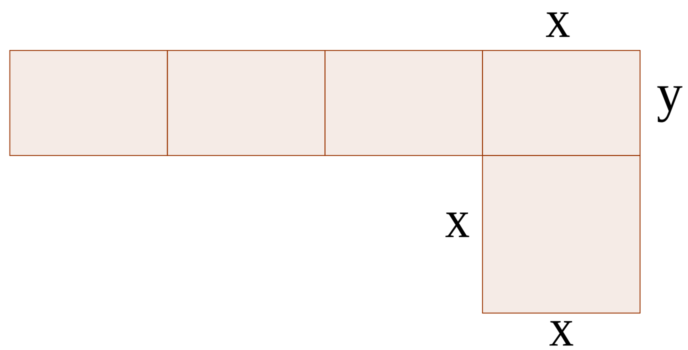
b) $E(t) = \dfrac{t^2}{9} - 2t + 10 \Longrightarrow E'(t) = \dfrac{2}{9}t - 2$. Entonces $E'(t) = 0 \Longrightarrow 2t - 18 = 0 \Longrightarrow t = 9$. Y como $E''(t) = \frac{2}{9} > 0$ para que la elasticidad sea mínima, la temperatura debe ser de 9^oC.

c) $E(9) = \dfrac{9^2}{9} - 2 \cdot 9 + 10 = 9 - 18 + 10 = 1$

El coeficiente de elasticidad mínimo es 1 para una temperatura de 9^oC.

8. (**Madrid, 2008**) Se desea fabricar un acuario con base cuadrada y sin tapa, de capacidad 500 dm^3. La base y las paredes del acuario han de estar realizadas en cristal. ¿Cuáles deben ser sus medidas para minimizar la superficie total del cristal empleado? t

Sol



V_{cubo} =largo×alto×ancho=$x^2 \cdot y = 500 \Longrightarrow y = \dfrac{500}{x^2}$

Superficie total=$A_{base} + 4 \cdot A_{lateral}$

$A_T = x^2 + 4xy = x^2 + 4x \cdot \dfrac{500}{x^2}$

La función $f(x) = x^2 + \dfrac{2000}{x}$ es la que tenemos que minimizar.

$$f'(x) = 2x - \frac{2000}{x^2} = 0 \Longrightarrow 2x = \frac{2000}{x^2} \Longrightarrow x^3 = 1000 \Longrightarrow x = \sqrt[3]{1000} = 10$$

Despejando $y = \dfrac{500}{x^2} = \dfrac{500}{100} = 5$.

Para minimizar la superficie total del cristal empleado, debo utilizar una base de dimensiones 10×10 y unas caras rectangulares de dimensiones 10×5.

6.8. Ejercicios propuestos

1. (**Murcia, junio de 2008**) Supongamos que tenemos un alambre de longitud "a" y lo queremos dividir en dos partes que van a servir de base a sendos rectángulos. En uno de los rectángulos su altura es doble de su base y en el otro, su altura el triple de su base. Determinar el punto por el cual debemos cortar el alambre para que la suma de las áreas de los dos rectángulos sea mínima.

   Solución: Hay que dividir el segmento por un punto que esté a $3/5$ de un extremos y a $2/5$ del otro.

2. (**Murcia, septiembre de 2008**) Descomponer el número 25 en dos sumandos tales que el doble del cuadrado del primero más el triple del cuadrado del segundo sea mínimo.

   Solución: $25 = 15 + 10$

3. (**Valencia, junio de 2008**) El coste de fabricación en euros de x unidades de un artículo viene dado por la función $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 20$.

   a) ¿Cuál es la función que determina el coste de fabricación unitario?
   b) ¿Para qué producción resulta mínimo el coste unitario? ¿Cuánto vale éste? Justifica que es mínimo.

   Solución:

   a) $g(x) = \dfrac{f(x)}{x} = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{20}{x}$
   b) El coste mínimo por unidad se obtiene produciendo 400 unidades y asciende a $19/20$ e por unidad.

4. (**Castilla-La Mancha, septiembre de 2008**) Una empresa ha realizado un estudio acerca de los costes de producción llegando a la conclusión de que producir x unidades de un objeto dado tiene un coste (en euros) expresado por $f(x) = 0,25x^32 - 25x + 700$.

   a) ¿Cuántas unidades han de producir para tener un coste de 175 e?
   b) Halla el número de unidades que se deben producir para que el coste sea mínimo.
   c) ¿Cuánto es ese coste mínimo?

   Solución:

a) Para tener un coste de 175 € deben producirse $x = 70$ unidades ó $x = 30$ unidades.

b) Se deben producir 50 unidades.

c) El coste mínimo es de 75 €.

5. (**Valencia, septiembre de 2008**) Obtén los parámetros r, s y t para que la función $f(x) = x^3 + rx^2 + sx + t$ tenga un máximo en $x = -2$, un mínimo en $x = 0$ y que pase por el punto $(1, -1)$.

   Solución: Máximo en $x = -2 \Longrightarrow f'(-2) = 0$, Mínimo en $x = 0 \Longrightarrow f'(0) = 0$ y pasa por el punto $(1, -1) \Longrightarrow f(1) = -1$.
   La solución es $r = -3$, $s = 0$ y $t = 1$.

6. (**Andalucía, septiembre de 2008**)

   a) La gráfica de la derivada de una función f es la recta que pasa por los puntos $(0, -3)$ y $(4, 0)$. Estudia la monotonía de la función f.

   b) Calcula la derivada de las siguientes funciones:
   $g(x) = (3x + 1)^3 \cdot \ln x^2 + 1$
   $$h(x) = \frac{e^x}{7x^5 - 4}$$

   Solución:

   a) En $(-\infty, -4)$ $f'(x) < 0 \Longrightarrow f(x)$ decrece.
   En $(-4, +\infty)$ $f'(x) > 0 \Longrightarrow f(x)$ crece.

   b) $$g'(x) = (3x + 1)^2 \left[\frac{(9x^2 + 9)\ln(x^2 + 1) + 6x + 2}{x^2 + 1}\right]$$
   $$f'(x) = \frac{e^x(7x^5 - 35x^4 - 4)}{(7x^5 - 4)^2}$$

7. (**Andalucía, junio de 2009**) Un estudio acerca de la presencia de gases contaminantes en la atmósfera de una ciudad indica que el nivel de contaminación vienen dado por la función:

   $$C(t) = -0,2t^2 + 4t + 25,\ 0 \leq t \geq 25$$

   (siendo t los años transcurridos desde el año 2000)

   a) ¿En qué año se alcanzará un máximo en el nivel de contaminación?

   b) ¿En qué año se alcanzará el nivel de contaminación cero?

   c) Calcula la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $C(t)$ en $t = 8$, Interpreta al resultado anterior relacionándolo con el crecimiento o decrecimiento.

Solución:

a) $t = 10$ años, es decir, en el 2010.

b) $t = 25$ años, es decir, en el 2025.

c) En el año 2008 el nivel de contaminación subirá a $0,8$.

8. Halla el número positivo cuya suma con veinticinco veces su inverso sea mínima.

   Solución: el número buscado es 5.

9. De todos los triángulos rectángulos cuyos catetos suman 10 cm, halla las dimensiones de aquel cuya área es máxima.

   Solución: los catetos miden 5 cada uno.

10. Determina las dimensiones que debe tener un recipiente cilíndrico de volumen igual a $6,28$ litros para que pueda construirse con la menor cantidad posible de hojalata.

    Solución: el cilindro tendrá de radio 1 dm y 2 dm de altura.

Capítulo 7

Representación de funciones

7.1. Introducción

El hombre a lo largo de la historia, ha utilizado las representaciones gráficas como expresión o como interpretación de situaciones, objetos o fenómenos. En estas representaciones están implícitas y se perciben de forma clara las características o propiedades más notables de la situación, objeto o fenómeno representado.

La curva o representación gráfica de una función nos permite visualizar sus características asociadas más importantes en cuanto a continuidad, monotonía, extremos relativos, etc. Por tanto, es muy importante la representación gráfica para comprender mejor los fenómenos que describen las funciones. En esta unidad utilizaremos las características generales de las funciones con el fin de construir sus respectivas representaciones gráficas.

7.2. Esquema para la representación de funciones

Para dibujar la gráfica de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ estudiaremos previamente el dominio, simetrías, puntos de corte, monotonía, curvatura y asíntotas de la función para terminar con el esbozo de la gráfica utilizando la información recogida anteriormente.

7.2.1. Dominio de una función

Definición 28. *Llamamos campo o el dominio de definición de una función $y = f(x)$ al conjunto de números reales para los cuales está definida la función o sea los puntos donde existe la función $f(x)$ y que denotaremos como $D(f(x))$.*

Muchas veces es más fácil descubrir los puntos donde no está definida una función que donde si lo está. Esto es lo que hacemos casi siempre para calcular el dominio . Así en muchos casos será $\mathbb{R}$ menos los puntos donde no esté definida la función. Veamos cómo se calcula el dominio para las principales funciones reales.

1. **Funciones polinómicas:** Las funciones polinómicas están definidas número real así su dominio es todo $\mathbb{R}$.

2. **Funciones racionales:** Las funciones racionales $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$, cociente de dos funciones polinómicas sólo están definidas para los valores que no anulen el denomi-

nador, así

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}; h(x) \neq 0\}$$

Por ejemplo dada la función $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-4}$ dado que $x = -2$ y $x = 2$ anulan el denominador, se tiene que $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

3. **Funciones irracionales o radicales:** Para las funciones radicales $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ distinguimos dos casos:

   a) **n impar:** están definidas para todo número real para el que esté definida la función $g(x)$

   b) **n impar:** están definidas para todo $x \in \mathbb{R}$ para el que exista la función $g(x)$ y además $g(x) \geq 0$

   Por ejemplo la función $f(x) = \sqrt{2x-1}$ está definida para valores de $x > \frac{1}{2}$ con lo cual $D(f) = (\frac{1}{2}, +\infty)$.

4. **Funciones exponenciales:** Las funciones exponenciales $f(x) = a^{g(x)}, a \in \mathbb{R}$ están definidas para todos los valores en los que exista la función $g(x)$.

5. **Funciones logarítmicas:** Las funciones logarítmicas $f(x) = \log_a g(x), a \in \mathbb{R}$ dado que el logaritmo está solamente definido para valores positivos, se tiene que

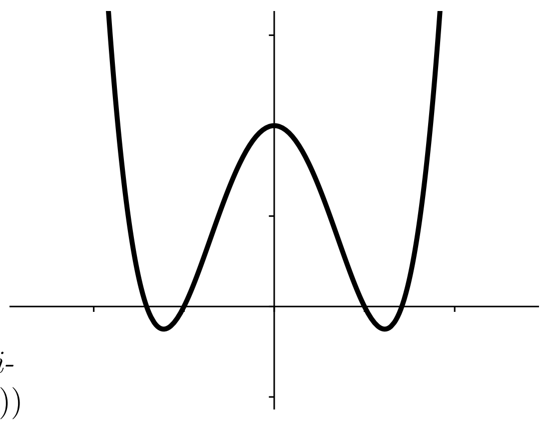
$$D(f(x)) = \{x \in \mathbb{R}, g(x) > 0\}$$

6. **Funciones trigonométricas:** Las funciones trigonométricas: $y = \operatorname{sen} f(x)$, $y = \cos f(x)$ $y = \tan f(x)$ están definidas para los mismos valores que $f(x)$

7.2.2. Simetrías

Definición 29. *Se dice que una función $y = f(x)$ es simétrica respecto del eje OY cuando para todo $x \in D(f(x))$ se verifica que $f(x) = f(-x)$. En este caso se dice que la función f es una* ***función par****.*

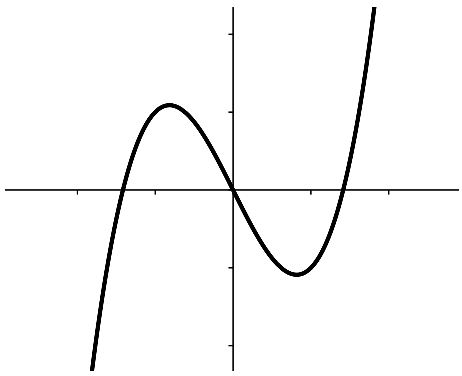
La gráfica de la función $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$ es simétrica respecto del eje de ordenadas ya que $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 + 2 = x^4 - 3x^2 + 2 = f(x)$.



En estos casos basta con construir la gráfica para valores de positivos y obtener el resto por simetría respecto del origen

Definición 30. *Se dice que una función es simétrica respecto del origen cuando para todo $x \in D(f(x))$ se verifica que $f(-x) = -f(x)$. Si ocurre esto entonces decimos que la función f es una* ***función par****.*

La gráfica de la función $f(x) = x^3 - 2x$ es simétrica respecto del origen de ordenadas ya que $f(-x) = (-x)^3 - 2(-x) = -x^3 + 2x = -(x^3 - 2x) = -f(x)$.



También en este caso basta con construir la gráfica para valores de positivos y obtener el resto por simetría respecto del origen

7.2.3. Puntos de corte con los ejes

Distinguiremos dos tipos:

1. **Puntos de corte con respecto al eje OX:** Estos puntos son las raíces de la función ya que consiste en resolver el sistema $y = f(x)$, $y = 0$, o sea en resolver la ecuación $f(x) = 0$.
2. **Puntos de corte con el eje OY:** Estos puntos se obtienen al resolver el sistema $y = f(x)$, $x = 0$. De esta manera los puntos de corte son de la forma $(0, f(0))$.

Además de estos puntos en ocasiones es necesario calcular puntos auxiliares de forma arbitraria para hacernos una idea de cómo se comporta la función en determinados intervalos en los cuales se tenga alguna duda.

7.2.4. Monotonía

El estudio de la monotonía de una función consiste fundamentalmente en estudiar el crecimiento y decrecimiento de una función así como el estudio de unos puntos críticos: los máximos y los mínimos.

Definición 31. *Sea dice que la función $f(x)$ es creciente en el punto $x = a$ si existe un cierto entorno de dicho punto, $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ tal que para todo punto $x \neq a$ de dicho intervalo se verifica*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$$

Decimos que una función es creciente en un determinado conjunto si lo es en todo punto de dicho conjunto

Definición 32. *Sea dice que la función $f(x)$ es decreciente en el punto $x = a$ si existe un cierto entorno de dicho punto $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ tal que para todo punto $x \neq a$ de dicho punto se verifica*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$$

Decimos que una función es decreciente en un determinado conjunto si lo es en todo punto de dicho conjunto

Si no tenemos en cuenta el punto donde queremos saber si crece o decrece se tiene la siguiente definición general:

Definición 33. *Dada una función $y = f(x)$ y dados $x, y \in D(f(x)), x < y$ decimos que:*

- *f es creciente si $f(x) \leq f(y)$*
- *f es decreciente si $f(x) \geq f(y)$*

Si usamos el concepto de derivada la caracterización de que una función sea creciente o decreciente queda del siguiente modo:

- Si $f(x)$ es derivable en el punto $x = a$ con $f'(x) > 0$ entonces $f(x)$ es creciente en dicho punto.
- Si $f(x)$ es derivable en el punto $x = a$ con $f'(x) < 0$ entonces $f(x)$ es decreciente en dicho punto.

Definición 34. *Sea dice que la función $f(x)$ tiene un máximo local en el punto $x = a$ si existe un cierto entorno de dicho punto $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ tal que para todo punto x de dicho entorno se tiene que $f(x) < f(a)$.*

Definición 35. *Sea dice que la función $f(x)$ tiene un mínimo local en el punto $x = a$ si existe un cierto entorno de dicho punto $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ tal que para todo punto x de dicho entorno se tiene que $f(x) > f(a)$.*

Teniendo en cuenta que si la función $f(x)$ es derivable en $x = a$ y tiene en dicho punto un máximo o un mínimo entonces necesariamente $f'(a) = 0$. Para calcular los máximos y mínimos tendremos en cuenta lo siguiente:

- Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$ entonces la función $f(x)$ tiene un máximo local en $x = a$.
- Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$ entonces la función $f(x)$ tiene un mínimo local en $x = a$.

En la práctica para calcular máximos y mínimos lo que se hace es calcular los puntos críticos, o sea aquellos que verifican que $f'(x) = 0$ y luego se calcula la segunda derivada y decidimos si es máximo o mínimo. Si ocurriese que $f''(x) = 0$ tendríamos lo que se conoce como punto de inflexión que abordaremos en el apartado de curvatura.

Ejemplo 60. *Estudiar la monotonía de la función $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 1$*

Solución: Comenzamos calculando la derivada $f'(x) = 3x^2 + 2x - 5$, ahora si calculamos sus raíces se tienen los valores

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5)}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{2 \pm 8}{6} = \left\{\frac{5}{3}, -1\right\}$$

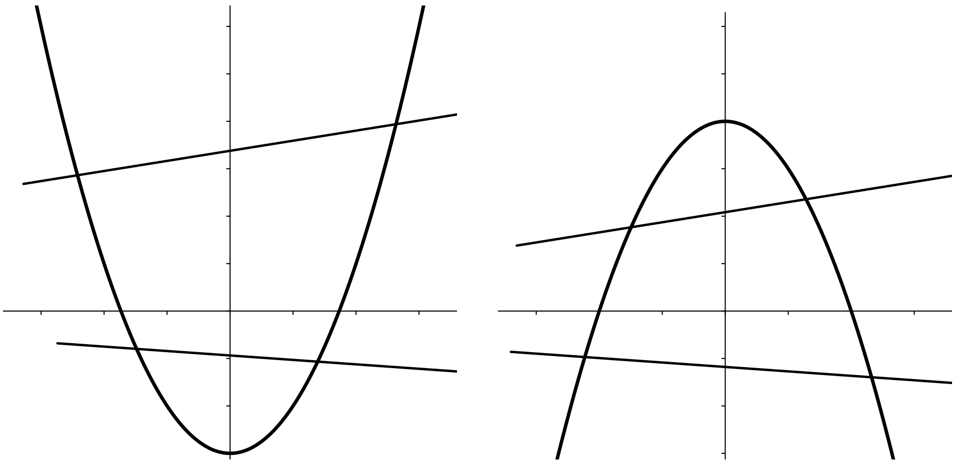
y como $f'(0) < 0$ resulta que $f'(x) < 0$ en $(-1, \frac{5}{3})$ y en el resto positiva. Con el estudio del crecimiento y decrecimiento se deduce que $x = -1$ en un máximo y $x = \frac{5}{3}$ es un mínimo. Otra forma de ver esto es evaluando la segunda derivada $f''(x) = 6x + 2$.

Así, como $f''(-1) < 0 \Longrightarrow x = -1$ es máximo y como $f''(\frac{5}{3}) > 0 \Longrightarrow x = \frac{5}{3}$ es un mínimo.

7.2.5. Curvatura

Aunque en selectividad se han omitido estos conceptos, no obstante, creemos importante incluir algunos conceptos sobre concavidad, convexidad y puntos de inflexión.

Definición 36. *Una función $y = f(x)$ se dice* ***convexa*** *si en la gráfica de la función, la cuerda que une dos puntos queda por encima de la gráfica. Se dice* ***cóncava*** *si ocurre lo contrario.*



Al igual que ocurre con los máximos y mínimos si queremos calcular los intervalos donde la función es cóncava o convexa haremos uso de la derivada segunda y si es distinta de cero se tiene lo siguiente:

- Si f es convexa como la derivada f' es creciente se tiene que $f''(x) \geq 0$
- Si f es cóncava ocurre lo contrario con lo cual $f''(x) \leq 0$.

En el caso de que $f''(x) = 0$ se calculaf''',...,$f^n(x)$ hasta encontrar una derivada n-ésima que no se anule en este caso se tiene:

1. Si $n = 2k$ entonces si:

   a) Si $f^{2k}(x) > 0$ entonces f es cóncava.

   b) Si $f^{2k}(x) < 0$ entonces f es convexa.

2. Si $n = 2k + 1$ se tiene una inflexión en el punto x.

Definición 37. *Sea $y = f(x)$ una función, diremos que f presenta un punto de inflexión en x_0 cuando en dicho punto la función pasa de convexa a cóncava o al revés. En estos puntos se verifica siempre que $f''(x_0) = 0$ y entonces para ver de que tipo es usando la derivada tercera tendremos lo siguiente:*

- *Si $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) < 0$ entonces la función f posee en x_0 un punto de inflexión* ***cóncavo-convexo****.*
- *Si $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) > 0$ entonces la función f posee en x_0 un punto de inflexión* ***convexo-cóncavo****.*

En el caso de que la derivada tercera se anulase, seguiríamos derivando hasta encontrar un k, que cumpla $f^{2k} \neq 0$ o $f^{2k+1} \neq 0$.

7.2.6. Asíntotas y ramas de una función.

Definición 38. *Se dice que una función tiene una rama infinita cuando tanto x como $f(x)$ crecen indefinidamente. En este caso decimos que el punto $P(x, f(x))$ se aleja infinitamente.*

Si nos fijamos en las ramas de una función se puede dar el caso que cuando tienden infinitamente estas se aproximen a una rectas muy especiales que llamaremos **asíntotas**. En el caso que la función no tenga asíntotas diremos que tiene una rama parabólica.

Las asíntotas son de tres tipos y son las siguientes:

1. **Asíntotas verticales.** Sea f una función, decimos que la recta $x = x_0$ es una asíntota vertical si se verifica:
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$$
o alguno de los límites laterales
2. **Asíntotas horizontales.** Sea f una función, decimos que $y = k$ es una asíntota horizontal de la función f si se verifica:
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = k$$
o
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = k$$
3. **Asíntotas oblicuas.** Sea f una función, diremos que la recta $y = mx + n$ es una asíntota oblicua de f si se verifica:
$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx - n) = 0$$
o
$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx - n) = 0$$

Observamos que en la práctica para calcular las asíntotas oblicuas el cálculo de m y n se hace de la siguiente forma :

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx)$$

NOTA: Una función no puede tener asíntota horizontal y asíntota oblicua a la vez, sin embargo si no hay asíntota horizontal si puede tener asíntota oblicua.

Definición 39. *Diremos que una función $y = f(x)$ tiene una rama parabólica si*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

o

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

En el caso de ramas parabólicas pueden ocurrir los siguientes casos:

- Si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$, la curva tiene rama parabólica en la dirección del eje OY.
- Si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, la curva tiene rama parabólica en la dirección del eje OX.
- Si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) - mx = 0$, la curva tiene rama parabólica en la dirección de la recta $y = mx$.

7.2.7. Esbozo de la gráfica

Con toda la información recogida en los apartados anteriores representaremos la gráfica de la función. Veamos unos ejemplos de funciones.

Ejercicio 29. *Representa la siguiente función polinómica: $y = f(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$*

En primer lugar como es un polinomio su dominio es todo $\mathbb{R}$. Seguidamente si procedemos con la simetría observamos que la función es impar ya que

$$f(-x) = (-x)^5 - 5(-x)^3 + 4(-x) = -x^5 + 5x^3 - 4x = -(x^5 - 5x^3 + 4x) = -f(x)$$

luego se tiene una simetría respecto la bisectriz del primer cuadrante (respecto de $y = x$). Ahora pasamos a calcular los puntos de corte. Para calcular los puntos de corte con el eje OX, calculamos las raíces del polinomio $x^5 - 5x^3 + 4x$ teniendo en cuenta su factorización

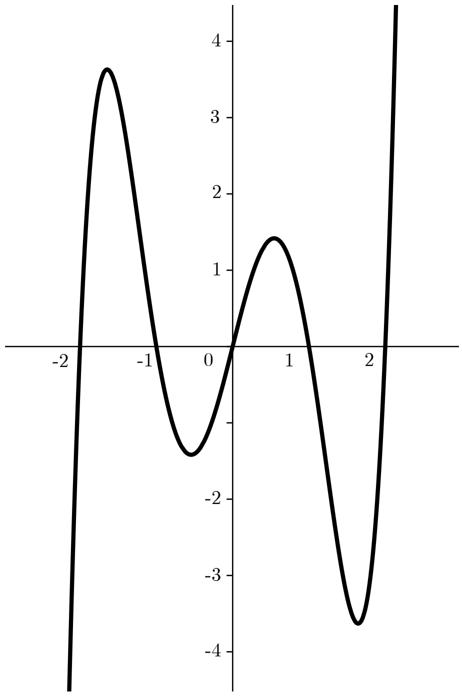
$$x^5 - 5x^3 + 4x = x(x^4 - 5x^2 + 4) = x(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$$

Con lo cual se tienen 5 puntos de corte con el eje de abscisas:

$$P_1(-2,0),\ P_2(-1,0),\ P_3(0,0),\ P_4(1,0) \text{ y } P_5(2,0)$$

Además tenemos un punto de corte con el eje de ordenadas que coincide con $P_3(0,0)$. Estudiamos el signo de la función teniendo en cuenta la raíces y pasamos a estudiar la monotonía con el uso de la de derivada.

Dado que $f'(x) = 5x^4 - 15x^2 + 4$, calculamos las raíces del polinomio teniendo en cuenta su factorización $5x^4 - 15x^3 + 4 = (x-a)(x+a)(x-b)(x+b)$ siendo $a \simeq 0{,}544$ y $b \simeq 1{,}644$ y estudiando la segunda derivada $f''(x) = 20x^3 - 30x$ se calculan los máximos y mínimos. Por ejemplo $f''(a) \simeq -13 < 0$ y tiene un máximo en $x = a$. Si hacemos los mismo con -a,b y -b y estudiamos el signo de la derivada la gráfica de la función queda del siguiente modo, sin necesidad de estudiar la curvatura



Ejemplo 61. *Vamos a realizar un estudio completo y representación de la función*

$$y = \frac{x^2+1}{x}$$

1. **Dominio de la función.** Dado que sólo $x = 0$ anula el denominador se tiene que

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

2. **Simétricas.** Como $f(-x) = \dfrac{(-x)^2+1}{-x} = -\dfrac{x^2+1}{x} = -f(x)$ la función es **IMPAR**, lo cual significa que es simétrica respecto del origen.

3. **Puntos de corte.**

   a) **Respecto del eje OX** $f(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2+1}{x} = 0 \Rightarrow x^2+1 = 0$, ecuación que no tiene solución, luego no hay puntos de corte.

   b) **Respecto del eje OY**, como $x \notin D(f)$ entonces tampoco hay puntos de corte con el eje OY

4. **Monotonía**. En primer lugar calculamos la derivada

$$f'(x) = \frac{x \cdot 2x - (x^2+1)}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$

   y calculamos los puntos críticos, para lo cual solucionamos la ecuación $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$. Antes de ver si son máximos y mínimos, si queremos estudiar el signo de la derivada bastará con estudiar el signo del numerador y dependerá de estas raíces. Así tendremos que la función crece antes de $x = -1$ y después de $x = 1$, y decrecerá entre -1 y 1. Podemos concluir que la función es creciente en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ y decreciente en $(-1, 1)$.

5. **Curvatura**. Aunque no es estrictamente necesario el estudios de la misma, es interesante y aporta una información interesante a la hora de representar la función. Para ello calculamos la derivada segunda,

$$f''(x) = \frac{x^2 \cdot 2x - (x^2-1)\cdot 2x}{x^4} = \frac{2x^2 - 2x^3 + 2x}{x^4} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

Como $f''(x) = 0$ no tiene raíces resulta que no tenemos puntos de inflexión.
Estudiando el signo de la derivada segunda tenemos que para $x < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow$ f es cóncava. Y para $x \geq 0 \Rightarrow f''(x) \geq 0 \Rightarrow$ f es convexa.
Por último evaluamos la derivada en los puntos candidatos a máximo y mínimo:

$$f''(-1) = \frac{2}{(-1)^3} = -2 < 0 \Rightarrow x = -1 \text{ es un máximo.}$$

$$f''(1) = \frac{2}{(1)^3} = 2 > 0 \Rightarrow x = 1 \text{ es un mínimo.}$$

Y evaluando la función como $f(-1) = -2$ y $f(1) = 2$ resulta que la función tiene un máximo en $A(-1,-2)$ y un mínimo en $B(1,2)$.

6. (Asíntotas). Evaluando los grados del numerador y denominador tan sólo existen asíntotas verticales en $x = 0$ y oblicuas. Calculamos la asíntota oblicua $y = mx + n$ como sigue:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Tenemos como asíntota oblicua $y = x$

7. **Representación**. Teniendo en cuenta las asíntotas, los puntos de corte, los máximos, etc. La gráfica de la función quedaría así:

7.3. Ejercicios

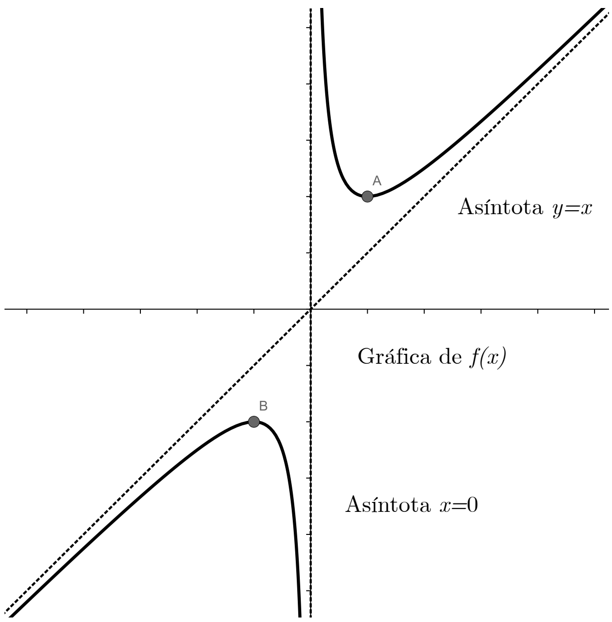
7.3.1. Ejercicios resueltos PAU 2009.

1. **(Murcia, Junio de 2009):** Dada la curva $y = \dfrac{x+1}{x^2+x-2}$ calcular:

   a) El dominio.

   b) Las asíntotas.

   c) Hacer una representación gráfica de la misma.



Solución: Comencemos calculando el dominio. Veamos los valores que anulan al denominador. Resolvemos la ecuación de segundo grado $x^2 + x - 2 = 0$ y tenemos $x = -2$, $x = 1$ con lo cual $Dom(f) = \mathbb{R} \backslash \{-2, 1\}$.

Vemos ahora las asíntotas. Comencemos por la verticales, como:

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{x+1}{x^2+x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{x+1}{x^2+x-2} = +\infty$$

Así pues, hay una asíntota vertical en $x = -2$. Del mismo modo:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x+1}{x^2+x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x+1}{x^2+x-2} = +\infty$$

Se tiene otra asíntota vertical en $x = 1$.

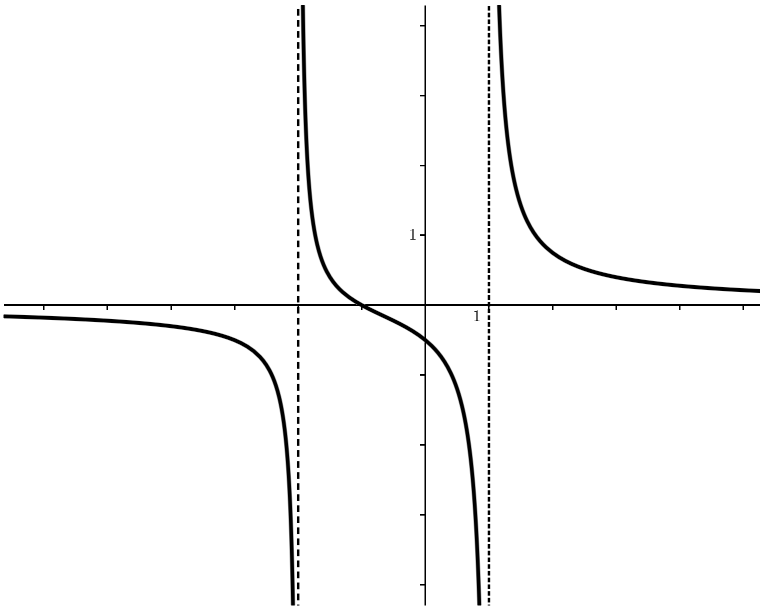
Veamos ahora las asíntotas verticales, para lo cual calculamos:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{x^2+x-2} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x^2+x-2} = 0$$

Hay una asíntota horizontal para $y = 0$. Y podemos concluir que no existen asíntotas oblicuas.

Con toda esta información obtenida podemos representar las función:



2. **(Murcia, Septiembre de 2009):** Dada una curva de ecuación $y = \dfrac{3x^2}{x^2+1}$ determinar:

   a) Dominio.
   b) Máximos y mínimos.
   c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
   d) Asíntotas.

   Solución: Dado que la función $y = f(x)$ no tiene puntos que anulen el denominador resulta que su dominio es todo $\mathbb{R}$. Veamos ahora la derivada para estudiar la monotonía de la función.

$$y' = \frac{6x(x^2+1) - 2x(3x^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{6x}{(x^2+1)^2}$$

Observamos que el único punto que anula la derivada es $x = 0$ y dado que el signo de la derivada viene dado por el signo del numerador, pues el denominador el positivo, resulta que la función decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$ y resulta que $x = 0$ en un mínimo de la función.

Veamos ahora las asíntotas. En primer lugar no hay verticales, pero sí una horizontal, ya que:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{x^2+1} = 3$$

y

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{x^2+1} = 3$$

Con lo cual $y = 3$ es una asíntota horizontal y por consecuencia ya no hay más asíntotas.

3. **(Valencia, Septiembre de 2009):** Dada una función $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ se pide:

   a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes.

   b) Ecuación de las asíntotas horizontales y verticales.

   c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

   d) Máximos y mínimos locales.

   e) Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

Solución: En primer lugar el dominio de la función es todo $\mathbb{R}$ ya que no hay puntos que anulen el denominador. El único punto de corte es (0,0) ya que si $x = 0 \to f(0) = 0$ y viceversa.

En cuanto a las asíntotas, no existen verticales, pero sí hay una horizontal:

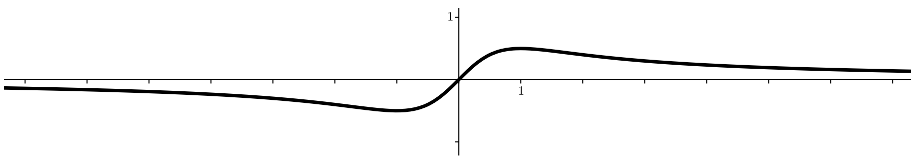
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$$

Con lo cual $y = 0$ es una asíntota horizontal y como consecuencia no existen asíntotas oblicuas.

Veamos ahora el estudio de la derivada para estudiar la monotonía de la función:

$$f'(x) = \frac{1(1+x^2) - x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

Ahora si $f'(x) = 0 \to 1 - x^2 = 0 \to x = \pm 1$. Ahora si estudiamos el signo de la derivada, como depende del signo del numerador y $f'(0) > 0$, se tiene que f es creciente en $(-1, 1)$ y decreciente en el resto. Además del estudio del crecimiento y decrecimiento deducimos que $x = -1$ es un mínimo y $x = 1$ es un máximo. Calculando las ordenadas de estos puntos $f(-1) = -\frac{1}{2}$ y $f(1) = \frac{1}{2}$ ya estamos en disposición de dar es esbozo de la gráfica de la función que es el siguiente:



4. **(Madrid, Junio de 2009):** Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = (x^2 - 1)^2$. Hallar los extremos relativos de f y la recta tangente a f en $x = 3$.

   Solución: Comenzamos calculando $f'(x) = 2(x^2-1)2x$ e igualando a cero la derivada, tenemos que si $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -1$ y $x = 1$. Ahora tan sólo calculando la derivada segunda y evaluando tendremos:

$$f''(x) = (4x^3 - 4x)' = 12x^2 - 4 \Rightarrow \begin{cases} f''(0) < 0 \Rightarrow x = 0 \text{ es máximo} \\ \\ f''(-1) > 0 \Rightarrow x = -1 \text{ es mínimo} \\ \\ f''(1) > 0 \Rightarrow x = 1 \text{ es mínimo} \end{cases}$$

   Para calcular la recta tangente en $x = 3$ bastará con aplicar la fórmula $y - f(3) = f'(3)(x - 3)$ y como $f(3) = 64$ y $f'(3) = 96$ se tiene:

$$y - 64 = 96(x - 3) \Rightarrow y = 96x - 224$$

   .

5. **(Madrid Junio de 2009):** Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - x - a}$$

   Determinar las asíntotas de f, especificando los valores del parámetro real "a" para los cuales f tiene una asíntota vertical, dos asíntotas verticales o bien no tiene asíntotas verticales.

   Solución: Comenzamos estudiando el discriminante de la ecuación de segundo grado $x^2 - x - a$ para ver las posibles raíces. Dado que dicho discriminante es $1 + 4a$ se tiene lo siguiente:

   - Si $a = -\frac{1}{4}$ entonces $x = \frac{1}{2}$ es una raíz doble.
   - Si $a < -\frac{1}{4}$ entonces como $1 + 4a < 0$ no hay solución.
   - Si $a > -\frac{1}{4}$ obtenemos las soluciones $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2}$

Veamos ahora las asíntotas verticales para cada uno de los tres casos:

- Si $a = -\dfrac{1}{4}$ entonces $\displaystyle\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{2x-1}{x^2-x-a} = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{1}{x-\frac{1}{2}} = +\infty$ y $\displaystyle\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{2x-1}{x^2-x-a} = -\infty$. Y en consecuencia $x = \frac{1}{2}$ es una asíntota vertical.
- Si $a < -\dfrac{1}{4}$ entonces como $1+4a < 0$ no tiene solución se tendrá que no existen asíntotas verticales.
- Si $a > -\dfrac{1}{4}$ las soluciones $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$ al no ser raíces del numerador se tendrán dos asíntotas verticales $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$

Además existe una asíntota horizontal en $y = 0$ ya que:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x-1}{x^2-x-a} = 0$$

6. **(Castilla la Mancha, Septiembre de 2009:)** Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} -x-2 & si \quad x \leq -2 \\ \dfrac{x+2}{3} & si \quad -2 < x < 1 \\ -(x-2)^2 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Dibujar su gráfica y estudiar su continuidad en $x = -2$ y $x = 1$.

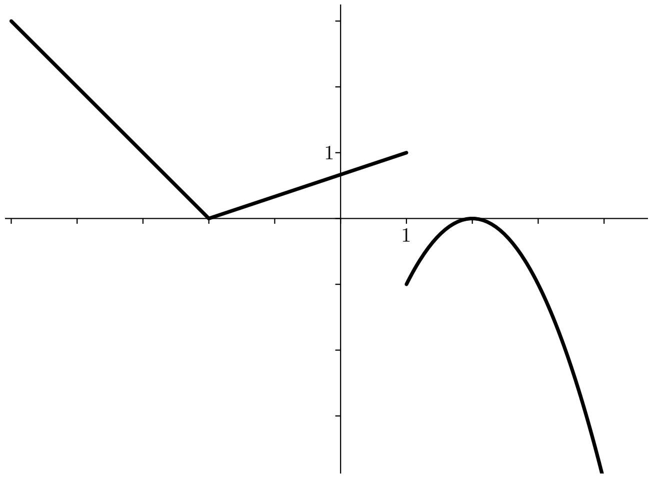
Solución: Dado que se trata de una función definida a trozos, y dos de ellos son rectas, siendo el último es un trozo de parábola. Conocidos los valores de las rectas en dos puntos y unos puntos de la parábola así como su vértice $(2, 0)$, el esbozo de la gráfica sería muy sencillo. Además la primera y la segunda rama se pegan bien pues $f(-2^-) = 0 = f(-2^+)$ con lo cual la función sería continua en dicho punto, pero $f(1^-) = 1 \neq -1 = f(1^+)$ con lo cual no sería continua en $x = 1$. Para terminar el esbozo de la gráfica:

7. **(Andalucía, septiembre de 2009:)** Dada la función $f(x) = x^3 - 1$. Se pide:

   a) Hallar los puntos de corte con los ejes, la monotonía y los extremos relativos si los tuviese.

   b) Hallar los puntos donde la recta tangente tenga pendiente igual a 3.

Solución: En primer lugar calculamos los puntos de corte con los ejes. En el caso del eje de abscisas como $y = 0 \Rightarrow x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ y tenemos el punto $(1, 0)$. En el caso del eje de ordenadas como $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^3 - 1 = -1$ y se tiene el punto



$(0,-1)$.

Para estudiar la monotonía y los extremos relativos, comenzamos calculando la derivada $f'(x) = 3x^2$ que es siempre positiva, luego la función es creciente y el único punto que la anula es un punto de inflexión ya que anula la segunda derivada y por tanto no existen extremos relativos.

En cuando a los puntos cuya recta tangente tenga pendiente 3 es equivalente a calcular los puntos cuya abscisa la derivada es 3 o sea $3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ y por tanto calculando su imágenes como $f(1) = 0$ y$f(-1) = -2$ serán los puntos $(1,0)$ y $(-1,-2)$.

8. **(Andalucía, junio de 2009:)** Dada la función $f(x) = \dfrac{x-1}{2x-1}$. Se pide:

   a) Hallar la ecuación de la recta tangente en $x = 1$.

   b) Estudia la monotonía de la función.

   c) Busca sus asíntotas, los cortes con los ejes y realiza una representación gráfica aproximada.

   Solución: Veamos primero la recta tangente en $x = 1$, para lo cual utilizaremos su expresión: $y - f(1) = f'(1)(x-1)$. Como $f(1) = 0$, calculamos

$$f'(x) = \frac{(2x-1) - 2(x-1)}{(2x-1)^2} = \frac{1}{(2x-1)^2} \Rightarrow f'(1) = 1$$

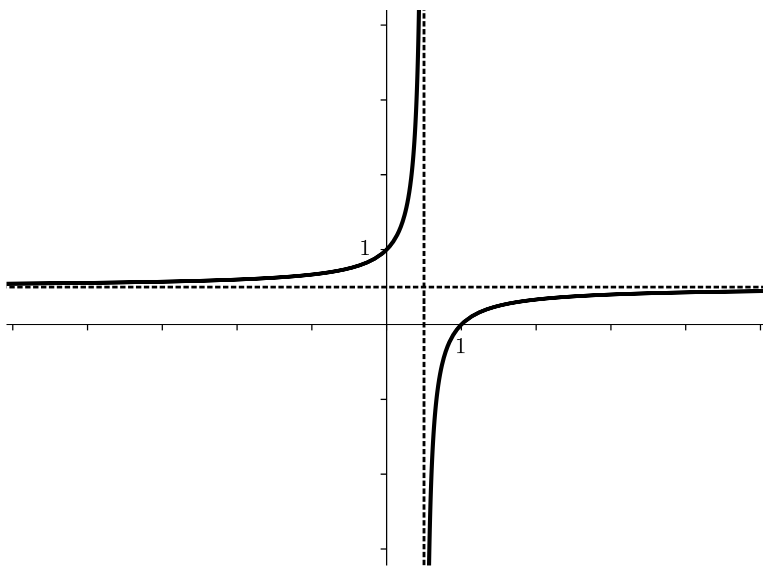
con lo cual la recta será $y = x - 1$.

Pasamos ahora a estudiar la monotonía, y si observamos la derivada de la función es siempre positiva, luego la función es creciente y no hay puntos que la anulen. No hay pues extremos relativos. En cuanto a las asíntotas como $x = \frac{1}{2}$ anula el denominador solamente se tendrá una asíntota vertical ya que :

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{x-1}{2x-1} = +\infty \qquad \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \frac{x-1}{2x-1} = -\infty$$

Además $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{2x-1} = \dfrac{1}{2}$ con lo cual $y = \frac{1}{2}$ será una asíntota horizontal. Y no existirán oblicuas al existir horizontales. Además, si calculamos los puntos de corte con los ejes resulta que respecto al eje de abscisas si $y = 0 \to x - 1 = 0 \to x = 1$, con lo cual tenemos el punto $(1, 0)$. Y respecto al eje de ordenadas como $f(0) = 1$ resulta el punto $(0, 1)$.

Teniendo en cuenta toda esta información la gráfica de la función quedaría así:



7.3.2. Ejercicios propuestos

1. **(Valencia, Junio de 2008)**

   a) Calcular los máximos y mínimos absolutos de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ en el intervalo $[1, 4]$. Justifica que los puntos encontrados son máximos y mínimos absolutos.

   b) Estudia la continuidad en el intervalo $[0, 4]$ de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & si \quad 0 \le x < 1 \\ x^3 - 6x^2 + 9x + 1 & si \quad 1 \le x \le 4 \end{cases}$$

Solución: La función f presenta máximo en $x = 1$ y $x = 4$ y mínimo en $x = 3$. Además la función es continua en todo el intervalo.

2. **(Valencia, Junio de 2008):** Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{4-x^2}$ determina:

   a) Dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.

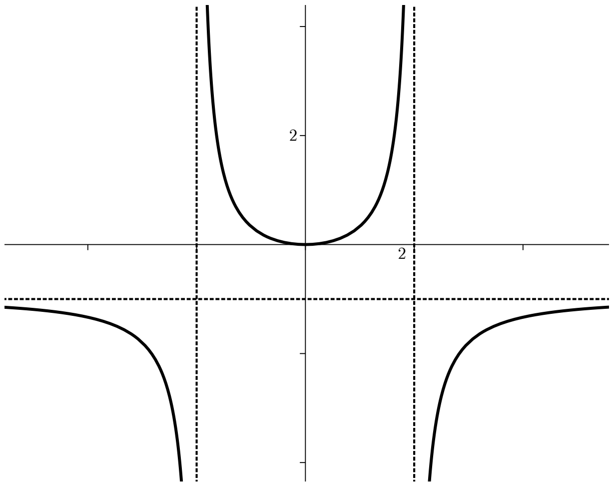
   b) Ecuación de sus asíntotas.

   c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

   d) Máximos y mínimos relativos.

   e) Utiliza la información anterior para representarla gráficamente.

   Solución: El dominio de la función es $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. El único punto de corte es $(0, 0)$. Las asíntotas verticales son $x = -2$ y $x = 2$. La función tiene además una asíntota horizontal $y = -1$ y no tiene asíntotas oblicuas. La función en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y decrece en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$. Además f presenta un mínimo en $x = 0$ y su gráfica aproximada es la siguiente:



3. **(Valencia, Septiembre 2008):** Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2}$, se pide:

   a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

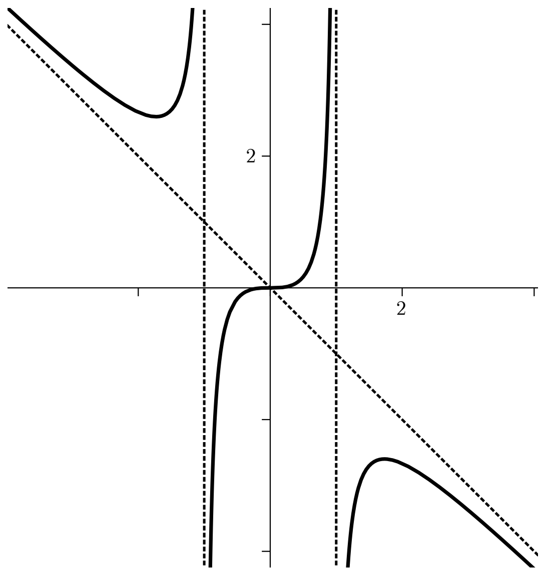
   b) Ecuación de sus asíntotas verticales y horizontales.

   c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

   d) Máximos y mínimos locales.

   e) Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

   Solución: El dominio es $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. El único punto de corte con los ejes es $(0, 0)$. Hay dos asíntotas verticales $x = -1$ y $x = 1$. No hay asíntotas horizontales, pero si una oblicua $y = -x$. La función es creciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ y decreciente en $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$. Además f presenta un máximo en $x = \sqrt{3}$ y un mínimo en $x = -\sqrt{3}$. Con todo esto la representación aproximada de la función es la siguiente:



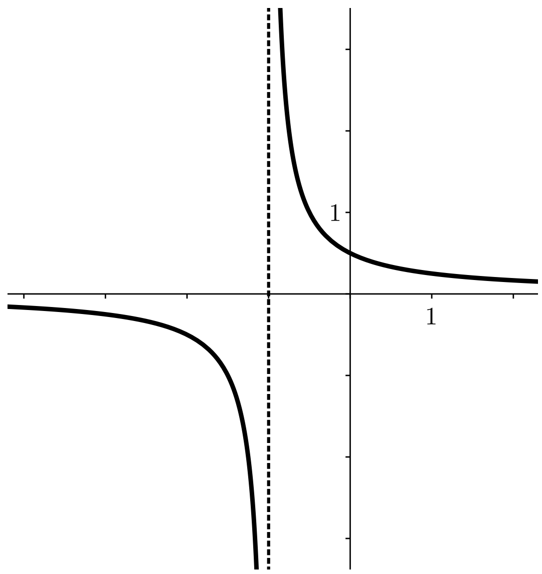
4. **(Murcia, Septiembre 2008):** Dada la curva de ecuación $y = \dfrac{1}{2(x+1)}$, determinar:

   a) Los puntos de corte con los ejes coordenados.

   b) Las asíntotas.

   c) Hacer una presentación gráfica aproximada de la curva.

   (Solución:) Sólo hay punto de corte con el eje de ordenadas en $(0, \frac{1}{2})$. Hay una asíntota horizontal en $y = 0$ y una vertical en $x = -1$. Con todo esto la representación gráfica quedaría así:



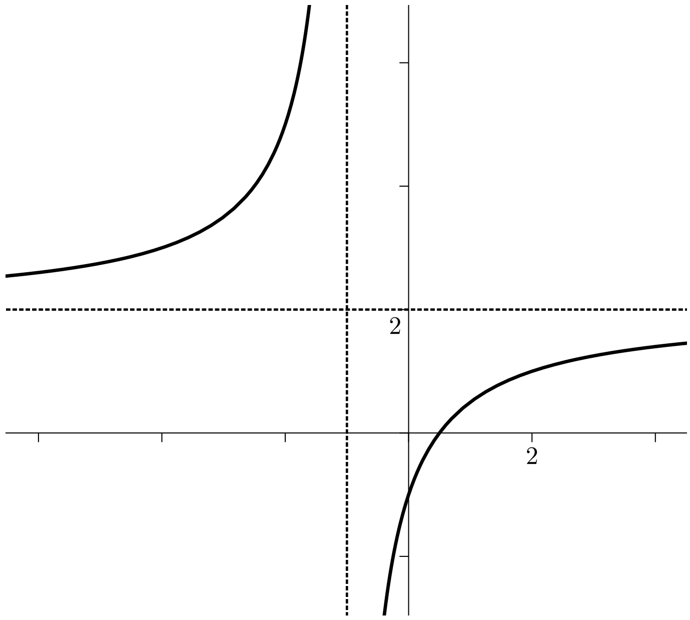
5. **(Murcia, septiembre de 2008):** Dada la curva $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$, calcular:

   a) Los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas.

c) Hacer una representación gráfica de la misma.

Solución: Los puntos de corte con los ejes son $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(0, -1)$. Tenemos como asíntota vertical la recta $x = -1$ y como asíntota horizontal la recta $y = 2$. No hay asíntotas oblicuas y la gráfica quedaría de la siguiente manera:



6. Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

b) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2 - 6x + 5}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{1 - x^2}$

e) $f(x) = x^5 - 6x^3 - 8x - 1$

f) $f(x) = \dfrac{x^2 - 5}{2x - 4}$

g) $f(x) = x^4 - x$

h) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x^2 + 2}$

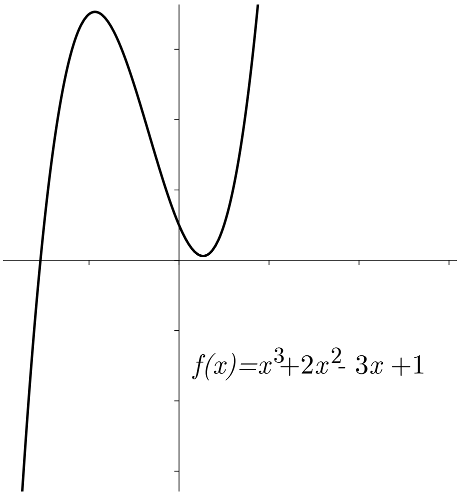
i) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$

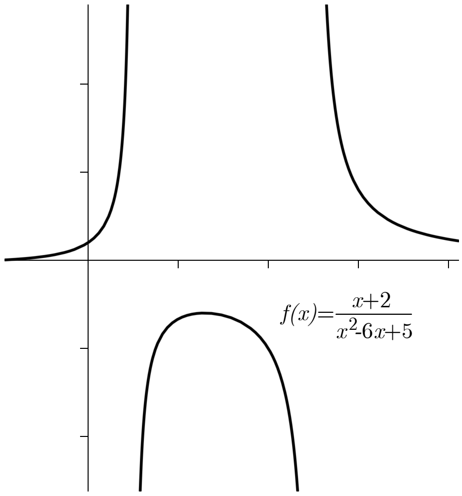
j) $f(x) = \dfrac{x}{(x+5)^2}$

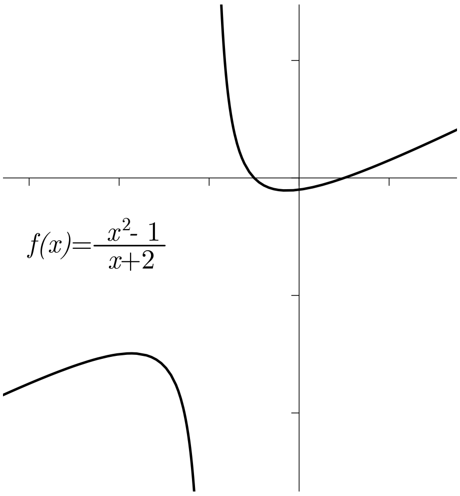
k) $f(x) = x^5 + 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

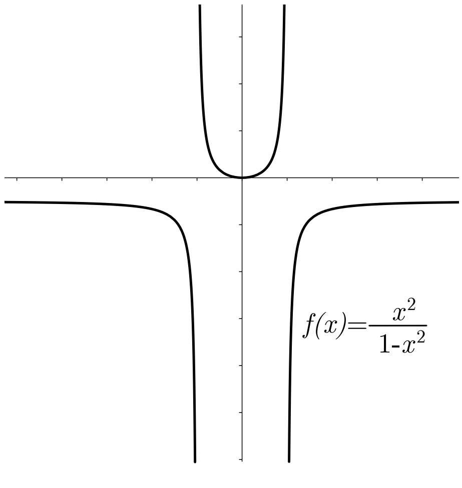
l) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3 + 16}}{x - 1}$

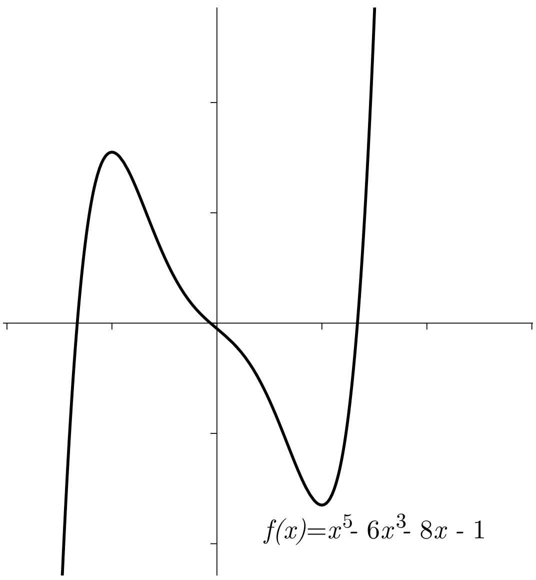
Solucion:

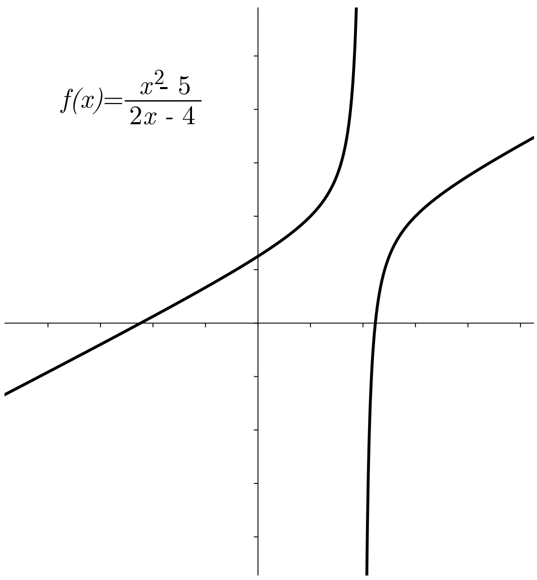

$f(x)=x^3+2x^2- 3x +1$

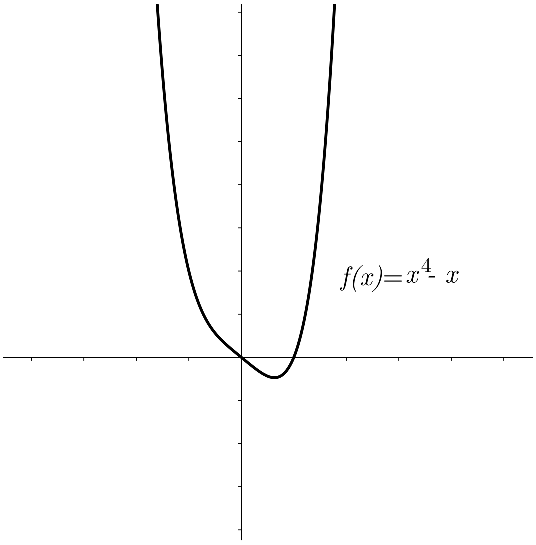

$f(x)=\frac{x+2}{x^2-6x+5}$

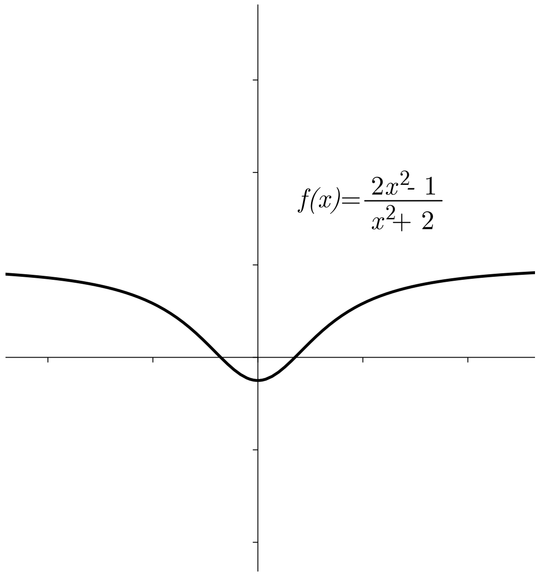

$f(x)=\frac{x^2- 1}{x+2}$

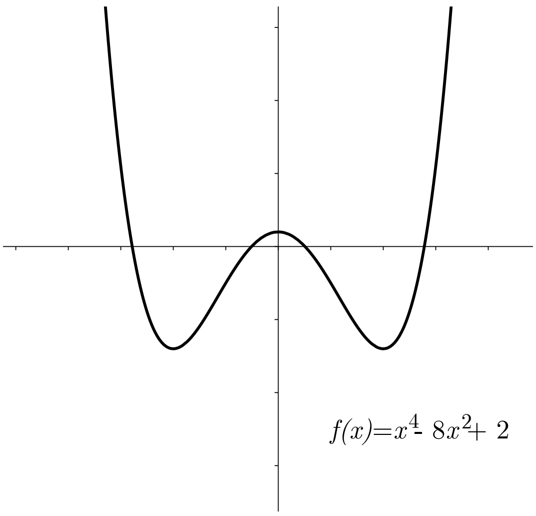

$f(x)=\frac{x^2}{1-x^2}$

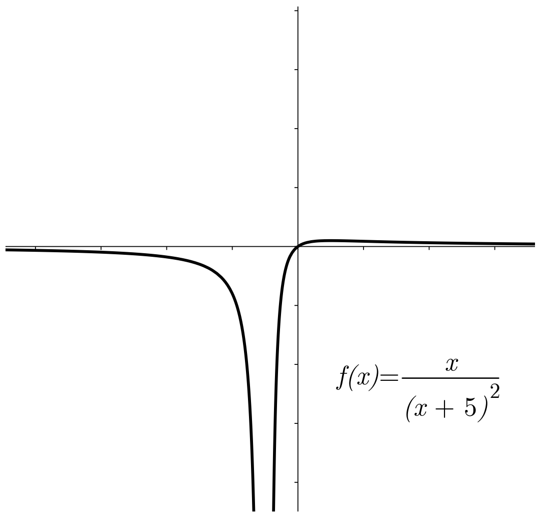

$f(x)=x^5- 6x^3- 8x - 1$

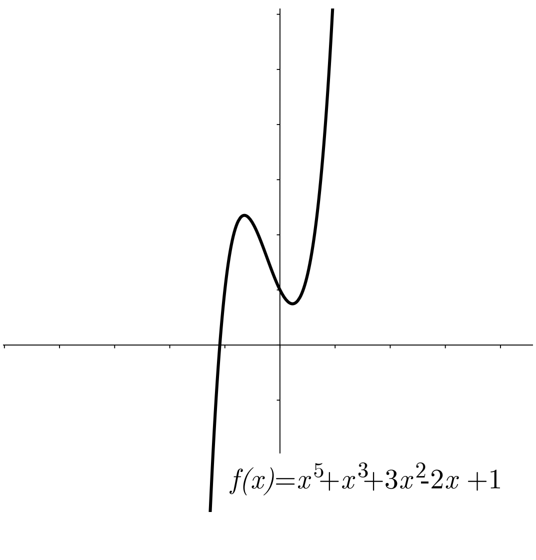

$f(x)=\frac{x^2- 5}{2x - 4}$

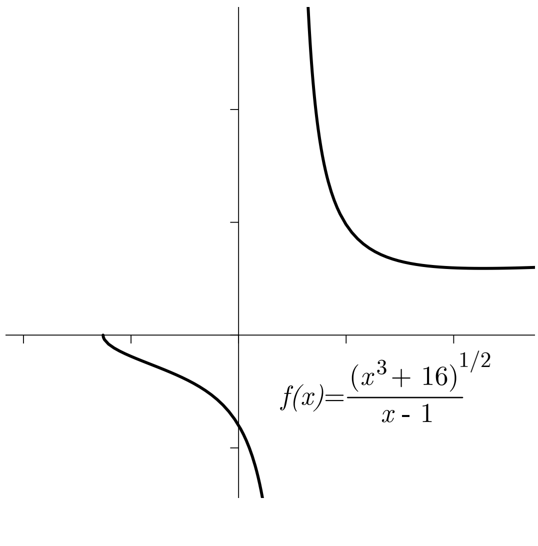

$f(x)=x^4 - x$


$f(x)=\dfrac{2x^2 - 1}{x^2 + 2}$


$f(x)=x^4 - 8x^2 + 2$


$f(x)=\dfrac{x}{(x+5)^2}$


$f(x)=x^5+x^3+3x^2-2x+1$


$f(x)=\dfrac{(x^3+16)^{1/2}}{x-1}$

Capítulo 8

Iniciación a las integrales

8.1. Introducción

El cálculo diferencial e integral, también llamado Cálculo, constituye una potente herramienta en la resolución de problemas de Física, Ingeniería, Economía y, en general, de Ciencias Naturales y Sociales.

Si nos remontamos al S. III a.c, Arquímedes obtuvo el área de algunos recintos curvos (círculo, segmento de parábola,...), y lo hizo sumando "infinitos" trocitos de áreas prácticamente nulas, mediante un procedimiento que contenía la idea aún no precisada de paso al límite.

Estas ideas iniciales permanecieron estancadas hasta el S. $XVII$.

El matemático inglés Isaac Barrow (1630-1677) fue el precursor del cálculo de integrales definidas, enunciando la regla que lleva su nombre y que conecta la integral definida con la indefinida, y por tanto, con las derivadas.

Por último, la gran aportación de Newton y Leibnitz, por la cual se consagran como los padres del Cálculo infinitesimal, fue relacionar el cálculo del área encerrada entre una cierta curva y el eje OX con el problema de la tangente:

- La pendiente de la recta tangente a una curva $y = f(x)$ en un punto x_0 es la derivada en ese punto: $f'(x_0)$.
- El área encerrada bajo la curva $y = f(x)$ se obtiene a partir de una función $F(x)$, cuya derivada es $f(x)$.

Este resultado precisamente es el que hace relevante la búsqueda de las primitivas de algunas funciones.

En esta unidad, veremos el cálculo de primitivas elementales y trataremos su aplicación al cálculo de área de recintos planos limitados por curvas.

8.2. Primitiva de una función

Teorema 1. *Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función real de variable real. Diremos que la función $F(x)$ es una primitiva de f si se cumple que $F'(x) = f(x)$.*

Se tiene que si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, también lo será $F(x)+C$ siendo $C \in \mathbb{R}$. Denotaremos al conjunto de todas las primitivas de f como $\int f(x)dx$.

Ejemplo 62. *Si $f(x) = 2x$ entonces $\int 2xdx = x^2 + C$.*

8.3. Integrales inmediatas

Diremos que la integral $\int f(x)dx$ es inmediata, si podemos calcularla sin usar ninguna transformación. Esto es, si directamente hallamos una función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$. Tenemos las siguientes integrales inmediatas:

1.- $\displaystyle\int dx = x + C$

2.- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

3.- $\displaystyle\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + C$

4.- $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + C$

5.- $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C$

6.- $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C$

7.- $\int senxdx = -cox + C$

8.- $\displaystyle\int cosxdx = senx + C$

9.- $\int (1 + tg^2x)dx = tgx + C$

10.- $\displaystyle\int \frac{1}{cos^2x} dx = tgx + C$

11.- $\int (1 + cotg^2x)dx = -cotgx + C$

12.- $\displaystyle\int \frac{1}{sen^2} dx = -cotgx + C$

13.- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = arcsenx + C = -arccosx + C$

14.- $\displaystyle\int \frac{1}{1 + x^2} dx = arctgx + C = -arcotgx + C$

8.4. Integrales Semi inmediatas

Una integral $\int f(x)dx$ es semi-inmediata si $f(x)$ es de la forma $f(x) = F'(G(x))G'(x)$. En este caso se tendrá que $\int F'(G(x))G'(x)dx = F(G(x)) + C$.

Ejemplo 63. $\displaystyle\int e^{f(x)} f'(x)dx = e^{f(x)} + C$

Ejemplo 64. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{1+x^2}dx = arctg(f(x)) + C$

Ejemplo 65. $\displaystyle\int \frac{cosx}{\sqrt{1-sen^2x}}dx = arcsen(senx) + C = x + C$

Ejemplo 66. $\displaystyle\int \frac{3x^2+2}{x^3+2x}dx = \ln\left(|x^3+2x|\right) + C$

8.5. Propiedades

El método de descomposición para integrales parte de las siguientes propiedades:

(a) $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$

(b) $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Haciendo uso de estas dos propiedades de la integral, podemos resolver integrales de la forma $\int (f(x)+g(x))^n dx$, sin más que realizar el binomio e ir integrando función por función.

Ejemplo 67. $\displaystyle\int (x^2-1)^2dx = \int (x^4-2x^2+1)dx = \int x^4dx + \int (-2x^2)dx + \int dx = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x + C$

8.6. Integración de funciones racionales

Las funciones racionales son de la forma $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinómicas y están definidas siempre que $Q(x) \neq 0$.

Las funciones racionales se transforman en una suma de fracciones, que tienen por denominador polinomios de primer grado o segundo grado irreducibles.

Supondremos que el grado del numerador es menor que el grado del denominador, pues en caso contrario, haciendo la división entera, se tiene:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},\ Q(x) \neq 0$$

y el problema se reduciría a integrar la función polinómica $C(x)$, que es inmediata, y la función $R(x)/Q(x)$, cuyo numerador es de grado inferior al denominador. El proceso consta de tres pasos:

1. Recordamos este resultado de álgebra: "Todo polinomio con coeficientes reales se puede descomponer en un producto de factores lineales y cuadráticos irreducibles"

2. Descomposición de la función en fracciones simples: el esquema es el siguiente:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \dots$$

donde habrá que determinar las constantes A, B, C,...

Nota: Si alguna raíz es doble, tendremos que tenerla en cuenta con una nueva constante.

3. Integración de los sumandos.

Ejemplo 68. *Calcular* $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+3x-4}dx$

En este caso, el grado del numerador es mayor que el denominador, luego hay que efectuar la división y aplicar:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

En nuestro caso, tenemos:

$$\frac{x^3}{x^2+3x-4} = x - 3 + \frac{13x-12}{x^2+3x-4}$$

$$\begin{array}{rl|l} x^3 & & x^2+3x-4 \\ \cline{3-3} -x^3 - 3x^2 + 4x & & x-3 \\ \cline{1-1} -3x^2 + 4x & & \\ -3x^2 + 9x - 12 & & \\ \cline{1-1} 13x - 12 & & \end{array}$$

Por lo tanto:

$$\int \frac{x^3}{x^2+3x-4}dx = \underbrace{\int (x-3)dx}_{(1)} + \underbrace{\int \frac{13x-12}{x^2+3x-4}dx}_{(2)}$$

(1) Es inmediata:

$$\int (x-3)dx = \frac{(x-3)^2}{2} + C$$

(2) Tenemos una nueva integral donde el grado del denominador es mayor que el del numerador y no es inmediata. La solución está en descomponer en producto de factores lineales: sabemos que $x^2+3x-4 = (x-1)(x+4)$. Así pues:

$$\frac{13x-12}{x^2+3x-4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+4}$$

$$\frac{13x-12}{x^2+3x-4} = \frac{A(x+4)+B(x-1)}{(x-1)(x+4)} \Longrightarrow 13x-12 = A(x+4)+B(x-1)$$

Llegados a este punto, para hallar A y B, daremos los valores $x = 1$ y $x = -4$ que hacen cero las expresiones $x - 1$ y $x + 4$ respectivamente:

$x = 1 \Longrightarrow 13 - 12 = 5A + B \cdot 0 \Longrightarrow 1 = 5A \Longrightarrow A = 1/5.$

$x = -4 \Longrightarrow -52 - 12 = A \cdot 0 + B(-5) \Longrightarrow -64 = -5B \Longrightarrow B = 64/5.$

Por lo tanto:

$$\int \frac{13x - 12}{x^2 + 3x - 4} dx = \int \frac{1/5}{x - 1} dx + \int \frac{64/5}{x + 4} dx$$
$$= \frac{1}{5} \int \frac{1}{x - 1} dx + \frac{64}{5} \int \frac{1}{x + 4} = \frac{1}{5} \ln |x - 1| + \frac{64}{5} \int |x + 4| + C$$

La integral inicial queda:

$$\int \frac{x^3}{x^2 + 3x - 4} dx = \frac{(x - 3)^2}{2} + \frac{1}{5} \ln |x - 1| + \frac{64}{5} \int |x + 4| + C$$

Ejemplo 69. *Calcular* $\displaystyle\int \frac{x}{x^3 + 3x^2 - 4} dx$

$x^3 + 3x^2 - 4 = (x - 1)(x + 2)^2$ y la descomposición queda:

$$\frac{x}{x^3 + 3x^2 - 4} = \frac{A}{(x - 1)} + \frac{B}{(x + 2)} + \frac{C}{(x + 2)^2}$$
$$\frac{x}{x^3 + 3x^2 - 4} = \frac{A(x + 2)^2 + B(x - 1)(x + 2) + C(x - 1)}{(x - 1)(x + 2)^2}$$

$x = A(x + 2)^2 + B(x - 1)(x + 2) + C(x - 1)$. Y en este caso, daremos los valores $x = -2$, $x = 1$ y $x = 0$, ya que tenemos que hallar tres valores, A, B y C. El caso de $x = 0$ es por el miembro de la izquierda:

$x = -2 \Longrightarrow -2 = C(-3) \Longrightarrow C = 2/3$

$x = 1 \Longrightarrow 1 = 9A \Longrightarrow A = 1/9$

$x = 0 \Longrightarrow 0 = 4A - 2B - C \Longrightarrow 0 = \dfrac{4}{9} - 2B - \dfrac{2}{3} \Longrightarrow B = -\dfrac{1}{9}$

Por lo tanto:

$$\int \frac{x}{x^3 + 3x^2 - 4} dx = \int \frac{1/9}{x - 1} dx + \int \frac{-1/9}{x + 2} dx + \int \frac{2/3}{(x + 2)^2} dx$$
$$= \frac{1}{9} \int \frac{1}{x - 1} dx - \frac{1}{9} \int \frac{1}{x + 2} dx + \frac{2}{3} \int \frac{1}{(x + 2)^2} dx = \frac{1}{9} \ln |x - 1| - \frac{1}{9} \ln |x + 2| + \frac{2}{3} \frac{(-1)}{x + 2} + C$$

8.7. Integración por partes

El método de integración por partes se basa en la derivada de un producto de funciones. A partir de él se halla una regla que permite calcular la integración de un producto de dos funciones:

$$\int UdV = UV - \int VdU$$

que es la fórmula correspondiente al método de la integración por partes.

En muchos casos, una regla nemotécnica viene muy bien para recordar fórmulas o reglas como la de la integración por partes. Aquí proponemos la nuestra:

$$\int \text{Un Día Vi} = \text{Una Vaca} - \int \text{Vestida De Uniforme}$$

Para la regla general, llamaremos U a la función que sea más fácil de derivar, y dV a la función que sea más fácil de integrar.

Nota: podemos proponer otra regla mnemotécnica que nos facilitará saber qué función es la idónea para derivar (es decir, a qué función se aconseja llamar U). A nuestra regla la llamamos "ALPES" .

Por este orden, la inicial nos señala cuál sería la función más fácil de derivar:

A= Arcotangente, Arcoseno, Arcocoseno, ...
L= logaritmo.
P= polinomios.
E= exponenciales.
S= seno, coseno, tangente, ...

Ejemplo 70. *Calcula* $\int 2xe^x dx$

Llamamos $U = 2x \Longrightarrow dU = 2$
$dV = e^x \Longrightarrow V = \int e^x dx = e^x + C$

Aplicamos: $\int UdV = UV - \int VdU$ y sustituimos cada variable por la función que es:

$$\int 2xe^x dx = 2xe^x - \int e^x \cdot 2dx = 2xe^x - 2\int e^x dx$$

$$= 2xe^x - 2e^x + C = 2e^x(x-1) + C$$

Ejercicio 30. *Calcular* $\int x \operatorname{sen}^2 x dx, \ \int x^3 e^{-x} dx$

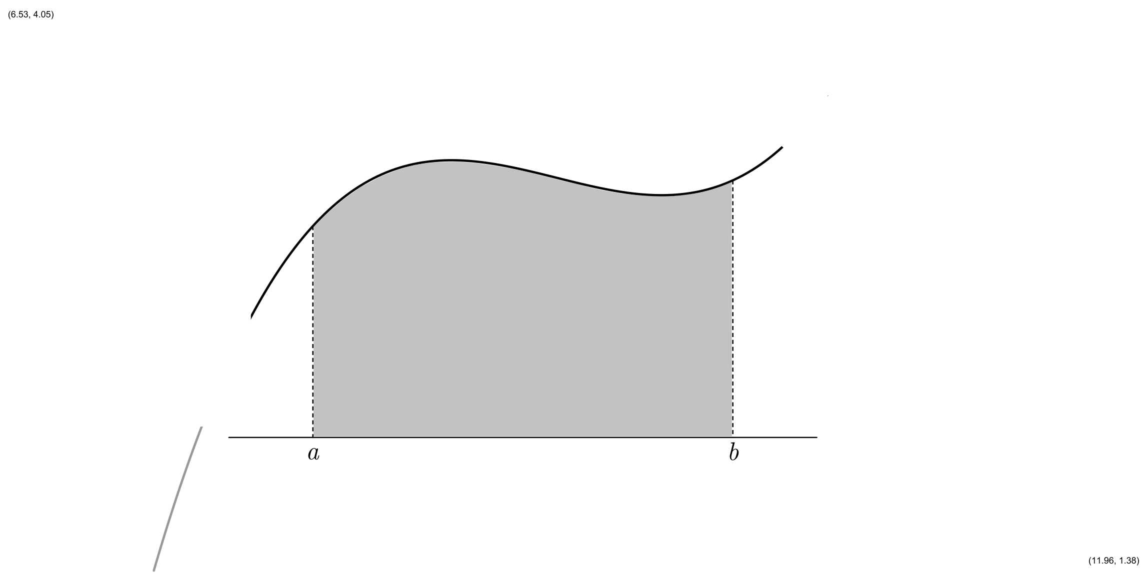
8.8. Integral definida

Como ya hemos comentado anteriormente, las integrales sirven para calcular áreas de figuras no geométricas. En nuestro caso, nos limitaremos a calcular el área bajo una curva y el área encerrada entre dos curvas. Si bien es cierto que, la segunda se puede ver como caso particular de la primera.

En adelante nos centraremos en el concepto de integral definida.

Definición 40. *El área entre la gráfica de la función $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$, es la integral definida:*

$$\int_a^b f(x)dx$$



Para calcular la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ hallamos una primitiva de f, F, y tendremos que:

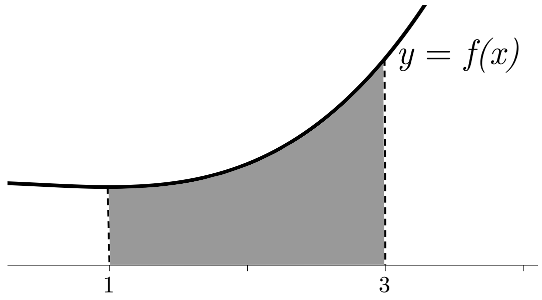
$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \text{ (}\textbf{Regla de Barrow}\text{)}$$

Ejemplo 71. *Calcula el área encerrada por la curva de la gráfica de $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + 3$ entre los puntos $x = 1$ y $x = 3$*

Solución: En primer lugar, debemos hallar una primitiva de $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + 3$. Para ello, hacemos la integral

$$\int \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3\right) dx = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} + 3x + C$$

Puesto que C es una constante, en cuanto apliquemos la regla de Barrow se cancelará, por lo que, podemos tomar $C = 0$.



El área que nos piden es

$$\int_1^3 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3\right) dx = \left[\frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} + 3x\right]_1^3 = \frac{3^4}{12} - \frac{3^3}{6} + 3\cdot 3 - \left(\frac{1^4}{12} - \frac{1^3}{6} + 3\cdot 1\right) = \frac{131}{6}\, u^2$$

Tomamos como unidad de medida la unidad u, entendiendo que pueden ser centímetros, metros, etc.

Ejemplo 72. *Calcula* $\displaystyle\int_2^3 \left(x^2 - 2x + 2\right) dx$

Solución:

$$\int_2^3 \left(x^2 - 2x + 2\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 2x\right]_2^3 =$$

$$\left(\frac{3^3}{3} - 3^2 + 2\cdot 3\right) - \left(\frac{2^3}{3} - 2^2 + 2\cdot 2\right) = 6 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$$

8.8.1. Propiedades de la integral definida

1. Si $f(x \geq 0)$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$
2. Si $f(x \geq g(x)$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx \quad \forall x \in [a, b]$
3. $\displaystyle\int_a^b (cf(x) + dg(x)) = c\int_a^b f(x) + d\int_a^b g(x)dx$
4. $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)dx|$
5. $\displaystyle\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx, \ \forall x \in [a, b]$
6. $\displaystyle\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

7. $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$

8. Si $f(x) \leq 0$ y $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$ entonces $f(x) = 0$.

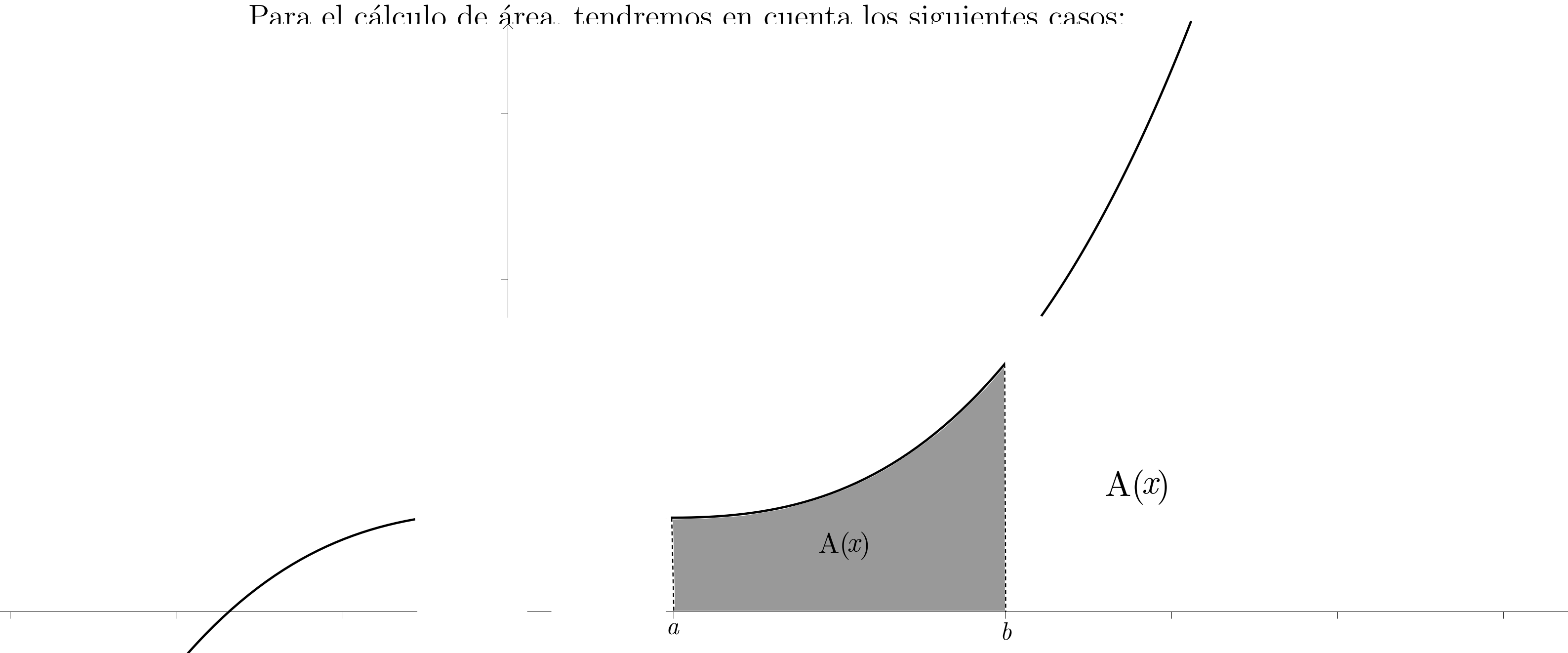
Ejercicios: Calcular:
a) $\int_0^{4\pi} \operatorname{sen} x dx$
b) $\int_{-2}^{2} (x^2 - 4)dx$
c) $\int_0^2 e^x dx$

8.9. Cálculo de áreas de recintos planos

A continuación daremos forma a lo aprendido en esta unidad. Precisamente, el objetivo principal es la aplicación del cálculo de primitivas al cálculo de áreas de recintos planos. Como paso previo, será importante tener en cuenta una serie de pasos de representación de funciones.

1. Representación gráfica del recinto de la función f.
2. Delimitación del recinto cuya área deseamos calcular.
3. Estudio del signo de la función f en el intervalo correspondiente.
4. Utilización, en el caso de que exista, de la simetría en el recinto.

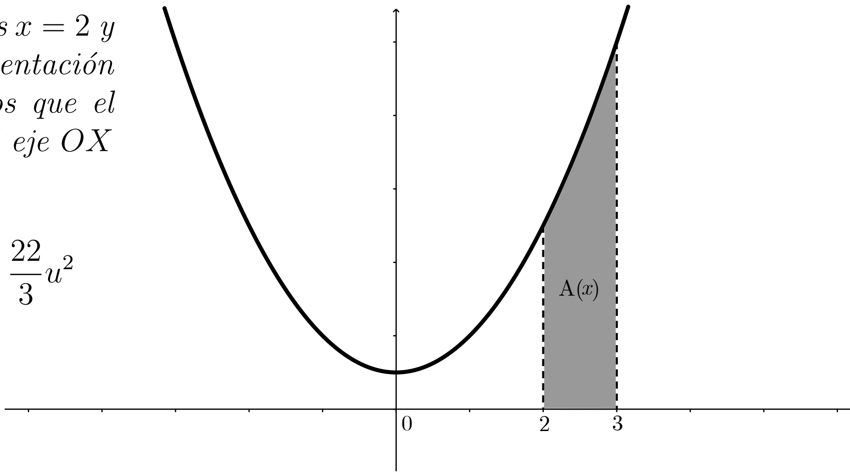
Para el cálculo de área, tendremos en cuenta los siguientes casos:



El siguiente ejemplo nos muestra cómo calcular el área limitada por una curva, la de ecuación $y = x^2 + 1$, el eje OX y en el intervalo $[2, 3]$, es decir, entre las rectas $x = 2$ y $x = 3$.

Ejemplo 73. *Calcula el área de entre la curva de ecuación* $y = x^2+1$*, el eje* OX *y las rectas* $x = 2$ *y* $x = 3$*.* ***Solución:*** *Hacemos una representación gráfica aproximada de la gráfica. Vemos que el área limitada por la curva* $y = x^2 + 1$ *el eje* OX *y la rectas* $x = 2$ *y* $x = 3$ *es*

$$A(x) = \int_2^3 (x^2+1)dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_2^3 = \frac{22}{3}u^2$$

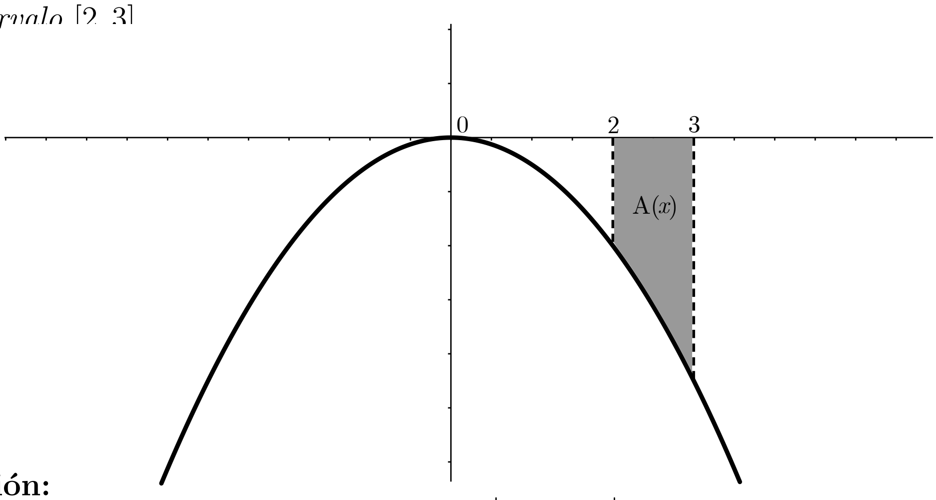


b) $f(x) < 0\ \forall x \in (a, b)$.

Puesto que la función es negativa, la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ dará como resultado un valor negativo. Ahora bien, el área es una magnitud positiva, de lo que deducimos que tenemos que introducir el valor absoluto. Así pues:

$$A(x) = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

Ejemplo 74. *Calcular el área limitada por la curva de ecuación* $y = -x^2$*, el eje* OX *en el intervalo* $[2, 3]$

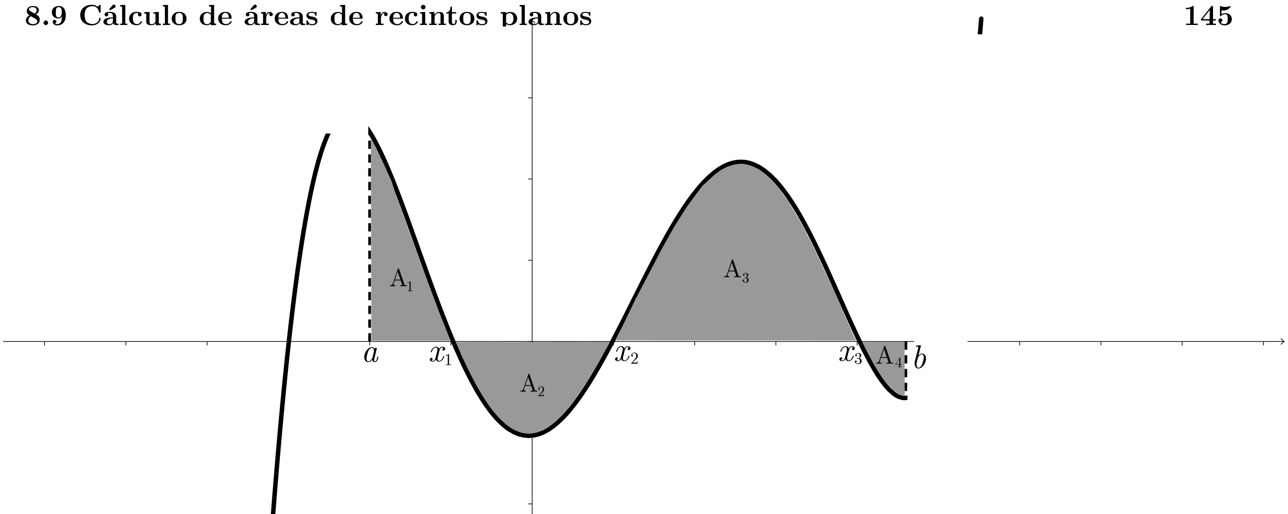


Solución:

$$A(x) = \left|\int_2^3 (-x^2dx)\right| = \left|\left[-\frac{x^3}{3}\right]_2^3\right| = \left|-\frac{19}{3}\right| = \frac{19}{3}\ u^2$$

c) $f(x)$ es positivo y negativo en (a, b).
Suele ser el caso más frecuente. Actuaremos de la siguiente forma:

- Se resuelve la ecuación $f(x) = 0$ para averiguar los puntos de corte con el eje OX.
- Se seleccionan las raíces comprendidas en $[a, b]$. Supongamos que son x_1, x_2 y x_3. Haciendo un pequeño esbozo de la gráfica, la situación puede ser la siguiente:



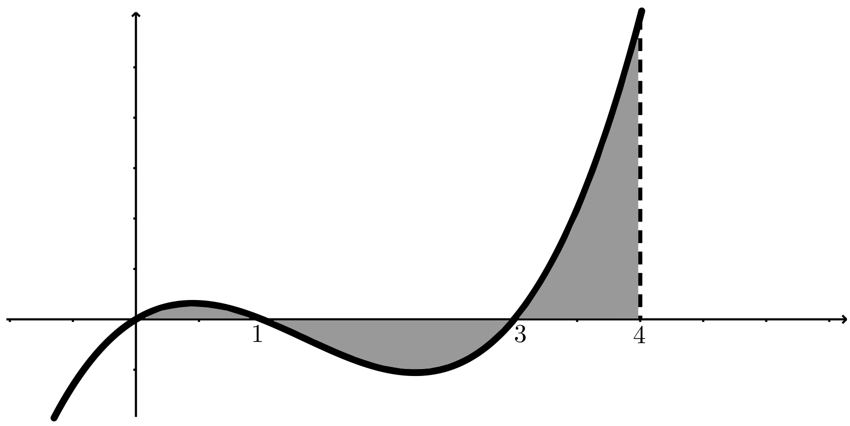
Vemos qué zonas están por encima y qué zonas por debajo. El área que nos piden será:

$$A(x) = A_1(x) + A_2(x) + A_3(x) + A_4(x) =$$

$$\int_a^{x_1} f(x)dx + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \left|\int_{x_3}^{b} f(x)dx\right|$$

Ejemplo 75. *Hallar el área comprendida por la curva de ecuación $y = x^3 - 4x^2 + 3x$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.*

Solución: Sacamos el signo del polinomio $x^3 - 4x^2 + 3x$. Las raíces son $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ y $x_3 = 3$.
Como las tres soluciones están comprendidas en el intervalo $[0, 4]$, está claro que tenemos tres zonas en donde tenemos que diferenciar, esto es, A_1, A_2 y A_3.
Hacemos un pequeño esbozo, para lo cual nos vendrá muy bien el signo.



Calculamos el área de cada recinto usando la regla de Barrow:

$$A_1(x) = \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 3x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^1 = (\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}) - 0 = \frac{5}{12}$$

$$A_2(x) = \left|\int_1^3 (x^3 - 4x^2 + 3x)dx\right| = \left|-\frac{32}{12}\right| = \frac{32}{12}$$

$$A_3(x) = \int_3^4 (x^3 - 4x^2 + 3x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_3^4 = \frac{59}{12}$$

Así pues: $A(x) = A_1(x) + A_2(x) + A_3(x) = \dfrac{5}{12} + \dfrac{32}{12} + \dfrac{59}{12} = 8\ u^2$

8.9.1. Ejercicios

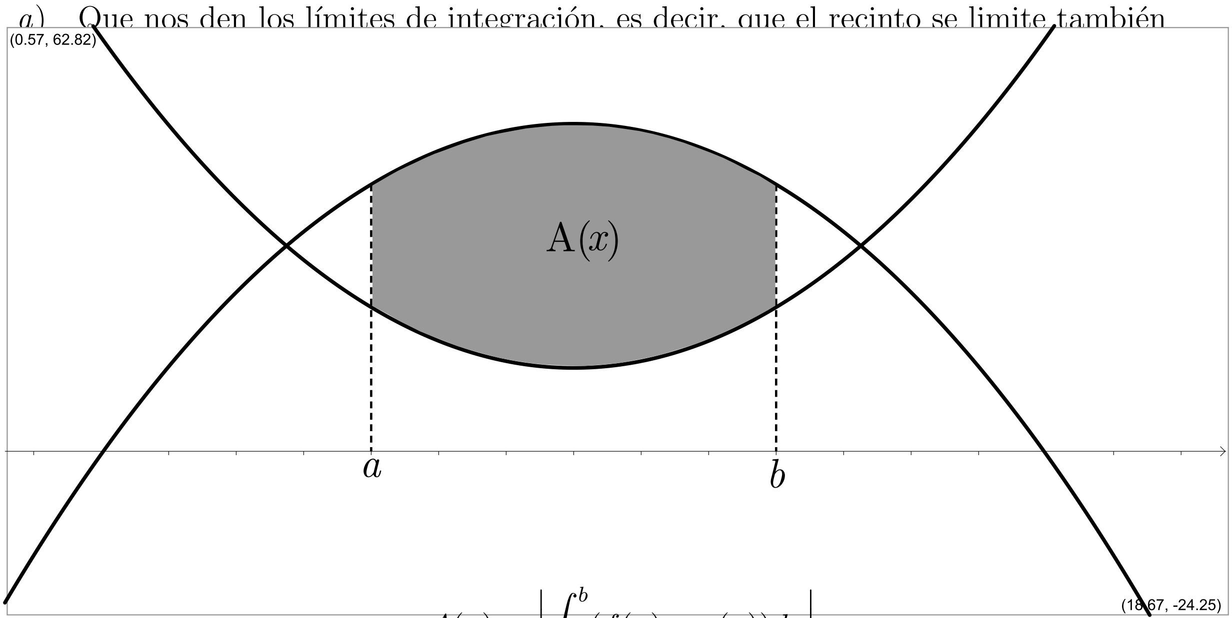
a) Halla el área comprendida entre la curva de ecuación $y = 3x + 2$, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.
Sol. $A = 16\ u^2$

b) Calcula el área del recinto limitado por la parábola $y = x^2 - 4x$ y el eje OX. Observar que no se limita el recinto por rectas verticales, del tipo $x = a$.
Sol. $A = 10,7\ u^2$

c) Halla el área comprendida entre la curva de ecuación $y = x^3 - 4x$, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = 4$
Sol. $A = 38,25\ u^2$

B) Área plana encerrada por dos funciones. Se pueden presentar dos casos:

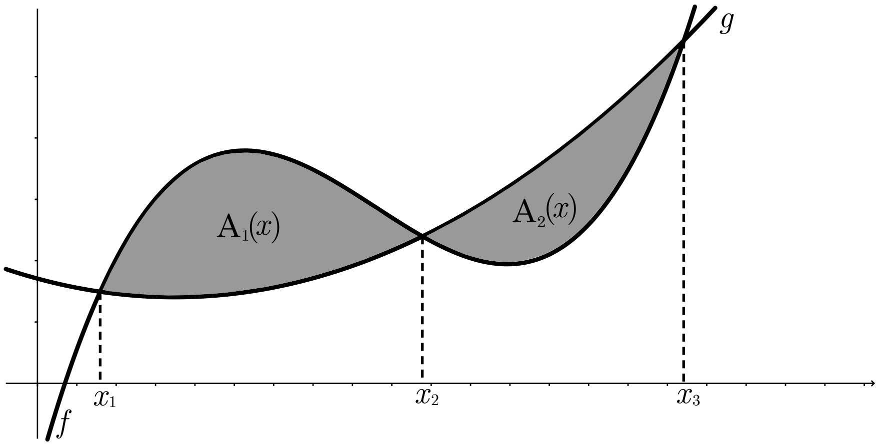
a) Que nos den los límites de integración, es decir, que el recinto se limite también



$$A(x) = \left| \int_a^b (f(x) - g(x))dx \right|$$

Una vez que hacemos el esbozo de las gráficas, queda claro qué función está encima. Ahora bien, es conveniente hallar el signo de la función $h(x) = f(x) - g(x)$. El problema de calcular el área comprendida entre dos funciones, limitada por las rectas $x = a$ y $x = b$, es el equivalente al de, calcular el área comprendida por la curva de ecuación $y = h(x)$, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$.

b) Que las funciones se corten en uno o más puntos.
Ahora, es posible que, se corten en más de dos puntos y por consiguiente que las funciones cambien de posición, de estar encima a estar debajo. Además, el problema se puede completar, añadiendo rectas verticales para ampliar o recortar el recinto. Área encerrada por dos curvas



El área del recinto sombreado de la figura 1 es

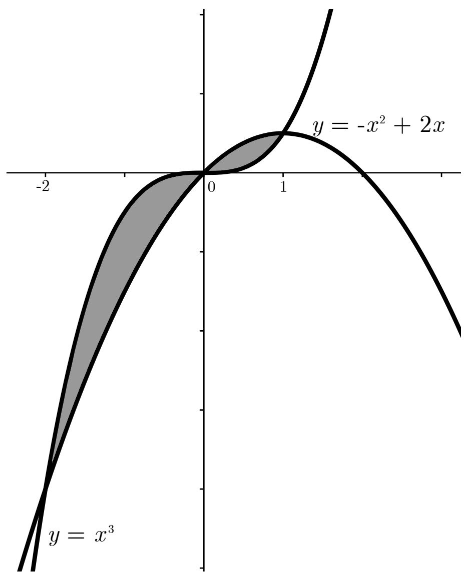
$$A(x) = A_1(x) + A_2(x) = \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))dx + \left| \int_{x_2}^{x_3} (f(x) - g(x))dx \right|$$

Ejemplo 76. *Calcula el área comprendida entre $y = x^3$ e $y = -x^2 + 2x$.*

Solución: Buscamos los puntos de corte, para ello, igualamos:

$x^3 = -x^2+2x \Longrightarrow x^3+x^2-2x = 0 \Longrightarrow x(x^2+x-2) = 0 \Longrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -2,\ x_3 = 1$

Hacemos un pequeño esbozo de las para situarnos:



Teniendo en cuenta que, desde -2 hasta 0, las gráfica de ecuación $y = x^3$ está por encima de la de $y = -x^2 + 2x$ y que, sucede justo lo contrario, desde 0 hasta 1, el área se calcula:

$$A(x) = A_1(x) + A_2(x) = \int_{-2}^{0} [x^3 - (-x^2 + 2x)] + \left| \int_{0}^{1} [x^3 - (-x^2 + 2x)]dx \right| =$$

$$\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-2}^{0}+\left|\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{0}^{1}\right|=\frac{8}{3}+\frac{5}{12}=\frac{37}{12}\ u^2$$

8.10. Ejercicios del tema

1. Hallar el área comprendida entre las dos parábolas $y = x^2$ e $y = -2x^2 + 3$.
2. Hallar el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y2 = 4x$, el eje de ordenadas y la recta $x-2y+4 = 0$.
3. Hallar el área encerrada por la curva $x \cdot y = 4$, el eje OX y las rectas $x = 2$ y $x = 4$.
4. Calcular el área limitada por la gráfica de las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 2x + 1$.
5. Hallar el área limitada por las curvas $y = x^2 - 4$ e $y = 4 - x^2$.
6. Hallar el área limitada por las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = -x + 2$.
7. Calcule el área comprendida entre los semiejes positivos de abscisas y ordenadas y la gráfica de la parábola $y = 4 - (x - 1)^2$.
8. Halle el área de la región del plano limitada por el eje OX, la curva $y = x^3 - x$ y la recta $x = 2$.
9. Hallar el área de la región limitada por las gráficas $f(x) = x^3 - x$ y $g(x) = x^2$
10. Calcula el área comprendida entre las curvas:

    a) $y = x^2$ e $y = x$
    (**Sol:** $\frac{1}{6}\ u^2$)

    b) $y = x^2$ e $y = 1$
    (**Sol:** $\frac{4}{3}\ u^2$)

    c) $y = x^2$ e $y = x^3$
    (**Sol:** $\frac{1}{12}\ u^2$)

    d) $y = x^2$ e $y = -x^2 + 2x$
    (**Sol:** $\frac{1}{3}\ u^2$)

    e) $y = 2x^2 + 5x - 3$ e $y = 3x + 1$
    (**Sol:** $9\ u^2$)

11. Calcula el área de los recintos limitados por:

    a) La función $f(x) = x^2 - 2x + 1$ y los ejes de coordenadas.
    (**Sol:** $\frac{1}{3}\ u^2$)

    b) La curva $y = x^3$, la recta $x = 2$ y el eje OX.
    (**Sol:** $4\ u^2$)

    c) La función $y = \operatorname{sen} x$, el eje de abscisas y las rectas $x = \frac{\pi}{4}$ y $x = -\frac{\pi}{4}$.
    (**Sol:** $0,58\ u^2$)

    d) La función $y = \cos x$ y el eje OX entre $x = 0$ y $x = p$.
    (**Sol:** $2\ u^2$)

12. Calcula el área comprendida entre las curvas: $y = x^2$ e $y = 3 - 2x$.
    (**Sol:** $\frac{32}{3}\ u^2$)
13. Calcula el área comprendida entre las curvas: $y = 4 - x^2$ e $y = 3x^2$.
    (**Sol:** $\frac{16}{3}\ u^2$)
14. Calcula el área comprendida entre las curvas: $y = x$ e $y = x^2 - 2$.
15. Hallar el área limitada por la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje OX.
    (**Sol:** $8\ u^2$)

16. Hallar el área limitada por la curva $y = \dfrac{1}{4-x^2}$ y las rectas $x = -1$, $x = 1$ e $y = \dfrac{1}{2}$
(**Sol:** $(1 + \frac{1}{2}\ln 3)\ u^2$)

17. Dada la curva $y = x^2 + 2x + 2$, halla el área limitada por la curva, la recta tangente en el punto donde la función tiene un extremo y la recta tangente a la curva de pendiente 6.
(**Sol:** $\dfrac{9}{4}\ u^2$)

18. De entre las primitivas de $f(x) = x^2 - 3x + 1$ halla la que pasa por $(0, 1)$.

19. De entre las primitivas de $f(x) = \frac{1}{x^2}$ halla la que pasa por el punto $(1, 0)$.

20. Hallar el área del recinto limitado por las curvas de ecuaciones $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ e $g(x) = -x^2 + 1$.
(**Sol:** $\dfrac{4}{15}\ u^2$)

21. Calcula el área limitada por la gráfica de $y = x + x^2$, la tangente a esa curva en $x = 2$ y el eje de abscisas.
(**Sol:** $\dfrac{16}{15}\ u^2$)

22. Dada la curva de ecuación $y = x^3 - 2x^2 + x$, halla la ecuación de su tangente en el origen y calcula el área de la región que queda encerrada entre la curva y la tangente.
(**Sol:** $\dfrac{4}{3}\ u^2$)

23. Halla una función f de la cual sabemos que:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 5 \text{ y que } f(1) = 0$$

(**Sol:** $f(x) = x^3 - x^2 + 5x - 5$)

24. Halla el área del recinto limitado por $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$, $x = -1$ y el eje OX,
(**Sol:** $\left(2 - \dfrac{2}{e}\right)\ u^2$)

25. Dibuja los dos recintos acotados determinados por las intersecciones de las curvas $y = x^3$ e $y = -x^2 + 2x$. Calcula el área total de dichos recintos.
(**Sol:** $A(R_1) = \dfrac{8}{3}\ u^2$ y $A(R_2) = \dfrac{5}{12}$)

8.11. Ejercicios resueltos

1. (**Castilla-La Mancha, septiembre de 2009**) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \leq 3 \\ (x+1)^2 & si \quad -3 < x < 1 \\ -4x + 8 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

se pide:

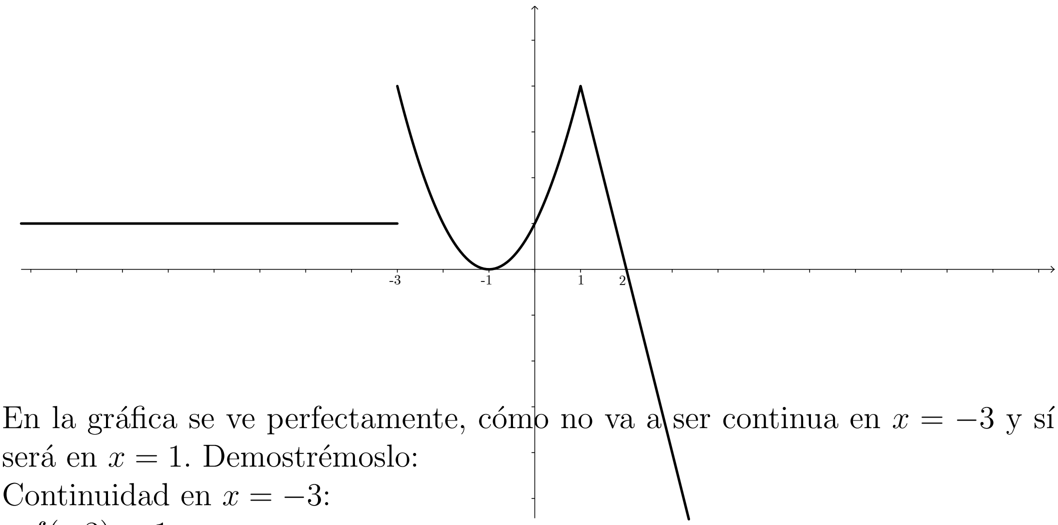
a) Dibuja su gráfica.

b) Estudia su continuidad en $x = -3$ y en $x = 1$.

c) Calcula el área del recinto cerrado delimitado por la gráfica de la función y el eje horizontal.

Solución:

a) Para dibujar, intuitivamente la gráfica, tendremos en cuenta que es una función definida a trozos, y por ello, cada "trozo" sólo podremos definirlo en los puntos que indique el intervalo. Así pues:



b) En la gráfica se ve perfectamente, cómo no va a ser continua en $x = -3$ y sí lo será en $x = 1$. Demostrémoslo:
Continuidad en $x = -3$:
- $f(-3) = 1$
- $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = 1$
- $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -3^+} (x+1)^2 = (-2)^2 = 4$

Como $f(-3) \neq \lim\limits_{x\to -3^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$.
f no es continua en $x = -3$.

Continuidad para $x = 1$:
- $f(1) = -4 + 8 = 4$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x+1)^2 = 4$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (-4x+8) = 4.$

Como existen los límites laterales, coinciden, y además coinciden con el valor de la función en el punto, podemos afirma que f es continua en $x = 1$.

c)

$$A(x) = \int_{-1}^{1} (x+1)^2 dx + \int_{1}^{2} (-4x+8) dx = \left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^{1} + \left[-2x^2 + 8x\right]_1^2 = \frac{14}{3}\ u^2$$

2. (**Valencia, junio de 2009**) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} -x & si \quad x < -1 \\ x - 1 & si \quad -1 \leq x < 4 \\ x^2 - 2x - 6 & si \quad 4 \leq x < 6 \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de la función $f(x)$ en el intervalo $(-2, 6)$.

b) Calcula el área de la región del plano limitada por las rectas $y = 0$, $x = 1$ y $x = 5$.

Solución:

a) Se trata de una función definida a trozos, compuesta por funciones polinómicas y por tanto continua en cada uno de los "trozos" en los que hemos dividido el dominio. El problema "real" de su continuidad lo vamos a tener en aquellos puntos donde la función cambia de rama, es decir, en $x=-1,\ 4$:

Continuidad en $x=-1$
- $f(-1)=-1-1=-2$
- $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)= \lim\limits_{x\to-1^-}(-x)= 1$
- $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)= \lim\limits_{x\to-1^+}(x-1)= -2.$

$\nexists \lim\limits_{x\to-1} f(x)$ al no coincidir sus límites laterales, luego f no es continua en $x=-1$.

Continuidad en $x=4$
- $f(4)=2$
- $\lim\limits_{x\to4^-} f(x)= \lim\limits_{x\to4^-}(x-1)= 3$
- $\lim\limits_{x\to4^+} f(x)= \lim\limits_{x\to4^+}(x^2-2x-6)= 2.$

$\nexists \lim\limits_{x\to4} f(x)$ al no coincidir sus límites laterales, luego f no es continua en $x=4$.

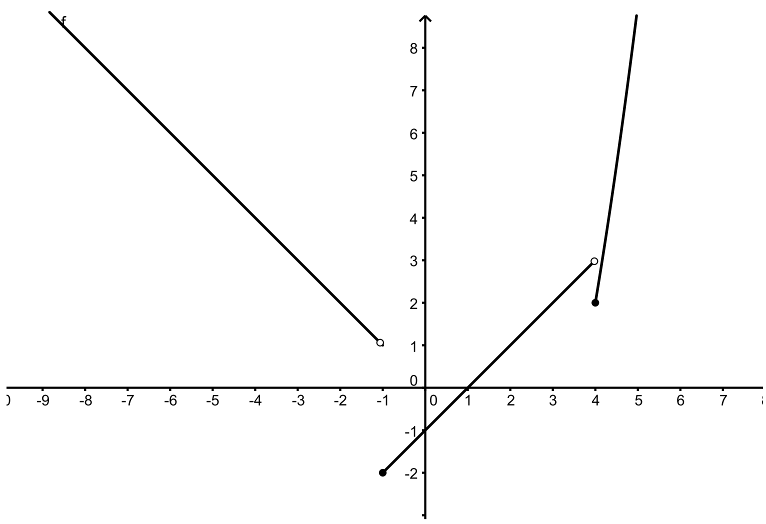
En conclusión, podemos decir que f es continua en el intervalo $(-2,6)$ excepto en $x=-1$ y $x=4$.

b)

$$A(x)=\left|\int_1^4 (x-1)dx+\int_4^5 (x^2-2x-6)dx\right|$$

$$=\left|\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^4+\left[\frac{x^3}{3}-x^2-6x\right]_4^5\right|=8-4-\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{16}{3}=\frac{59}{6}\ u^2$$

Un esbozo de la gráfica es:



3. (**Murcia, junio de 2009**) Calcula el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y = 4 - x^2$ y la recta $y = x + 2$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

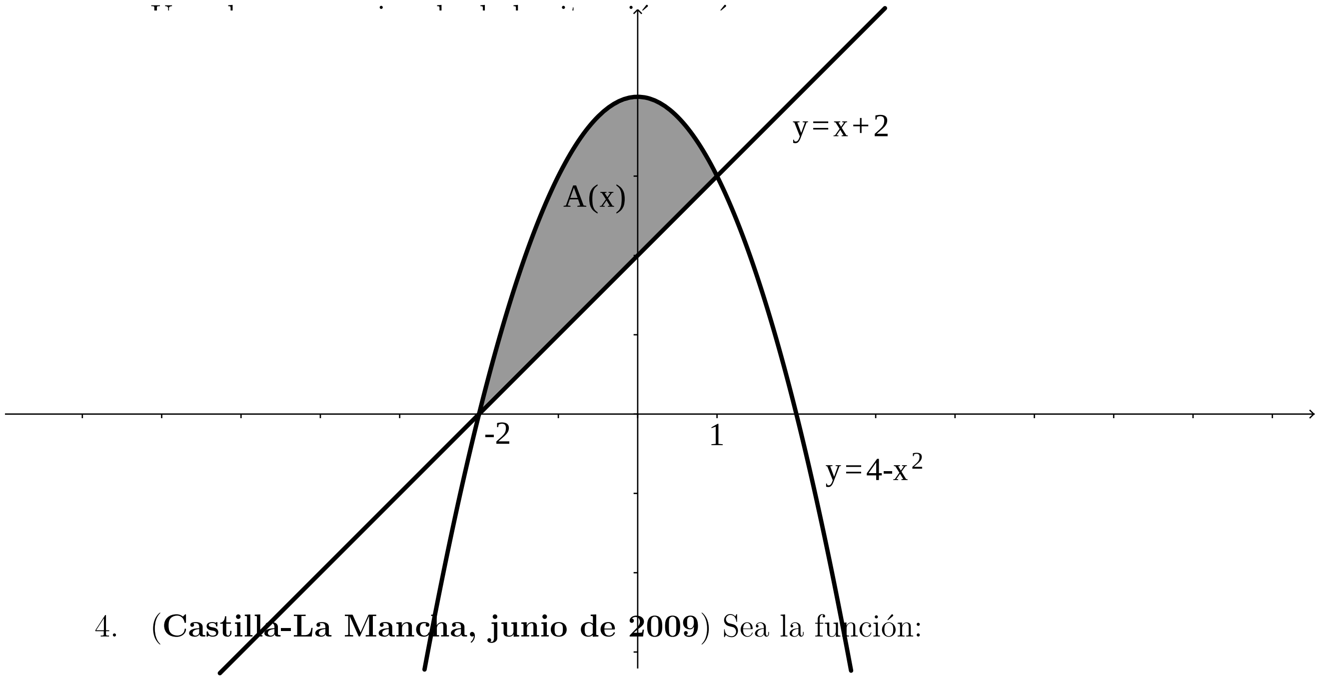
   Solución: Veamos los puntos de corte:

$$4 - x^2 = x + 2 \Longrightarrow -x^2 - x + 2 = 0 \Longrightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 1$$

   Así pues:

$$A(x) = \left| \int_{-2}^{1} (4 - x^2 - x - 2)dx \right| = \left| \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)dx \right|$$

$$= \left| \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^{1} \right| = \left| \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) - \left(-\frac{8}{3} - 2 - 4 \right) \right| = \frac{59}{6}\ u^2$$



4. (**Castilla-La Mancha, junio de 2009**) Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq -2 \\ x^2 - 4 & si \quad -2 < x < 3 \\ (x-2)^2 & si \quad x \geq 3 \end{cases}$$

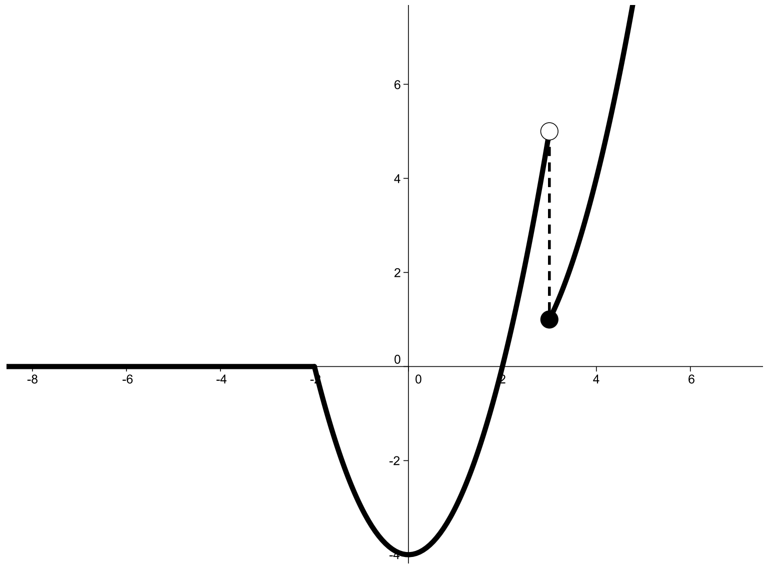
   a) Representa la función.

   b) Estudia la continuidad en $x = 2$ y $x = 3$.

   c) Calcula el área entre f y el eje horizontal.

   Solución:

   a) Un esbozo aproximado de la gráfica, teniendo en cuenta que se trata de una función definida a trozos, sería:



b) Si observamos el gráfico,a primera vista, va ser continua en $x = -2$ y discontinua en $x = 3$. Veámoslo:

Continuidad en $x = -2$:
- $f(-2) = 0$
- $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} 0 = 0$
- $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} (x^2 - 4) = 0.$

Luego f va ser continua en $x = -2$ porque existen los límites laterales, coinciden y además son iguales al valor de la función para ese punto.

Continuidad en $x = 3$:
- $f(3) = 1$
- $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} (x^2 - 4) = 5$
- $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (x-2)^2 = 1.$

Como los límites laterales no coinciden, no existe el límite, y por tanto f es discontinua en $x = 3$.

c)

$$A(x) = \left| \int_{-2}^{2} (x^2 - 4)dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_{-2}^{2} \right|$$

$$= \left| \frac{8}{3} - 8 - \left(-\frac{8}{3} + 8 \right) \right| = \left| \frac{16}{3} - 16 \right| = \frac{32}{3}\ u^2$$

5. (**Madrid, junio de 2009**) Sea

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 24 & si \quad x \leq 3 \\ x^2 + 9 & si \quad -3 < x \leq 2 \\ -x + 15 & si \quad x > 2 \end{cases}$$

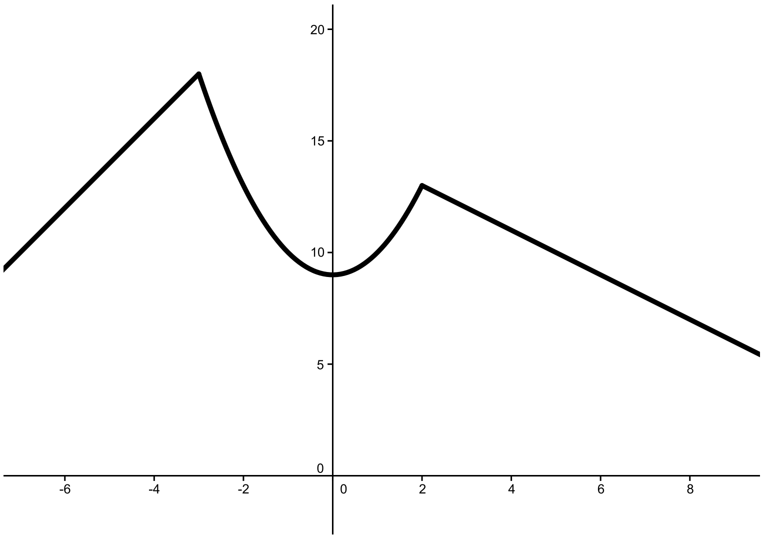
a) Representa gráficamente la función f.

b) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

c) Calcula el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y el eje OX.

Solución:

a) Se trata de una función definida a trozos. Un esbozo aproximado sería:



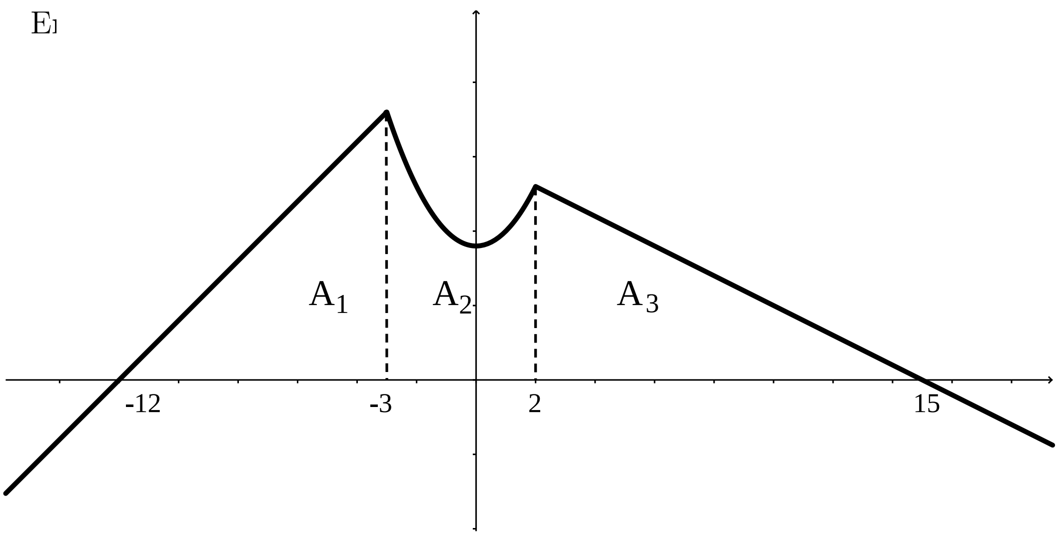
b) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en $x = 1$ vienen dada por:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

para ver $f(1)$, me fijo en la parte de la función definida para $(-3, 2]$, y en este caso es $f(x) = x^2 + 9$.
$f(1) = 1 + 9 = 10$
$f'(x) = 2x \Longrightarrow f'(1) = 2$. Así pues: $y - 10 = 2(x - 1)$.

Por tanto, la ecuación referida es precisamente $y = 2x + 8$.

El



Observemos que en la gráfica, A_1 y A_3 son triángulos. En este caso, podemos aplicar la geometría del triángulo:

$A_1 = \dfrac{9 \cdot 18}{2} = 81\ u^2$. Obviamente $A_1 = \displaystyle\int_{-12}^{-3} (2x+24)dx = 81\ u^2$

$A_2 = \displaystyle\int_{-3}^{2} (x^2+9)dx = \left[\frac{x^3}{3} + 9x\right]_{-3}^{2} = \frac{170}{3}\ u^2$

$A_3 = \dfrac{13 \cdot 13}{2} = \dfrac{169}{2}\ u^2$. Además $A_3 = \displaystyle\int_{2}^{15} (-x+15)dx$

Así pues:

$$A_{\text{Total}} = A_1 + A_2 + A_3 = 81 + \frac{170}{3} + \frac{169}{2} = \frac{1333}{6}\ u^2$$

6. (**Castilla-La Mancha, septiembre de 2008**) Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 3 & si \quad x \leq 0 \\ |x-3| & si \quad x > 0 \end{cases}$$

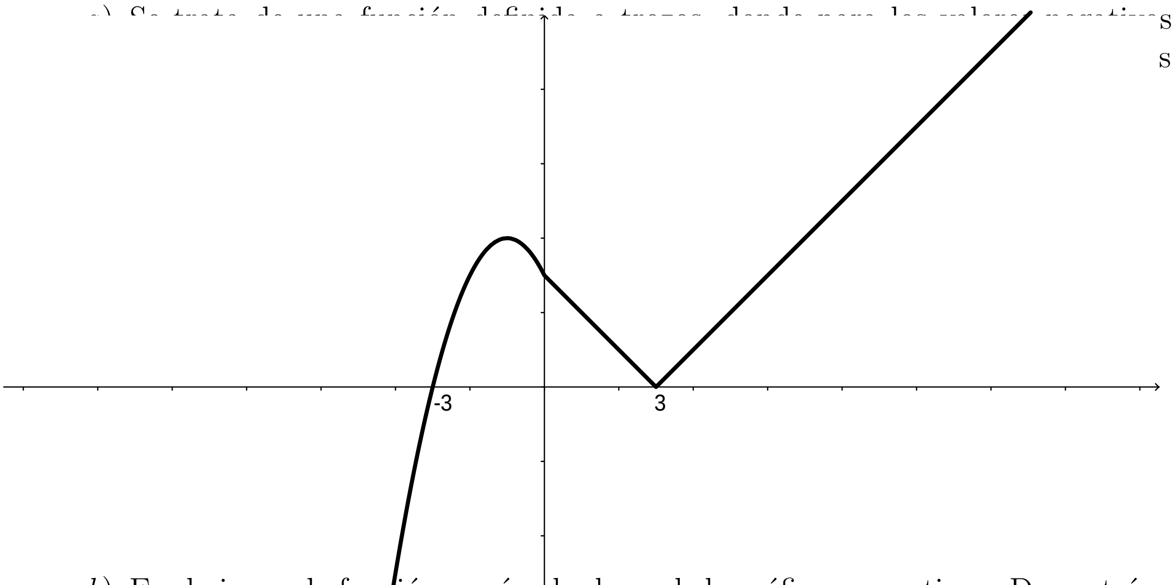
a) Dibuja su gráfica.

b) Estudia su continuidad.

c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función y el eje de abscisas.

Solución:

s, la
s un



b) Es obvio que la función, según el esbozo de la gráfica, es continua. Demostrémoslo analíticamente; ambas funciones son continuas por tratarse de composición de funciones continuas bien definidas en su dominio:

Continuidad en $x = 0$:
- $f(0) = 3$

- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-x^2-2x+3) = 3$
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} |x-3| = 3.$

Luego f va ser continua en $x=0$ porque existen los límites laterales, coinciden y además son iguales al valor de la función para ese punto.

Conclusión: f es continua en todo $\mathbb{R}$.

c)

$$A_{\text{Total}} = \int_{-3}^{0} (-x^2-2x+3)dx + \int_{0}^{3} (-x+3)dx$$
$$= \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right]_{-3}^{0} + \left[-\frac{x^2}{2} + 3x\right]_{0}^{3} = \frac{27}{2}\ u^2$$

8.12. Ejercicios propuestos

1. (**Murcia, junio de 2008**) Calcula el área limitada por la curva $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$, el eje OX y las rectas de ecuaciones $x=0$ y $x=3$.

   Solución: $A = \frac{11}{12}\ u^2$

2. (**Murcia, septiembre de 2008**) Considérense las funciones siguientes: $f(x) = x-2$; $g(x) = x^2$.

   a) Hallar los máximos y los mínimos de la función $y = f(x)\cdot g(x)$.

   b) Hallar dos primitivas diferentes de la función $y = f(x)\cdot g(x)$.

   Solución:

   a) En $x=0$ hay un máximo y en $x=4/3$ hay un mínimo.

   b) $\int x^2(x-2)dx = \frac{x^4}{4} - 2x + C$. Dos primitivas serían $H_1(x) = \frac{x^4}{4} - 2x + 3$ y $H_2(x) = \frac{x^4}{4} - 2x - 1500$.

3. (**Castilla-La Mancha, junio de 2008**) Dada la función

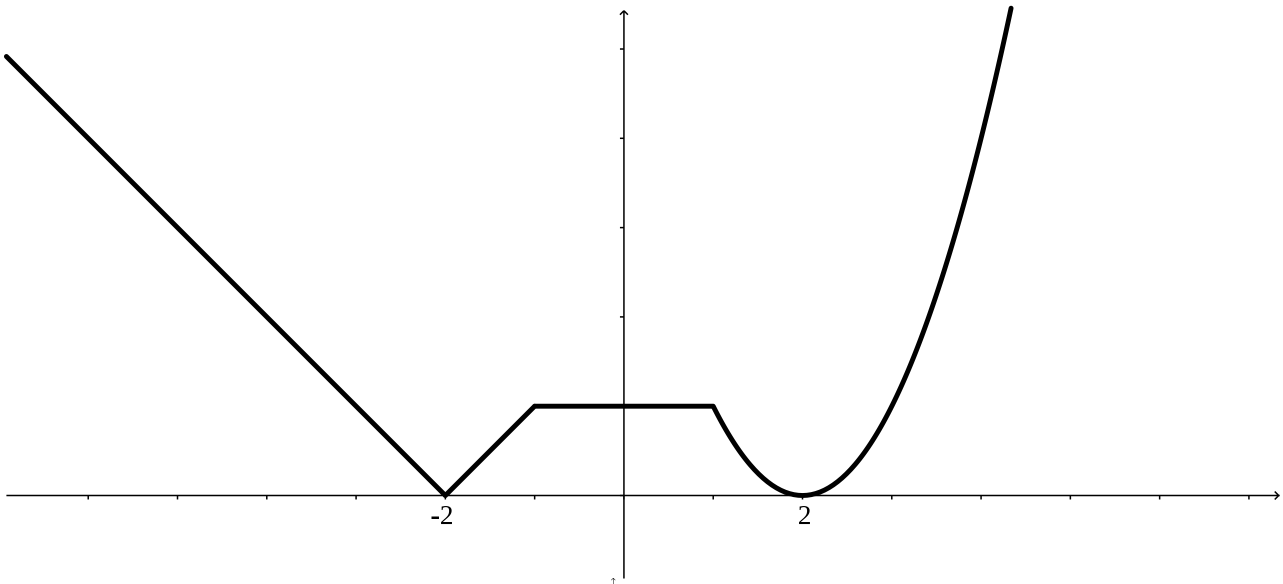
$$f(x) = \begin{cases} |x+2| & si \quad x \leq -1 \\ k & si \quad -1 < x < 1 \\ (x-2)^2 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

   a) Halla el valor de k para que la gráfica sea continua para $x=-1$.

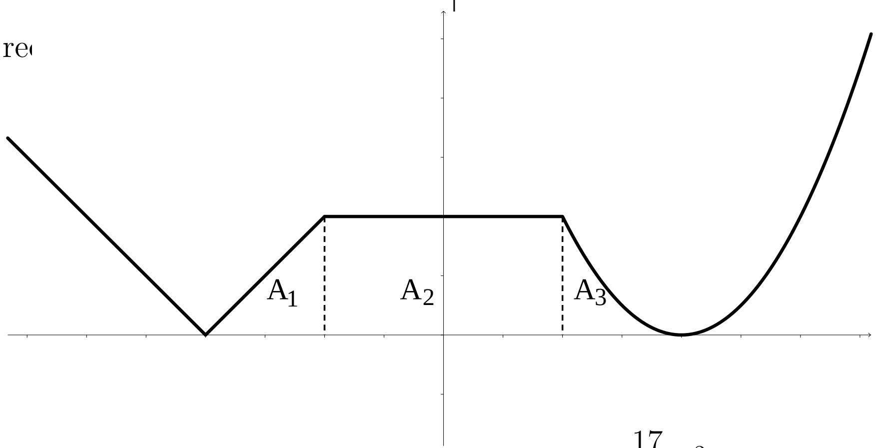
   b) Para ese valor de k, dibuja la gráfica.

   c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

Solución:



c) EL re



$$A_{\text{Total}} = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{17}{6}\ u^2$$

4. (**Madrid, junio de 2008**) Calcúlese el área de la región plana acotada limitada por las gráficas de las funciones reales de variable real: $f(x) = x^2 - x$ y $g(x) = 1 - x^2$.

   Solución: $A(x) = \dfrac{9}{8}\ u^2$

5. Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x},\ x \neq 0$$

   a) Determinar las asíntotas de f.

   b) Calcúlese sus máximos y sus mínimos relativos y determínese sus intervalos de crecimiento.

   c) Calcúlese la integral definida $\int_1^2 f(x)dx$.

   Solución:

a) Asíntota vertical en $x = 0$, no hay asíntotas horizontales y hay una oblícua: $y = x + 1$

b) Hay un máximo relativo en $(-\sqrt{2};\ 1,8)$, un mínimo relativo en $(\sqrt{2};\ 3,8)$.

La función f crece en $(-\infty;\ -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2};\ +\infty)$ y decrece en $(-\sqrt{2};\ \sqrt{2})$.

c) $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx = \frac{5}{2} + 2\ln 2.$

Capítulo 9

Cálculo de probabilidades

9.1. Introducción

En este tema introduciremos una serie de herramientas importantes. Herramientas, básicas en el estudio de la Inferencia Estadística, y que veremos en el tema siguiente.

Aparecerán términos como *experimento*, *suceso*, *unión* e *intersección*.

Daremos a continuación una serie de definiciones previas.

Toda experiencia que dependa del azar, diremos que es una **experiencia aleatoria**. Un ejemplo de experiencia aleatoria aparece cuando lanzamos un dado. Y si nos preguntamos por el hecho de, si al lanzar dicho dado, saldrá un 1, estaremos hablando de un **suceso aleatorio**.

Si atendemos ahora a los posibles resultados del lanzamiento de nuestro dado, tenemos 6 posibles sucesos aleatorios asociados a dicho dado. Estos son:

$$E = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

A cada uno de estos sucesos, los llamaremos **sucesos elementales**. Por ejemplo, el suceso $Par = \{2,\ 4,\ 6\}$, consta de los sucesos elementales 2, 4 y 6.

Al conjunto de todos los sucesos posibles de un experimento aleatorio lo llamaremos **espacio muestral**.

Dentro del conjunto de todos los sucesos, existen unos sucesos peculiares, como por ejemplo el **suceso seguro**, que no es ni más ni menos, que salga alguno de los números. Como contrapartida, está el **suceso imposible**, $\emptyset$.

De la misma manera que se pueden sumar números reales, podemos "sumar" sucesos. Ahora bien, a esta suma, la llamaremos unión de sucesos. Existen otras operaciones con sucesos.

9.2. Operaciones con sucesos

Sea E el espacio muestral correspondiente a una experiencia aleatoria. Sean A y B dos sucesos cualesquiera de E. Se definen las siguientes operaciones con sucesos:

1. **Unión:** $A \cup B$ como el suceso que resulta de unir los sucesos elementales de A con los de B. Aunque el suceso elemental 1, aparece dos veces, no hace falta repetirlo en $A \cup B$

2. **Intersección:** $A \cap B$ como el suceso formado por los sucesos elementales que aparecen en A y en B.

3. **Diferencia:** $A - B$, como el sucesos formado por los sucesos elementales que están en A pero no en B.

4. **Complementario:** A^c o $\overline{A}$

Ejemplo 77. *Consideremos* $E_{Dado} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ *y sean* $A = \{1,\ 3,\ 5\}$, $B = \{1,\ 2,\ 4\}$*:*

$$A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$$

Aunque el suceso elemental 1*, aparece dos veces, no hace falta repetirlo en* $A \cup B$*.*

$$A \cap B = \{1\}$$

$$A - B = \{3,\ 5\}$$

$$\overline{A} = \{2,\ 4\ 6\}, \qquad \overline{B} = \{3,\ 5,\ 6\}$$

Ejercicio 31. *Sean* A *y* B *los de arriba, y sea* $C = \{3,\ 4\}$*. Comprueba que se dan las siguientes igualdades:*

	Unión	***Intersección***
Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Asociativa	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Idempotente	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Simplificar	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Neutro	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap E = A$
Absorción	$A \cup E = E$	$A \cap \emptyset = \emptyset$

9.3. Definición de probabilidad

El concepto de probabilidad admite varias definiciones, según el punto de partida que se tome. La definición que adoptaremos será la de Andrei Kolmogorov.

Definición 41. *Sea E un espacio muestral. Sea S el conjunto de todos los sucesos de E. Llamaremos* ***probabilidad*** *a toda aplicación P definida entre los conjuntos S y $\mathbb{R}$,*

$$P : \underset{A \longrightarrow P(A)}{S \longrightarrow \mathbb{R}}$$

verificando los axiomas siguientes:

Axioma *1 La probabilidad del suceso seguro o espacio muestral es 1.*

$$P(E) = 1$$

Axioma *2 cualquiera que sea el suceso A, su probabilidad es un número no negativo.*

$$P(A) \geq 0$$

Axioma *3 Si A y B son dos sucesos incompatibles, $A \cap B = \emptyset$, entonces la probabilidad del suceso unión es la suma de las probabilidades.*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

9.3.1. Propiedades

1. *Para sucesos complementarios A y $\overline{A}$ se cumple:*

$$\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$$

2. *El complementario del complementario de un suceso es el propio suceso:*

$$\overline{\overline{A}} = A$$

3. *la probabilidad del suceso imposible, $\emptyset$, es 0, es decir*

$$\boxed{P(\emptyset) = 0}$$

4. *Si A y B son sucesos compatibles, $A \cap B \neq \emptyset$, entonces la probabilidad de unión es*

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

5. *Si $A \subset B$ (los elementos de A están en B), entonces*

$$\boxed{P(A) \leq P(B)}$$

Ejercicio 32. *Demuestra las propiedades anteriores, haciendo uso de los axiomas.*

9.4. Regla de Laplace

Aunque hemos definido *probabilidad* por medio de una aplicación, la regla de Laplace, es la primera definición de probabilidad que se dio. El problema que plantea esta definición, es que está ligada a los juegos de azar. No es una definición que podamos generalizar a toas las experiencias aleatorias. Ahora bien, la de Laplace es una buena definición que nos va a ayudar a resolver un gran número de problemas relacionados con juegos de azar. Es una buena aproximación a la realidad.

Definición 42. *Sea $E = \{a_1,\ a_2, \dots,\ a_n\}$ un espacio muestral con n sucesos elementales. Sea también A un suceso asociado a E.*

Si todos los sucesos elementales son equiprobables, la Regla de Laplace dice:

La probabilidad del suceso A formado por h sucesos elementales es igual al cociente entre el número de resultados favorables y el número de resultados posibles. Así,

$$P(A) = \frac{\textit{número de casos favorables al suceso } A(h)}{\textit{número de casos posibles } (n)} = \frac{h}{n}$$

Practiquemos la definición de probabilidad, dada por Laplace, en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 33. *Se lanzan dos dados. Se pide:*

a) Halla la probabilidad de que la suma de los valores que aparecen sea múltiplo de tres.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que los valores obtenidos difieran en una cantidad mayor de dos?

El espacio muestral del experimento es

$$E_{\{2 \text{ dados}\}} = \{(1,1);\ (1,2);\ (1,3);\ (1,4);\ (1,5);\ (1,6);\ (2,1);\dots;\ (6,6)\}$$

y está formado por 36 sucesos elementales equiprobables. Constituyen el número de casos posibles del experimento.

Utilizando la regla de Laplace, calculamos las probabilidades de los sucesos que nos piden:

1. Sea A =Obtener una suma múltiplo de 3, los casos favorables al suceso son:

$$\{(1,2);(2,1);(1,5);(2,4);(3,3);(4,2);(5,1);(3,6);(4,5);(5,4);(6,3);(6,6);\}$$

Y como hay 36 casos posibles:

$$P(A) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

2. Sea B =Obtener unos valores que se diferencian en una cantidad mayor que 2. Salen de nuevo 12 casos favorables. Luego, $P(B) = 1/3$.

Ejercicio 34. *Dado el conjunto de números* $00, 01, 02, \ldots, 98, 99$. *Si escogemos al azar dos números de entre los del conjunto, determina la probabilidad de que:*

1. *Que las dos cifras sean iguales. (**Sol:** 1/10)*
2. *Que su suma sea* 11. *(**Sol:** 8/100)*
3. *Que su suma sea mayor que* 7 *y menor que* 13. *(**Sol:** 43/100)*

9.5. Probabilidad condicionada. Sucesos independientes

Recordemos el espacio muestral $E_{\{Dado\}} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Sea $A = \{\text{sacar un dos}\}$ y $C = \{\text{sacar cifra par}\}$. Según la regla de Laplace: $P(A) = 1/6$ y $P(C) = 3/6 = 1/2$.

Consideremos ahora el suceso $B = \{\text{Sacar un 2 sabiendo que la cifra que sale es par}\}$. Se tendrá

$$P(B) = \frac{\text{1 caso favorable}}{\text{3 casos posibles}} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{6} = P(A)$$

Es decir, el suceso B, no es el mismo que el suceso A. Ahora bien, el suceso B sí es el suceso A condicionado por el suceso C.

Dados dos sucesos A y C, se llama **probabilidad de A condicionada a C** y se escribe $P(A/C)$ a:

$$P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)}$$

De la expresión anterior se deduce que:

$$P(A \cap C) = P(C) \cdot P(A/C)$$

Dos sucesos A y C se dicen que son **independientes** cuando: $P(A/C) = P(A)$ y $P(C/A) = P(C)$.

Cuando dos sucesos son independientes, la probabilidad de su intersección es igual al producto de sus probabilidades:

$$A \text{ y } C \text{ independientes} \Longrightarrow P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$$

Comprobemos la definición con las probabilidades anteriores.
Recordemos que

$$P(A/C) = \frac{1}{3}; \quad P(A \cap C) = \frac{1}{6}; \quad P(C) = \frac{1}{2}$$

Se cumple entonces que

$$P(A/C) = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

que coincide con la probabilidad que hemos calculado.

Practiquemos la probabilidad condicionada con un ejercicio.

Ejercicio 35. *Se lanzan dos dados:*

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma de puntos igual a 10*?*

b) Si la suma de puntos ha sido 7*, ¿cuál es la probabilidad de que en alguno de los dados haya salido un tres?*

Solución: Sean los sucesos A, la suma de los puntos es 7 y B, en alguno de los dados ha salido un tres.

a) Los casos posibles al lanzar dos dados son 36 y los casos favorables al suceso A son los seis siguientes:

$$(4,6); (6,4); (5,5)$$

Por tanto,

$$P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

.

b) En este caso, el suceso B/A es salir en algún dado 3, si la suma ha sido 7. Observemos que esta situación ocurre en las parejas $(3,4)$ y $(4,3)$. Por tanto,

$$P(B/A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Ejercicio 36. *En una caja hay* n *bombones de chocolate negro y* 1 *bombón de chocolate blanco. Al extraer de la caja dos bombones al azar sin reemplazamiento, la probabilidad de que sean bombones de chocolate negro es* $1/2$*. Calcula* n*.*

Sol: $n = 3$

9.6. Tablas de contingencia

Las tablas de contingencia nos servirán de apoyo en la aplicación de la probabilidad condicionada. Estas tablas, de fácil manejo, nos permiten calcular una probabilidad condicionada de un plumazo. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 78. *La siguiente tabla muestra un estudio sobre el hábito de hacer deporte en un grupo de hombres y mujeres.*

	Hombre	*Mujer*	*Total*
Deportista	*50*	*70*	*120*
No deportista	*70*	*60*	*130*
Total	*120*	*130*	*250*

Si queremos calcular la probabilidad de $A =$ "Deportista/Hombre" basta con mirar en la tabla dónde está el número de hombres que fuman y mirar la casilla del total de hombres. De lo dicho se deduce que:

$$P(A) = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}$$

Supongamos ahora que de entre el grupo de personas preguntadas, tomamos una al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer sabiendo que no es fumadora? En este caso, el suceso, B, será luego:

$$P(B) = \frac{60}{130} = \frac{6}{13}$$

ya que, estamos tomado como grupo de referencia (marginal) el de los no fumadores.

9.7. Probabilidad total

Esta sesión nos aportará una de las herramientas más importantes del cálculo de probabilidades. Se trata del **Teorema de la probabilidad total**. En este teorema, partimos del hecho de poder dividir el espacio muestral E en una serie de sucesos disjuntos (intersección vacía) dos a dos. Como por ejemplo, podremos resolver problemas como el siguiente:

En un cierto banco, el 30 % *de los créditos concedidos son para vivienda, el* 50 % *se destinan a empresas y el* 20 % *son para consumo. Se sabe además que de los créditos concedidos a vivienda, el* 10 % *resultan impagados, de los créditos concedidos a empresas son impagados el* 20 % *y de los créditos concedidos para consumo resultan impagados el* 10 %

.

El teorema de la probabilidad total se puede enunciar como sigue:

Tenemos n sucesos A_1, A_2, ..., A_n, incompatibles dos a dos y tales que $E = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Entonces, para cualquier suceso S se cumple que:

$$\boxed{P(S) = P(A_1 \cap S) + P(A_2 \cap S) + \ldots + P(A_n \cap S)}$$

Utilizando el hecho de que $P(A_i \cap S) = P(A_i) \cdot P(S/A_i)$. El teorema de la probabilidad total nos dice que:

$$\boxed{P(S) = P(A_1)P(S/A_1) + P(A_2) \cdot P(S/A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(S/A_n)}$$

Apliquemos el teorema de la probabilidad total para resolver el problema que hemos planteado hace un momento, que resulta ser de las PAU de Madrid/2009.

Ejercicio 37. ***(PAU Madrid, septiembre de 2009)*** *En un cierto banco, el* 30 % *de los créditos concedidos son para vivienda, el* 50 % *se destinan a empresas y el* 20 % *son para consumo. Se sabe además que de los créditos concedidos a vivienda, el* 10 % *resultan impagados, de los créditos concedidos a empresas son impagados el* 20 % *y de los créditos concedidos para consumo resultan impagados el* 10 %*.*

1. Calcúlese la probabilidad de que un cierto crédito elegido al azar sea pagado.

2. ¿Cuál es la probabilidad de que un crédito elegido al azar se haya destinado a consumo, sabiendo que se ha pagado?

Solución: Sean los sucesos: V = créditos para vivienda, E = créditos para empresa, C = créditos para consumo, I = impagada y P = pagada. En esta situación, tendremos:

$P(V) = 0,3,\ P(I/V) = 0,1 \Longrightarrow P(P/V) = 0,9.$

$P(E) = 0,5,\ P(I/E) = 0,2 \Longrightarrow P(P/E) = 0,8.$

$P(C) = 0,2,\ P(I/C) = 0,1 \Longrightarrow P(P/C) = 0,9.$

a) Se trata de un claro ejemplo de uso del teorema de la probabilidad total:

$$P(P) = P(V) \cdot P(P/V) + P(E) \cdot P(P/E) + P(C) \cdot P(P/C)$$

$$= 0,3 \cdot 0,9 + 0,5 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,9 = 0,27 + 0,4 + 0,18 = 0,85$$

b) Para este apartado vamos a necesitar una nueva herramienta del cálculo de probabilidades. Esta herramienta la veremos más adelante, es la que nos ayudará a realizar cálculos a posteriori. Es decir, cálculos en los que el hecho en sí ya se ha producido. Justo como nos ocurre en este problema, ya sabemos que el crédito se ha pagado, ¿cuál es la probabilidad de que se haya destinado a consumo?

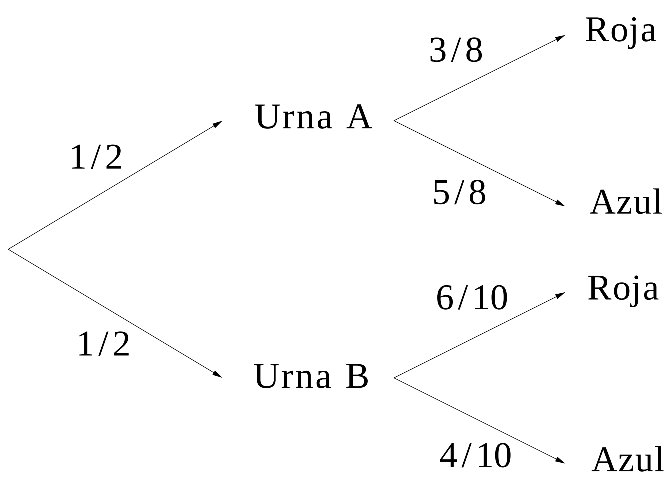
9.8. Diagramas de árbol

Estudiaremos en esta sección, unas experiencias que consisten en la realización consecutiva de dos o más experimentos simples. Estas experiencias reciben el nombre de **experimentos compuestos**.

Llamamos **experimentos compuestos** a los formados por varios experimentos simples que se efectúan consecutivamente

Los diagramas de árbol se fundamentan en el teorema de la probabilidad total. El siguiente ejemplo ilustra perfectamente lo que intentamos formalizar en esta sección de la unidad.

Ejercicio 38. ***(Murcia 2006)*** *Tenemos una urna A con 3 bolas rojas y 5 azules y una urna B con 6 bolas rojas y 4 azules. Si sacamos de ellas una bola al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea roja?*



Solución: Los dos sucesos incompatibles A (sacar de la urna A) y B (sacar de la urna B), cumplen $E = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$, de modo que:

$$P(R) = P(A) \cdot P(R/A) + P(B) \cdot P(R/B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10}$$

Si miramos el diagrama de árbol, la suma anterior es inmediata. Por ello, un diagrama de árbol nos ayuda a visualizar la partición del espacio muestral y a escoger el camino adecuado dentro del mismo.

Sol: 39/80

9.9. Fórmula de Bayes

Retomemos el ejemplo del pago de los créditos que daban para vivienda, empresas y para consumo. Ya dijimos que para resolver el apartado b) íbamos a necesitar una nueva herramienta. Esta herramienta es, por supuesto la **fórmula de Bayes**.

Se trata de, saber *a posteriori*, la probabilidad de un suceso. Es decir, una vez que ha ocurrido, conocer la probabilidad de otro suceso. Otro ejemplo es, si cogemos una bola de entre tres posibles urnas y resulta ser blanca (de entre tres posibles colores), nos pueden pedir la probabilidad de que haya salido de la primera, de la segunda o de la tercera urna.

Estas probabilidades se calculan haciendo uso del teorema de la probabilidad total. Veámoslo recordando el problema propuesto en Madrid en septiembre de 2009.

Ejercicio 39. *¿Cuál es la probabilidad de que un crédito elegido al azar se haya destinado a consumo, sabiendo que se ha pagado?*

Solución: *Como ya ha ocurrido el hecho (ya se ha pagado) me piden probabilidad a posteriori, luego es un claro uso de aplicación del teorema de Bayes:*

$$P(C/P) = \frac{P(C)\cdot P(P/C)}{P(C)\cdot P(P/C) + P(V)\cdot P(P/V) + P(E)\cdot P(P/E)}$$
$$= \frac{P(C)\cdot P(P/C)}{P(P)} = \frac{0,2\cdot 0,9}{0,85} = \frac{0,18}{0,85} = 0,2118$$

9.10. Ejercicios resueltos

1. (**Murcia 2006**) De dos tiradores se sabe que uno de ellos hace dos dianas de cada tres disparos y el otro consigue tres dianas de cada cuatro disparos. Si los dos disparan simultáneamente, calcular:

   a) La probabilidad de que los dos acierten.
   b) La probabilidad de que uno acierte y el otro no.
   c) La probabilidad de que ninguno de los dos acierte.
   d) La probabilidad de que alguno acierte.

   Solución: Sean los sucesos
   • $A =$"que acierte el primer tirador" $\Longrightarrow P(A) = \frac{2}{3}$
   • $B =$"que acierte el segundo tirador" $\Longrightarrow P(B) = \frac{3}{4}$

   a) $P(A\cap B) \underset{\substack{\uparrow \\ independientes}}{=} P(A)\cdot P(B) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{2}$
   b) $P(A\cap \overline{B}) + P(\overline{A}\cap B) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{5}{12}$
   c) $P(\overline{A}\cap\overline{B}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$
   d) $P(A\cup B) = 1 - P(\overline{A}\cap\overline{B}) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$

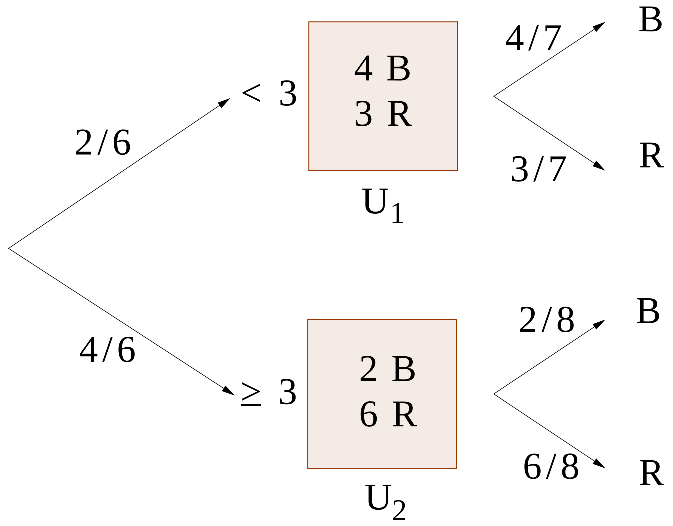
2. (**Castilla-La Mancha, septiembre de 2009**) Se lanza un dado de 6 caras del 1 al 6, si el número que se obtiene es menor que tres, se extrae una bola de la urna uno que contiene 4 bolas blancas y 3 rojas, si el número que se obtiene es mayor o igual a tres, se extrae de la urna dos que contiene 2 bolas blancas y 6 bolas rojas. Calcula la probabilidad de:

a) Habiendo salido un 5, salga bola blanca.

b) Salga un 5 y que la bola sea roja.

Solución:

a) Habiendo sacado un 5, salga bola blanca. Me piden $P(B/5)$. Un diagrama de árbol nos ayudará a situarnos: Así pues: $P(B/5) = 2/8 = 1/4$.



Nota: Ya hemos sacado el 5, no hay que hallar la probabilidad de sacarlo.

b) En este caso, sí hay que hallar la probabilidad de que salga un 5, luego:

$$P(B \cap 5) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{8} = \frac{2}{48} = \frac{1}{24}$$

3. (**Castilla-La Mancha, septiembre de 2009**) Una novela tiene tres partes. La primera tiene 125 páginas y el 85 % de ellas no tiene ningún error. La segunda parte tiene 150 páginas y de ellas el 10 % tiene algún error. El 95 % de las 175 páginas de la tercera parte no tienen error.

   a) Elegida una página de esa novela al azar, ¿cuál será la probabilidad de que tenga algún error?

   b) Elegida una página sin errores, ¿cuál será la probabilidad de que sea de la primera parte?

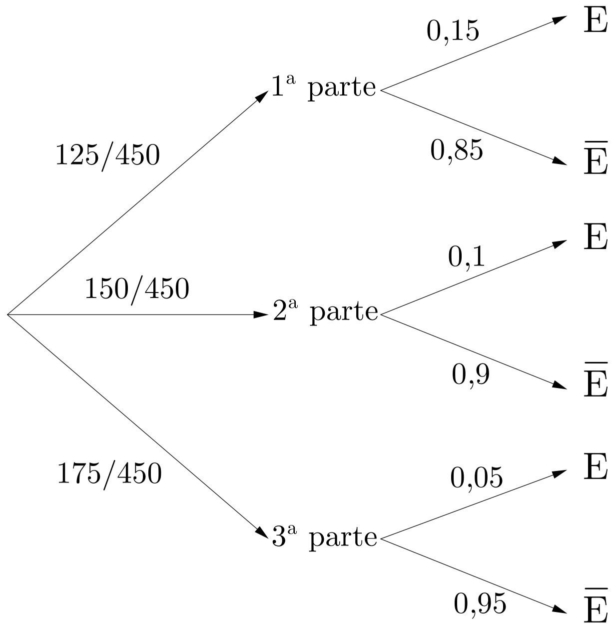
Solución: La novela tiene tres partes:

• La primera tiene 125 páginas y el 85 % de ellas no tiene error.

4. • La segunda parte con 150 páginas y el 10 % tiene algún error.

5. • La tercera parte tiene 175 páginas y el 95 % no tiene error.

Presentamos la situación:



a) Elegida una novela al azar, ¿cuál será la probabilidad de que tenga algún error?

$$P(E) = P(1^{\text{a}}) \cdot P(E/1^{\text{a}}) + P(2^{\text{a}}) \cdot P(E/2^{\text{a}}) + P(3^{\text{a}}) \cdot P(E/3^{\text{a}})$$

$$P(E) = \frac{125}{450} \cdot 0,15 + \frac{150}{450} \cdot 0,1 + \frac{175}{450} \cdot 0,05 = 0,0416 + 0,033 + 0,019 = 0,0944$$

b) Elegida una página sin errores, ¿cuál será la probabilidad de que sea de la primera parte?

$$P(1^{\text{a}}/\overline{E}) = \frac{P(1^{\text{a}}) \cdot P(\overline{E}/1^{\text{a}})}{P(1^{\text{a}}) \cdot P(\overline{E}/1^{\text{a}}) + P(2^{\text{a}}) \cdot P(\overline{E}/2^{\text{a}}) + P(3^{\text{a}}) \cdot P(\overline{E}/3^{\text{a}})}$$

$$P(1^{\text{a}}/\overline{E}) = \frac{\frac{125}{450} \cdot 0,85}{\frac{125}{450} \cdot 0,85 + \frac{150}{450} \cdot 0,9 + \frac{175}{450} \cdot 0,95} = \frac{0,2361}{0,2361 + 0,3 + 0,3694} = 0,2607$$

6. (**Valencia, septiembre de 2009**) Cierto estudio de mercado revela que el 50 % de los entrevistados consume el producto A, el 40 % consume el B y el 25 % no consume ninguno de ellos. Si seleccionamos al azar un individuo de los entrevistados, expresa los siguientes sucesos en función de los sucesos simples: $A = \{\text{consumir A}\}$ y $\{\text{consumir B}\}$ y calcula su probabilidad:

   a) Que consuma los dos productos.
   b) Que consuma uno.
   c) Si sabemos que consume A, que consuma también B.

Solución:$A = \{\text{Consumir A}\}$, $B = \{\text{Consumir B}\}$.

a) $P(A \cap B) = 0,15$.

b) $P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = 0,35 + 0,25 = 0,6$.

c) $P(B/A) = \dfrac{A \cap B}{P(A)} = \dfrac{0,15}{0,5} = 0,3$.

7. (**Valencia, septiembre de 2009**) Se realiza un estudio de mercado sobre la venta de turismos y coches todoterreno y se observa que el 20 % de las compras de todoterreno corresponde a personas que adquieren un coche por primera vez mientras que este porcentaje se duplica en el caso de turismos. Además, el 75 % de las ventas de coches corresponde a turismos.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de elegir una persona que ha comprado un coche y que éste no sea el primero que compra?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que el primer coche adquirido por una persona sea un turismo?

   c) ¿Cuál es la probabilidad de elegir una persona que ha comprado un coche y que éste no sea el primer coche que compra y, además, sea un todoterreno?

Solución: Una tabla de contingencia nos ayudará a plantear el problema:

	1ª vez	2ª vez	
Turismos	40	35	75
Todoterreno	20	5	25
	60	40	100

a) $P = \dfrac{40}{100} = 0,4 \ (40 = 35 + 5)$

b) $P = \dfrac{40}{100} = 0,4$

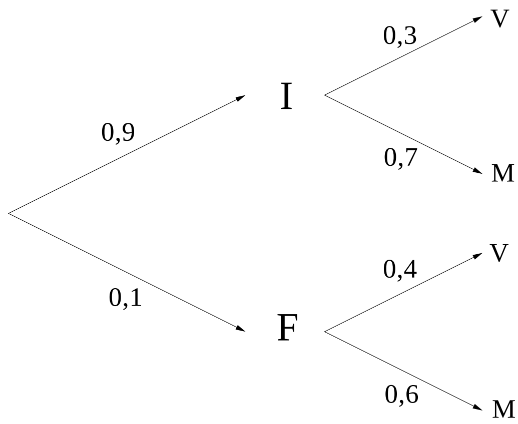
c) $P = \dfrac{5}{100} = 0,05$

8. (**Murcia, junio de 2009**) En un centro escolar los alumnos pueden optar por cursar como lengua extranjera inglés o francés. En un determinado curso el 90 % de los alumnos estudia inglés y el resto francés. El 30 % de los alumnos que estudian inglés son varones. De los que estudian francés, el 40 % son chicos. Elegido un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?

Solución: Llamaremos I = cursan Inglés, F = cursan Francés, V = chicos y M = chicas.

Un diagrama de árbol nos servirá para representar la situación:
Elegido un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que se chica?

$$P(M) = P(I) \cdot P(M/I) + P(F) \cdot P(M/F) = 0,9 \cdot 0,7 + 0,1 \cdot 0,6 = 0,69$$



9. (**Murcia, junio de 2009**) Se estima que la probabilidad de que un jugador de balonmano marque un gol al lanzar un tiro de siete metros es del 75 %. Si en un partido le corresponde lanzar tres de estos tiros, calcular:

   a) La probabilidad de marcar un gol tras realizar los tres lanzamientos.

   b) La probabilidad de marcar dos goles tras realizar los tres lanzamientos.

   c) La probabilidad de marcar tres goles tras realizar los tres lanzamientos.

   d) La probabilidad de marcar sólo en el primer lanzamiento.

   Solución: $P(\text{meter un gol}) = 0,75$ y $P(\text{fallar}) = 0,25$.

   Se tratan de sucesos independientes, pues en cada lanzamiento la probabilidad de meter gol es independiente de las demás.

   a) $P(\text{meter un gol}) =$
   $P(\text{meter un gol en el } 1^{er} \text{ lanzamiento y no meterlo en el } 2^{o} \text{ y no meterlo en el } 3^{o})$
   $+P(\text{no meter un gol en el } 1^{er} \text{ lanzamiento y meterlo en el } 2^{o} \text{ y no meterlo en el } 3^{o})$
   $+P(\text{no meter un gol en el } 1^{er} \text{ lanzamiento ni en el } 2^{o} \text{ y sí en el } 3^{o})$
   $= 0,75 \cdot 0,25 \cdot 0,25 + 0,25 \cdot 0,75 \cdot 0,25 + 0,25 \cdot 0,25 \cdot 0,75 = 0,1406$

   b) Por un razonamiento análogo al apartado anterior:

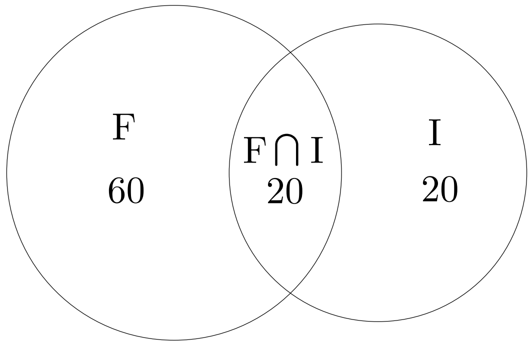
   $$P(\text{meter dos goles}) = 3 \cdot (0,75 \cdot 0,75 \cdot 0,25) = 0,4219$$

   c) De la misma forma:

   $$P(\text{marcar sólo en el primer lanzamiento}) = 0,75 \cdot 0,25 \cdot 0,25 = 0,0469$$

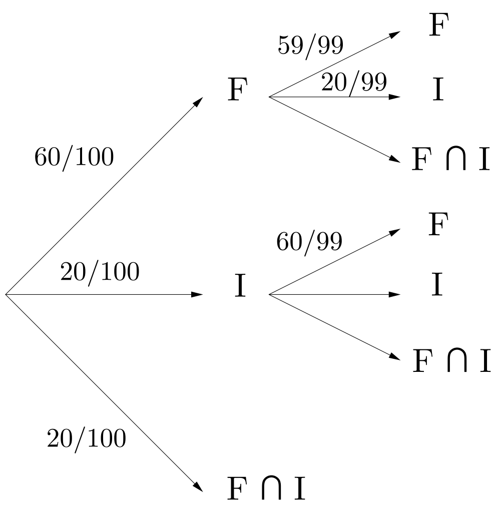
10. (**Murcia, septiembre de 2009**) A un congreso de científicos asisten cien congresistas, de ellos ochenta hablan francés y cuarenta hablan inglés. ¿Cuál es la probabilidad de que dos congresistas elegidos al azar no puedan entenderse sin intérpretes?

    Solución: Llamamos F =hablar Francés, I =hablar Inglés y $F \cap I$ =hablar Inglés y Francés.



La situación será la siguiente:

Plantearemos la situación según un diagrama de árbol:



$$P(\text{no pueden entenderse sin intérpretes}) =$$

$$P(\text{el primero hable Francés y el segundo Inglés})$$
$$+P(\text{el primero hable Inglés y el segundo Francés})$$
$$= \frac{60}{100} + \frac{20}{99} + \frac{20}{100} \cdot \frac{60}{99} = 0,2424$$

11. (**Murcia, septiembre de 2009**) En un I.E.S. se realizan dos competiciones deportivas: baloncesto y fútbol. El 20 % de los alumnos participan en la de baloncesto, de los cuáles el 40 % son de primero de bachillerato y el 30 % participan en la de fútbol, de los cuáles el 25 % son de primer curso de bachillerato. Ningún alumno puede participar en dos competiciones. Elegido al azar un alumno, ¿cuál es la probabilidad de que sea de segundo de bachillerato?

Solución: Sean los siguientes sucesos:
B = jugar al baloncesto, F = jugar al fútbol, 1^o = ser de primero de Bachillerato y

2^o = ser de segundo de Bachillerato. En este caso, se tiene:
$P(B) = 0,2$, $P(F) = 0,3$, $P(1^o/B) = 0,4 \Longrightarrow P(2^o/B) = 0,6$ y $P(1^o/F) = 0,25 \Longrightarrow P(2^o/F) = 0,75$. Por lo tanto:

$$P(2^o) = P(B) \cdot P(2^o/B) + P(F) \cdot P(2^o/F) =', 2 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,75 = 0,345$$

12. (**Madrid, junio de 2009**) Se consideran tres sucesos A, B y C de un experimento aleatorio tales que:
$P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$, $P(C) = 1/4$, $P(A \cup B \cup C) = 2/3$, $P(A \cap B \cap C) = 0$, y $P(A/B) = P(C/A) = 1/2$.

a) Calcúlese $P(C \cap B)$

b) Calcúlese $P(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C})$

Solución:

a)

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Longrightarrow 1/2 = \frac{P(A \cap B)}{1/3} \Longrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$P(C/A) = \frac{C \cap A}{P(A)} \Longrightarrow 1/2 = \frac{P(C \cap A)}{1/4} \Longrightarrow P(C \cap A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

Nos piden $P(C \cap B)$. Sabemos que:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Despejando $P(C \cap B)$:

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - P(B \cap C) + 0$$

Así pues $P(B \cap C) = 3/24 = 1/8$

b) $P(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}) = P(\overline{A \cap B \cap C}) = 1 - P(A \cap B \cap C) = 1 - 0 = 1$

9.11. Ejercicios propuestos

1. (**La Rioja 2006**) En un experimento , se sabe que $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,3$y $P(A/B) = 0,1$. Calcula $P(A \cup B)$

Sol: 0,87

2. (**Madrid 2006**) Una persona cuida de su jardín pero es bastante distraída y se olvida de regarlo a veces. La probabilidad de que se olvide de regar el jardín es $2/3$. El jardín no está en buenas condiciones, así que si se le riega tiene la misma probabilidad de progresar que de estropearse, pero la probabilidad de que progrese si no se le riega es de $0,25$. Si el jardín se ha estropeado, ¿cuál es la probabilidad de que la persona olvidara regarlo?

   Sol: 3/4

3. (**Galicia 2006**) Una investigación de mercado de 800 personas revela los siguientes datos sobre la capacidad de recordar un anuncio televisivo de un producto concreto y la adquisición de dicho producto:

	Recuerdan anuncio	No recuerdan anuncio
Compran producto	160	80
No compran producto	240	320

   a) Calcula la probabilidad de que una persona recuerde el anuncio o que compre el producto.
   Sol: 3/5

   b) Si una persona recuerda el anuncio del producto, ¿qué probabilidad hay de que lo compre?
   Sol: 2/5

   c) ¿El hecho de comprar el producto depende, o no, de recordar el anuncio? Justifica la respuesta.

4. (**Andalucía 2006**) Una fábrica tiene tres cadenas de producción, A, B y C, La cadena A fabrica el 50 % del total de los coches producidos; la B, el 30 %, y la C, el resto.

   La probabilidad de que un coche resulte defectuoso es: en la cadena A, $1/2$; en la B, $1/4$ y en la C, $1/6$. Calcula razonadamente:

   a) La probabilidad de que un coche sea defectuoso y haya sido fabricado por la cadena A.
   Sol: 0,25

   b) La probabilidad de que un coche sea defectuoso.
   Sol: 43/120

   c) Si un coche no es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producido por la cadena C?
   Sol: 20/77

5. (**Castilla-La Mancha 2006**) En una clase de Bachillerato compuesta por el 55 % de chicos y el resto de chicas, practica el balonmano el 40 % de los chicos y una de cada cuatro chicas. Si elegimos al azar un alumno de la clase:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que practique balonmano?
Sol: 0,3325

b) ¿Cuál es la probabilidad de que practique balonmano y sea chica?
Sol: 0,1125

c) Si resulta que no practica balonmano, ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?
Sol: 0,5056

6. (**Castilla-La Mancha 2006**) En una ciudad hay tres lugares de ocio (A, B, C) a los que van habitualmente un grupo de amigos. Las probabilidades de ir un día cualquiera a cada uno de ellos son, respectivamente, $0,4; 0,3$ y $0,6$. Halla la probabilidad de un día cualquiera dicho grupo:

    a) Solamente vaya a uno de los lugares.
    Sol: 0,436

    b) Vaya únicamente a dos de los lugares.
    Sol: 0,324

7. Se toman dos barajas españolas de 40 cartas. Se extrae al azar una carta de la primera baraja y se introduce en la segunda baraja. Se mezclan las cartas de esta segunda baraja y se extrae una carta, que resulta ser de oros. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera carta extraída fuese una espada?

    Sol: 0,2439

8. En un cierto edificio se usan dos ascensores; el primero lo usa el 45 % de los inquilinos y el resto usa el segundo. El porcentaje de fallos del primero es del 5 %, mientras que el del segundo es del 8 %. Si un cierto día un inquilino queda "atrapado" en un ascensor, halla la probabilidad de que haya sido en el primero.

    Sol: 0,3383

9. (**Murcia, septiembre de 2008**) El 70 % de los estudiantes aprueba una asignatura A y un 60 % aprueba otra asignatura B . Sabemos, además, que un 35 % del total aprueba ambas.

    a) Calcular la probabilidad de que un estudiante elegido al azar apruebe la asignatura B , supuesto que ha aprobado la A.

    b) Calcular la probabilidad de que dicho estudiante apruebe la asignatura B , supuesto que no ha aprobado la A.

    Solución:

    a) $P(B/A) = 0,5$

    b) $P(B/\overline{A}) = 5/6$

10. (**Murcia, septiembre de 2008**) Una fábrica produce tornillos niquelados y dorados, siendo el 75 % de los tornillos que produce niquelados. El porcentaje de tornillos defectuosos producidos es del 4 % para los tornillos niquelados y del 5 % para los dorados. Se elige al azar un tornillo y resulta no ser defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que sea niquelado?

    Solución: $P(N_i/\overline{A}) = 0,752$

11. (**Murcia, junio de 2008**) Tres hombres A, B y C disparan a un objetivo. Las probabilidades de que cada uno de ellos alcance el objetivo son 1/6 1/4 , y 1/3 respectivamente. Calcular:

    a) La probabilidad de que todos alcancen el objetivo.
    b) La probabilidad de que ninguno alcance el objetivo.
    c) La probabilidad de que al menos uno de ellos alcance el objetivo.

    Solución:

    a) $P(A \cap B \cap C) = 1/72$.
    b) $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = 5/12$.
    c) $P(\text{al menos uno}) = 7/12$.

12. (**Murcia, junio de 2008**) En una cierta facultad se sabe que el 25 % de los estudiantes suspenden matemáticas, el 15 % suspenden química y el 10 % suspenden matemáticas y química. Se selecciona un estudiante al azar.

    a) Calcular la probabilidad de que el estudiante no suspenda química ni matemáticas.
    b) Si sabemos que el estudiante ha suspendido química, ¿cuál es la probabilidad de que suspenda también matemáticas?

    Solución:

    a) $P = 1/72$.
    b) $P = 2/3$.

13. (**Castilla-La Mancha, septiembre de 2008**) Tenemos una moneda trucada de forma que la probabilidad de salir cara es 1/3, y dos urnas A y B. La urna A contienen 12 bolas blancas, 20 rojas y 5 negras, y la urna B contienen 15 bolas blancas, 18 negras y 4 rojas. Realizar el experimento aleatorio consistente en lanzar la moneda y si sale cara extraemos una bola de la urna A, si sale cruz la extraemos de la urna B.

    a) Halla la probabilidad de extraer una bola blanca.
    b) Hallar la probabilidad de extraer una bola de la urna A que no sea roja.

Solución:

a) $P(\text{bola blanca}) = 0,3784$.

b) $P(A \cap \overline{R}) = 0,2883$.

14. En una determinada comunidad, la población inmigrante es originaria de 3 zonas distintas y repartidas de la siguiente forma: el 30 % del norte de África, el 25 % de Europa del Este y el resto de Iberoamérica. En situación legal están los siguientes: 45 % del norte de África, el 30 % de Europa del Este y el 55 % de Iberoamérica:

    a) Elegimos un inmigrante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que su situación administrativa sea legal?

    b) Elegimos un inmigrante en situación ilegal, ¿cuál será la probabilidad de que venga de Iberoamérica?

Solución:

a) $P(L) = 0,4575$.

b) $P(I/\overline{L}) = 0,3732$.

15. (**Andalucía, junio de 2008**)

    a) Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabemos que $P(A)0,5$, $P(B) = 0,4$ y $P(A \cup B) = 0,8$. Determinar $P(A/B)$.

    b) Sean C y D dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabemos que $P(C) = 0,3$ y $P(D) = 0,8$ y que C y D son independientes. Determinar $P(C \cup D)$

Solución:

a) $P(A/B) = 0,25$.

b) $P(C \cup D) = 0,86$.

16. (**Andalucía, junio de 2008**) Se sabe que el 30 % de los individuos de una población tiene estudios superiores. También se sabe que, de ellos, el 95 % tiene empleo. Además, de la parte de la población que no tiene estudios superiores, el 60 % tiene empleo.

    a) Calcula la probabilidad de que un individuo, elegido al azar, tenga empleo.

    b) Se ha elegido un individuo al azar y tiene empleo. Calcula la probabilidad de que tenga estudios superiores.

Solución:

a) $P = 0,705$.

b) $P = 0,4$.

17. (**Andalucía, septiembre de 2008**) Laura tiene en su monedero 6 monedas francesas, 2 italianas y 4 españolas. Vicente tiene 9 francesas y 3 italianas. Cada uno saca, al azar, una moneda de su monedero y observa la nacionalidad.

   a) Obtenga el espacio muestral asociado.

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que las monedas extraídas no sean de la misma nacionalidad?

   c) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de las monedas extraídas sea francesa?

   Solución:

   a) $E = \{(F,F),(F,I),(I,F),(I,I),(E,F),(E,I)\}$.

   b) $P(\text{distinta nacionalidad}) = 7/12$.

   c) $P(\overline{F}) = 1/8$.

18. (**Andalucía, septiembre de 2008**) De las 150 coches de un concesionario, 90 tienen motor diesel y el resto gasolina. De los coches d e motor diesel, 72 son nuevos y el resto usados, mientras que de los coches con motor gasolina hay el mismo número de coches nuevos que de usados. Se elige, al azar, un coche de dicho concesionario. Calcule la probabilidad de que:

   a) Sea nuevo.

   b) Tenga motor diesel sabiendo que es usado.

   Solución:

   a) $P(\text{Sea nuevo}) = 17/25$.

   b) $P(\text{diesel/es usado}) = 3/8$.

19. (**Madrid, septiembre de 2008**) Se consideran dos actividades de ocio: A =ver la televisión y B =visitar centros comerciales. En una ciudad, la probabilidad de que un adulto practique A es $0,46$, la probabilidad de que practique B es $0,33$ y la probabilidad de que practique A y B es $0,15$.

   a) Se selecciona al azar un adulto de dicha ciudad. ¿Cuál es la probabilidad de que no practique ninguna de las dos actividades ?

   b) Se elige al azar un individuo de entre los que practican alguna de las dos actividades. ¿Cuál es la probabilidad e que practique las dos actividades?

   Solución:

   a) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,3\widehat{6}$.

b) $P(A \cap B/A \cup B) = 0,234$.

20. (**Madrid, septiembre de 2008**) Se supone que las señales que emite un determinado telégrafo son punto y raya y que el telégrafo envía un punto con probabilidad 3/7 y una raya con probabilidad 4/7. Los errores en la transmisión pueden hacer que cuando se envíe un punto se reciba una raya con probabilidad 1/4 y que cuando se envíe una raya se reciba un punto con probabilidad 1/3.

    a) Si se recibe una raya, ¿cuál es la probabilidad de que ese hubiera enviado realmente una raya?

    b) Supongamos que las señales se envían con independencia, ¿cuál es la probabilidad de que se recibe punto-punto se hubiera enviado raya-raya?

    Solución:

    a) $P(raya/raya) = 32/41$.

    b) $P(punto \cap punto/raya \cap raya) = (16/43)^2 = 0,1385$.

21. (**Madrid, junio de 2008**) En un juego consistente en lanzar dos monedas indistinguibles y equilibradas y un dado de seis caras equilibrado, un jugador gana si obtiene dos caras y un número par en el dado, o bien exactamente una cara y un número mayor o igual que cinco en el dado.

    a) Calcúlese la probabilidad de que un jugador gane.

    b) Se sabe que una persona ha ganado. ¿Cuál es la probabilidad que obtuviera dos caras al lanzar las monedas?

    Solución:

    a) $P(\text{ganar}) = P(C \cap C \cap par) + P(C \cap + \cap \geq 5) = 0,29$.

    b) $P(C \cap C \cap par/\text{ganar}) = 0,43$

22. (**Madrid, junio de 2008**) Se consideran dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, tales que

    $$P(A) = \frac{1}{4}, \quad P(B) = \frac{1}{3}, \quad P(A \cup B) = \frac{1}{2}$$

    a) ¿Son A y B sucesos independiente? Razónese.

    b) Calcúlese $P(\overline{A}/\overline{B})$.

    Solución:

    a) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 1/12$. Sí son independientes.

    b) $P(\overline{A}/\overline{B}) = 3/4$.

23. (**Valencia, septiembre de 2008**) Una empresa de automóviles fabrica su modelo "Assegurat" en cuatro factorías distintas; A, B, C y D. La factoría A produce el 40 % de los coches de este modelo con un 5 % de defectuosos, la B produce el 30 % con un 4 % de defectuosos, la C el 20 % con un 3 % de defectuosos y, por último, la factoría D el 10 % restante con un 2 % de defectuosos. Si elegimos un coche del modelo Assegurat al azar, calcula:

    a) La probabilidad de que sea defectuoso.

    b) Si no es defectuoso, la probabilidad que haya sido fabricado en la factoría C,.

    Solución:

    a) $P(D) = 0,04$.

    b) $P(C/\overline{D}) = 0,202$.

Capítulo 10

Distribución normal. Inferencia estadística

10.1. Introducción

Comenzaremos el tema con el estudio de la distribución normal. Veremos como manejar la tabla de la normal $N(0,1)$. A continuación construiremos intervalos de confianza, calculando el error, para terminar con los contrastes de hipótesis.

Todo estará relacionado con la normal $N(0,1)$, por ello, el estudio particular de la misma se hace incuestionable. El manejo de la tabla de la normal $N(0,1)$ es esencial en los problemas de inferencia.

10.2. Distribución normal

10.2.1. Parámetros estadísticos

Nos vamos a centrar en tres parámetros estadísticos, la media, μ, la varianza, σ^2 y la desviación típica, σ, que no es otra que la raíz cuadrada de la varianza.

La media nos da información de la tendencia en un conjunto de datos. Mientras que la varianza y la desviación típica, nos dicen como de dispersos se encuentran los mismos. Estudiemos estos parámetros mediante un ejemplo.

Ejemplo 79. *La siguiente tabla representa la clasificación de* 100 *matrimonios en función del número de hijos.*

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_i	10	19	29	16	10	6	4	2	1	2	1

Para calcular la media aritmética, aplicamos la igualdad:

$$\boxed{\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{N} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_n f_n}{N}}$$

siendo N el número de datos total.

En nuestro caso, $N = 100$ y $n = 11$ puesto que hay 11 resultados distintos, dentro del conjunto de las familias consultadas. La media será pues:

$$\mu = \frac{0 \cdot 10 + 1 \cdot 19 + 2 \cdot 29 + \ldots + 10 \cdot 1}{100} = 2,69$$

Es decir, por término medio, cada familia tiene $2,69$ hijos. Está claro que una familia no puede tener $0,69$ hijos, ahora bien, el dato nos dice que, la tendencia está entre 2 y 3 hijos, estando más cerca del 3 que del 2.

Imaginemos que estas 100 familias fueran una muestra significativa de un barrio de Murcia, es decir, que las 100 familias representan en buena medida a todas las familias del barrio. ¿Sería una buena idea poner una tienda de ropa para niños de hasta 2 años?

Es posible que, aunque las 100 familias representen con exactitud al conjunto total, existe la posibilidad de que, aunque la media sea de $2,69$ hijos, los datos sean muy dispersos. Un ejemplo puede ser, en el que el 80 % tenga entre 0 y 1, y el 20 % tenga más de 6 hijos.

Para medir la dispersión de los datos, utilizaremos la varianza y la desviación típica. Para la varianza tenemos

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 f_i}{N}$$

En nuestro caso, como $\mu = 2,69$, se trata de calcular $(x_i - 2,69)^2 \cdot f_i$ para cada i desde 1 a 11.

Una forma práctica de calcular la varianza, es la que nos proporciona la siguiente igualdad:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 f_i}{N} - \mu^2$$

Calculemos ahora la varianza, utilizando la siguiente tabla:

x_i	f_i	$x_i f_i$	x_i^2	$x_i^2 f_i$
0	10	0	0	0
1	19	19	1	19
2	29	58	4	116
3	16	48	9	144
4	10	40	16	160
5	6	30	25	150
6	4	24	36	144
7	2	14	49	98
8	1	8	64	64
9	2	18	81	162
10	1	10	100	100
	$N = \sum_{i=1}^{n} f_i = 100$	$\sum_{i=1}^{n} x_i f_i = 269$		$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 f_i = 1157$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 f_i}{N} - \mu^2 = \frac{1157}{100} - 2,69^2 = 11,57 - 7,24 = \boxed{4,33}$$

Para calcular la desviación típica, σ, hacemos la raíz cuadrada de la varianza:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{4,33} = \boxed{2,08}$$

Puesto que $\sigma = 2,08$, estamos diciendo que la dispersión es bastante grande. Una diferencia de $2,08$ cuando hablamos de hijos, no es lo mismo que si hablamos del sueldo de los trabajadores de una de las fábricas de Molina de Segura, es este caso, la mayoría de los trabajadores cobraría lo mismo.

10.2.2. Cálculo de probabilidades en una distribución normal $\mathbf{N(0,1)}$

Normalmente, cuando se manejan conjuntos de datos muy grandes, de manera que cada x_i aparece una sola vez en la mayoría de los casos, las tablas estadísticas, como la que hemos utilizado antes, utilizan intervalos, clases, para refinar la información.

Consideremos el experimento aleatorio que consiste en medir la estatura de una persona elegida al azar. Si definimos la variable:

$$X = \text{“estatura de cada persona”}$$

estaremos hablando de una variables de tipo continuo, ya que, los valores que puede tomar X estarán entre otros dos dados.

Si hubiéramos hecho un estudio de la altura sobre 500 personas y hubiéramos agrupado en los intervalos

$[a_i, b_i)$	[1,5;1,6)	[1,6;1,7)	[1,7;1,8)	[1,8;1,9)	[1,9;2,0)
	80	250	80	50	40

podemos calcular la probabilidad de que $1,6 \leq X < 1,7$, mediante la regla de Laplace:

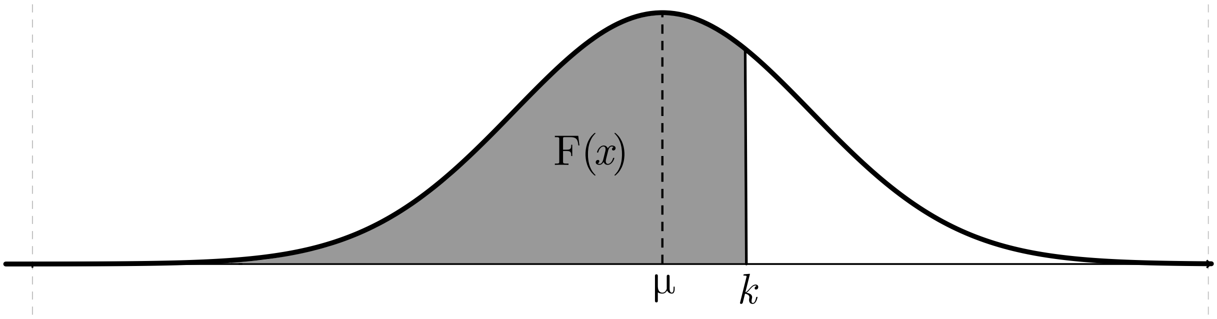
$$P(1,6 \leq X < 1,7) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{250}{500} = 0,5$$

Cuando realizamos un experimento aleatorio, de manera que la muestra sea grande, es decir, que el número de datos sea cuantioso, podemos aproximar el estudio por medio de la **distribución normal**.

Definición 43. *Diremos que una variable continua X sigue una distribución normal cuando*

$$P(X \leq k) = \phi(k)$$

Además, ϕ, nos proporciona el área bajo la campana de Gauss*, el eje de abscisas y la recta $x = k$.*



z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5	0,504	0,508	0,512	0,516	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,591	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,648	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,67	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,695	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,719	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,758	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7652
0,8	0,7881	0,791	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,834	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,877	0,879	0,881	0,893
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,898	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,937	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9561	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,975	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,983	0,9934	0,9838	0,9842	0,9846	0,985	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,989
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9901	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,992	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,994	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,996	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,997	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,998	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,999	0,999
3,1	0,999	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0.9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

La función ϕ nos da el área, hasta $x = k$, además de la probabilidad $P(X \leq k)$. Recordemos que la probabilidad del suceso seguro es 1, luego el área total, bajo la curva, será igual a 1.

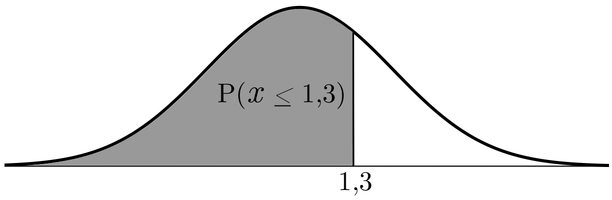
Para calcular $\phi(k)$ bastará con fijarse en el valor adecuado de la tabla de la distribución normal.

Ejemplo 80.

Calculemos $P(X \leq 1,3) = \phi(1,3)$ Según la tabla

1,2	0,8849
1,3	0,9032
1,4	0,9192

$$\phi(1,3) = 0,9032$$



Si en vez de tener k, tenemos $\phi(k)$, ¿cómo podemos hallar k? Nos interesará a menudo, calcular k una vez conocido $\phi(k)$. Veamos un ejemplo de como hacerlo.

Ejemplo 81.

Pongamos que $\phi(k) = 0,9032$. Nos vamos a la tabla, y buscamos dentro de la misma el valor $0,9032$, y como si de unos ejes coordenados se tratara, vemos que

$$k = 1,300 = 1,3$$

1,2	0,8849
1,3	0,9032
1,4	0,9192

Manejo de la normal

Hay ocasiones en las que interesa calcular

$$P(X \geq k), \quad P(a \leq X \leq b)$$

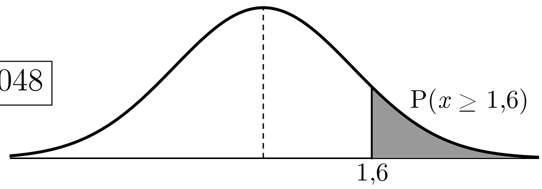
siendo a, b, k **valores positivos**. En estos casos, aplicamos las propiedades de la función de probabilidad:

$$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k) = 1 - \phi(k)$$
$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = \phi(b) - \phi(a)$$

1. $P(X \geq k)$

Para calcular $P(X \geq 1,6)$ aplicamos:

$P(X \geq 1,6) = 1 - P(X \leq 1,6) = 1 - 0,9452 = \boxed{0,048}$

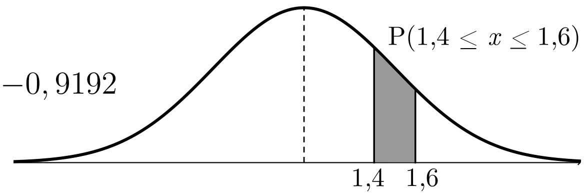


2. $P(a \leq X \leq b)$

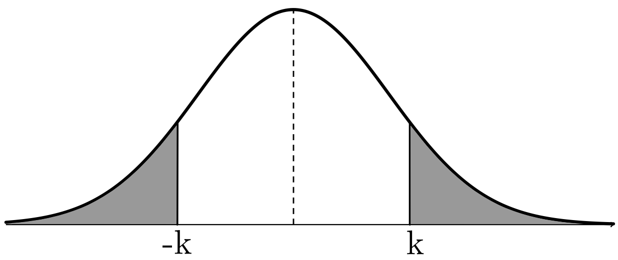
Tomemos $a = 1,4$ y $b = 1,6$:

$P(1,4 \leq X \leq 1,6) = \phi(1,6) - \phi(1,4) = 0,9452 - 0,9192$

$= \boxed{0,026}$



Nos falta el caso $P(X \leq k)$ siendo k un valor **negativo**. En este caso, usaremos el hecho de ser la función representada por la *campana de Gauss*, una función par.

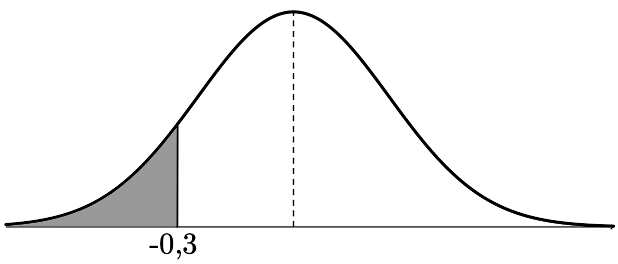


$$\phi(-k) = 1 - \phi(k) \Longleftrightarrow P(X \leq -k) = 1 - P(X \leq k)$$

Ejemplo 82.

Para hallar $P(X \leq -1,3)$ aplicaremos que

$\phi(-1,3) = 1 - \phi(1,3) = 1 - 0,9032 = \boxed{0,0968}$



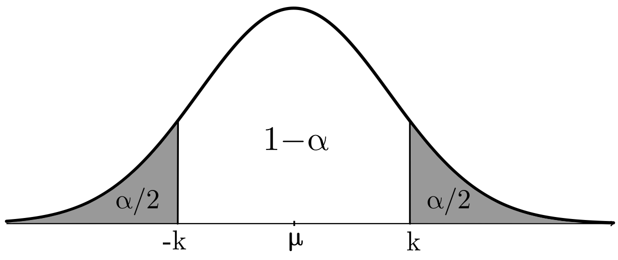
Los valores de k más usados

En esta sección aprenderemos a manejar la tabla, pero con unos valores concretos. Concretamente, buscaremos en la tabla, valores tales que

$$P(-k \leq X \leq k) = 1 - \alpha$$

Pongamos que $P(X \geq k) = \alpha/2$, es decir, la mitad de α. Por la simetría de la función ϕ, tendremos que, $P(X \leq -k) = P(X \geq k) = \alpha/2$. De esta manera, nos aseguramos que

$$P(-k \leq X \leq k) = P(X \leq k) - P(X \leq -k) =$$



$$1 - P(X \geq k) - P(X \geq k) = 1 - \alpha/2 - \alpha/2 = 1 - \alpha$$

A α lo llamaremos **nivel de significación**, y a $1-\alpha$, nivel de confianza. A k lo llamaremos **valor crítico** correspondiente al nivel de confianza $1-\alpha$.

Normalmente, el nivel de confianza, se da en tantos por ciento. Si por ejemplo, queremos que el nivel de confianza sea del 95 %, entonces, $1-\alpha = 0,95$, de donde $\alpha = 0,05$, y luego $\alpha/2 = 0,025$. Si ahora, queremos hallar el valor crítico, correspondiente al nivel del 95 %, tenemos que buscar en la tabla, un valor k, de manera que $P(X \geq k) = 0,025$, o lo que es lo mismo, un valor k, que cumpla $P(X \leq k) = 1 - 0,025 = 0,975$. Para esta probabilidad, el valor que nos da la tabla es $k = 1,96$.

A la hora de buscar en la tabla, hemos tenido que utilizar $\alpha/2$ y no α. Hemos buscado k, que nos diera

$$P(X \leq k) = 1 - \alpha/2$$

Puesto que k y $\alpha/2$ están muy relacionados, en adelante llamaremos a $k = z_{\alpha/2}$, luego $-k = -z_{\alpha/2}$.

Ejercicio 40. *Halla el valor crítico $z_{\alpha/2}$ en cada uno de los casos:*

1. *Para un nivel de confianza del* 99 %
   Indicación: *hay que buscar $z_{\alpha/2}$ que cumpla $P(X \leq z_{\alpha/2}) = 1 - 0,005 = 0,995$, ya que, $\alpha = 0,01$ pues $1 - \alpha = 0,99$.*
   Solución: $z_{\alpha/2} = 2,59$

2. *Para un nivel de confianza del* 98 %
   Solución: $z_{\alpha/2} = 2,33$

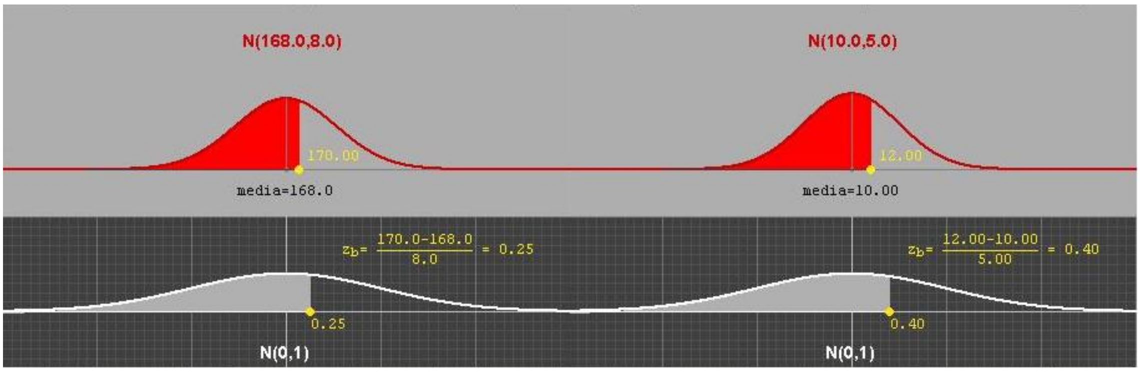
3. *Para un nivel de confianza del* 90 %
   Solución: $z_{\alpha/2} = 1,65$

10.2.3. Variable tipificada

En la mayoría de los casos, la media de una distribución, μ, y su desviación típica, σ, no son 0 y 1. En este caso, diremos que la variable X, en estudio, tiene una distribución $N(\mu, \sigma)$.

La tabla que hemos proporcionado, es una tabla, que nos sirve para calcular $P(X \leq k)$, siempre y cuando la variable X siga una distribución normal $N(0,1)$. ¿Quiere eso decir que la tabla está tan limitada? En caso afirmativo, la tabla sería prácticamente inútil,

pues en la naturaleza no se dan variables de este tipo, es muy difícil que la media sea 0 y que la desviación típica 1. Ahora bien, si en vez de tomar la variable X, tomamos la variable
$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$
estaremos diciendo, que la variable Z, sí que sigue una distribución $N(0,1)$, de lo que se deduce, que para Z nos vale nuestra tabla.



Si ahora queremos calcular $P(X \leq k)$, podemos hacer
$$P(X \leq k) = P(X-\mu \leq k-\mu) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{k-\mu}{\sigma}) = P(Z \leq \frac{k-\mu}{\sigma})$$
Puesto que conocemos $\frac{k-\mu}{\sigma}$ y Z sigue una distribución $N(0,1)$, podemos mirar en nuestra tabla y hallar $P(X \leq k)$.

Si queremos calcular $P(a \leq X \leq b)$, haremos
$$P(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}) = P(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma})$$
Ejemplo 83. *Si la variable X sigue una distribución $N(10,5)$ y queremos calcular $P(X \leq 12)$, haremos:*
$$P(\frac{X-10}{5} \leq \frac{12-10}{5}) = P(Z \leq 0,4) = 0,6554$$
Ejercicio 41. *Consideremos una variable X que se distribuye según una normal $N(40,4)$. Tipifícala y calcula las siguientes probabilidades:*

1. $P(X \leq 45)$
   Solución: $P(X \leq 45) = 0,8944$

2. $P(43 \leq X \leq 48)$
   Solución: $P(43 \leq X \leq 48) = 0,2038$

10.3. Inferencia estadística

10.3.1. Intervalos de confianza

Consideremos una población X de la que sabemos que sigue una cierta distribución (por ejemplo una normal), y de la que se conoce algún parámetro, por ejemplo la desviación típica o la varianza y queremos conocer la media.

Para obtener la información requerida sobre el parámetro μ, se extrae de la población una muestra aleatoria simple (m.a.s.) de tamaño n, que denotaremos por $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

En general, se llama **estimación** a cualquier información sobre el parámetro desconocido μ.

La estimación la podemos dividir en dos grandes grupos:

- **Estimación puntual**, que consiste en construir funciones, que llamaremos estimadores o estadísticos, que nos proporcionarán una aproximación del verdadero valor del parámetro desconocido.
- **Estimación por intervalos**, que consiste en construir un intervalo que contenga el parámetro μ.

Nosotros, nos vamos a dedicar a construir intervalos de confianza. Sin embargo, necesitaremos de un estadístico para la media. Lógicamente, el estadístico que usaremos será:

$$\boxed{\overline{X} = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}}$$

que llamaremos **media muestral**

Es lógico pensar que, si la altura de una población sigue una normal, de varianza conocida y de media desconocida, para estimar dicha media, pensemos en tomar la media de las medidas que hemos conseguido.

Ejemplo 84. *Sea la población X formada por los habitantes de una ciudad española. Pretendemos estudiar el peso medio de la población; para ello extraemos la siguiente muestra:*

$$63,5 \qquad 48, \qquad 43,5 \qquad 65, \qquad 82, \qquad 70,3 \qquad 56,5, \qquad 50$$

La media muestral es

$$\overline{X} = \frac{63,5 + 48 + 43,5 + 65 + 82 + 70,3 + 56,5 + 50}{8} = 59,875$$

El hecho de que sea un buen estimador, o no, dependerá de los datos recogidos.

Intervalos característicos en distribuciones $N(\mu, \sigma)$

Pongamos ahora que X es una variable que sigue una distribución normal $N(\mu, \sigma)$, podemos construir unos intervalos que contengan el porcentaje que queramos de todos los datos. Por ejemplo, si queremos una intervalo en el que nos encontremos el 95 % de los datos, nos hará falta el valor crítico $Z_{\alpha/2}$, siendo α el nivel de significación correspondiente al nivel de confianza del 95 %.

El intervalo se construye de la siguiente manera

$$\left(\mu - z_{\alpha/2} \cdot \sigma,\ \mu + z_{\alpha/2} \cdot \sigma\right)$$

Si queremos un intervalo en el que encontraremos el 95 % de los datos, basta con tomar $z_{\alpha/2} = 1,96$. El intervalo será

$$(\mu - 1,96 \cdot \sigma,\ \mu + 1,96 \cdot \sigma)$$

bastará con sustituir μ y σ por sus valores.

Ejemplo 85. *En una distribución $N(66, 8)$, obtener los intervalos característicos para el 90 %, para el 95 % y para el 99 %.*

Solución:

1. Para el 90 %: $(52,84;\ 79,16)$
2. Para el 95 %: $(50,32;\ 81,68)$
3. Para el 99 %: $(45,4;\ 86,6)$

Intervalos de confianza para la media de una población normal con varianza conocida

Supongamos de nuevo que, tenemos una población X que sigue una distribución normal $N(\mu, \sigma)$, donde la media es desconocida y la varianza σ^2 conocida. Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una muestra aleatoria simple de tamaño n de la población X, un intervalo de confianza (antes característico) para la media μ a un nivel de confianza del $(1-\alpha)$ % viene dado por

$$I = \left(\overline{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde:
$\overline{X}$ denota la media muestral.
σ es la desviación típica poblacional.
n es el tamaño de la muestra.
$Z_{\alpha/2}$ es el valor crítico correspondiente a un nivel de confianza del $(1-\alpha/2)$ %.

Ejemplo 86. *De una población normal $N(\mu, \sigma)$, de la que conocemos su desviación típica $\sigma = 3$, extraemos una muestra aleatoria simple de tamaño 9. Sabiendo que la media muestral es igual a 20, obtener un intervalo de confianza para la media de la población X a un nivel de confianza del 95 %.*

Solución: Según lo dicho, un intervalo de confianza para la media de la población con varianza conocida viene dado por la expresión:

$$I = \left(\overline{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

En nuestro caso:

$$\overline{X} = 20; \quad \sigma = 3; \quad n = 9; \quad 1-\alpha = 0,95; \quad \alpha = 0,05$$

Sólo falta determinar el valor de $Z_{\alpha/2}$; para ello, vamos a la tabla de la normal $N(0,1)$ y buscamos un valor de abscisa que quede a su derecha un área igual a $\alpha/2 = 0,025$. La tabla nos proporciona el valor:

$$Z_{\alpha/2} = 1,96$$

Así pues, el intervalo de confianza pedido es

$$\left(20 - 1,96\frac{3}{\sqrt{9}},\ 20 + 1,96\frac{3}{\sqrt{9}}\right) = (18,04,\ 21,96)$$

Ejemplo 87. *Se sabe que el peso de las jugadoras de la liga de fútbol profesional se distribuye normalmente (según una normal) con desviación típica de* 6 *kg. Para estudiar al peso medio de las jugadoras, se extrae una muestra de tamaño* 8*, obteniendo los siguientes resultados:*

$$63,7; \quad 48; \quad 43,5; \quad 65; \quad 82; \quad 70,3; \quad 56,5; \quad 50$$

Calcula un intervalo de confianza a un nivel de significación del 10 % *para el peso medio de las jugadoras.*

Solución: La diferencia con el ejemplo anterior está, en la forma de dar los datos. Al decir que, construyamos un intervalo de confianza a un nivel de significación del 10 %, lo que nos están dando es $\alpha = 0,10$, luego $\alpha/2 = 0,05$ y así $Z_{\alpha/2} = 1,65$ ya que

$$P(X \geq Z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 0,95$$

Además, en el ejemplo anterior nos proporcionaron $\overline{X}$. En este caso, lo tenemos que hallar:

$$\overline{X} = \frac{63,7 + 48 + 43,5 + 65 + 82 + 70,3 + 56,5 + 50}{8} = 59,87$$

Tenemos entonces que,

$$\overline{X} = 59,87; \quad \sigma = \sqrt{8}; \quad n = 8; \quad z_{\alpha/2} = 1,65$$

El intervalo I de confianza es:

$$I = \left(59,87 - 1,65\frac{6}{\sqrt{8}}, 59,87 + 1,65\frac{6}{\sqrt{8}}\right) = (53,37,\ 63,37)$$

Ejercicio 42. ***(Murcia, 2006)*** *Las medidas de los diámetros de una muestra aleatoria de* 200 *bolas de rodamiento, producidas por una máquina en una semana, tienen una media de* 0,824 *cm y una desviación típica de* 0,042*.*

Halla el intervalo de confianza para la media, en el que estemos seguros al 95 %*, de que se encuentra la mima.*

Solución: $I = (0,818,\ 0,829)$

Ejercicio 43. *Una empresa que fabrica neumáticos estudia la duración media de los mismos. En las pruebas con* 200 *de ellos se encuentró una duración media de* 22 500 *km con una desviación típica de* 3 500 *km*

Halla los límites en los que podemos encontrar la media, al 95 % *de confianza. ¿Cuáles serían estos límites si la prueba se hubiese hecho con* 800 *neumáticos y hubiesen dado la misma media y desviación típica?*

Solución: $I_{200} = (22015,\ 22985)$, $I_{800} = (22257,47,\ 22742,53)$

Ejercicio 44. ***(Murcia, 2005)*** *Una muestra aleatoria simple de 25 estudiantes responde a un test de inteligencia, obteniendo una media de* 100 *puntos. Se sabe por experiencia que la variable "inteligencia de todos los estudiantes" es normal con una desviación típica igual a* 10*, pero se desconoce la media. ¿Entre qué limites se hallará la verdadera inteligencia media de todos los estudiantes, con un nivel de confianza de* 0,99*?*

Ejercicio 45. ***(Murcia, 2004)*** *Se quiere conocer la permanencia media de pacientes en un hospital, con el fin de estudiar una posible ampliación del mismo. Se tienen datos referidos a la estancia, expresada en días, de* 800 *pacientes, obteniéndose los siguientes resultados:* $\overline{x} = 8{,}1$ *días;* $s = 9$ *días. Se pide obtener un intervalo de confianza del* 95 % *para la estancia media.*

Para empezar, $\overline{x} = \overline{X}$ y $s = \sigma$

Error admisible y tamaño de la muestra

Si nos fijamos en el intervalo de confianza para la media, de una variable X:

$$I = \left(\overline{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Lo que estamos diciendo, es que, $\overline{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, como mucho, el error que cometemos es de

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Esta igualdad se utilizará para calcular el tamaño que debe tener una muestra.

Ejemplo 88. *De la duración de un proceso, sabemos que* $\sigma = 0,6$ *s. ¿Cuál es el número de medidas que hay que realizar para que, con un* 99 % *de confianza, el error de la estimación no exceda de* $0,1$ *s?*

Solución: Si el nivel de confianza que nos piden es 99 %, $\alpha = 0,01$, de donde $\alpha/2 = 0,005$, $Z_{\alpha/2} = 2,575$.
Para obtener n, despejamos de la igualdad

$$0,1 = 2,575 \cdot \frac{0,5}{\sqrt{n}} \Longrightarrow \sqrt{n} = \frac{2,575 \cdot 0,5}{0,1} = 12,875 \Longrightarrow n = 165,76$$

Se deben realizar 166 medidas (el menor entero mayor que $165,76$)

Ejercicio 46. ***(Andalucía, 1999)*** *La media de edad de los alumnos que se presentan a las prueba de acceso a la Universidad es de* $18,1$ *años y la desviación típica* $0,6$ *años.*

1. *De los alumnos anteriores se elige al azar una muestra de* 100 *alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que la media de la edad de la muestra esté comprendida entre* $17,9$ *y* $18,2$ *años?*
   (Solución: $0,9521$*)*

2. *¿Qué tamaño debe tener una muestra de dicha población para que su media esté comprendida entre* $17,9$ *y* $18,3$ *años con una confianza del* $99,5\,\%$*?*
   (Solución: 72 *alumnos)*

Ejercicio 47. ***(Castilla-La Mancha, 1998)****En una empresa de exportación de cítricos se investiga el peso medio de cierta variedad de naranjas. Se admite un error máximo de* 10 *gramos, con una confianza del* $95\,\%$*. Se sabe por estudios de otros años que el peso medio se distribuye normalmente siendo la desviación típica de* 60 *gramos. ¿Cuál ha de ser el tamaño mínimo de la muestra que se va a elegir? ¿Y si se desea una confianza del* $99\,\%$*?*

(Solución: *Para el* $95\,\%$ *basta con* 139 *naranjas, y para el* $99\,\%$ *hemos de tomar una muestra de al menos* 240 *naranjas.)*

10.3.2. Contraste de hipótesis

Comenzaremos proponiendo uno de los problemas con lo que nos vamos a encontrar en esta sección.

Ejemplo 89. *Una empresa fabrica bombillas, siguiendo la duración media una distribución normal* $N(\mu,\ 100)$*. Elegida una muestra aleatoria simple de* 64 *bombillas, se comprobó que su duración media era de* $1\,470$ *horas. A la vista de estos datos, ¿se puede aceptar con un nivel de significación del* $5\,\%$ *que la duración media de las bombillas es de* $1\,500$ *horas?*

Necesitamos unas definiciones previas.

Sea X una población de la que conocemos la varianza. Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ una muestra aleatoria simple de tamaño n, de la población.

En estas condiciones:

- Se llama **hipótesis nula**, que denotaremos por H_0, a la hipótesis que queremos contrastar, y es por tanto la que se acepta o se rechaza.
- Se llama **hipótesis alternativa**, denotada por H_1, a la hipótesis que se sitúa frente a la hipótesis nula, de forma que si rechazamos H_0, se acepta H_1.
- El **estadístico del contraste** será el que basaremos en la media muestral $\overline{X}$.
- Se llama **región crítica** al conjunto de valores del estadístico de contraste que nos llevan a rechazar la hipótesis nula. La **región de aceptación** es el conjunto de valores que nos llevan a aceptar la hipótesis nula.

- Los puntos frontera entre la región crítica y la de aceptación, se llaman **valores críticos**.

Según las condiciones del ejemplo anterior, disponemos de una población normal $N(\mu,\ 100)$ de media desconocida y desviación típica $\sigma = 100$
De la población conocemos una muestra aleatoria simple de tamaño 64, con media muestral de 1470.
La hipótesis nula es $H_0 : \mu = 1\,500$; y la hipótesis alternativa $H_1 : \mu \neq 1\,500$.

Se suele escribir de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l} H_0 : \mu = 1\,500 \\ H_1 : \mu \neq 1\,500 \end{array}$$

Estadístico de contraste y tipos de hipótesis

El estadístico de contraste que manejaremos será

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

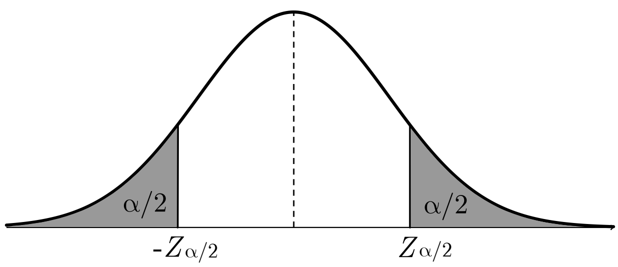
siendo μ_0 el valor la media que queremos contrastar.

Una vez que conocemos el valor de T, construiremos la región crítica y si T cae dentro de la misma, rechazaremos la hipótesis nula, H_0, y luego aceptamos la hipótesis alternativa, H_1.

La región crítica dependerá del tipo de hipótesis. Los tipos de contraste y su región son:

$H1$ **Hipótesis simples**

$$\begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{array} \longrightarrow \textbf{contraste bilateral o de dos colas}$$



La región crítica es la que aparece sombreada en la figura. Está formada por los intervalos $(-\infty,\ -Z_{\alpha/2})$, $(Z_{\alpha/2},\ +\infty)$. La región crítica para un test de hipótesis simple para un nivel de confianza del $(1-\alpha)\,\%$ es

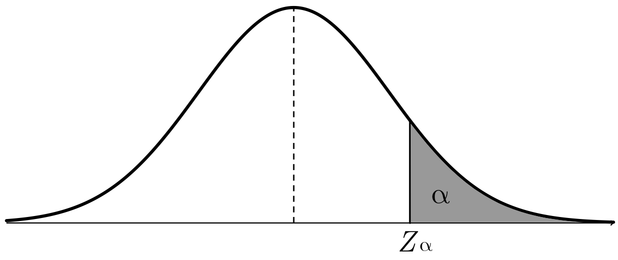
$$\boxed{RC_{HS} = (-\infty,\ -Z_{\alpha/2}) \cup (z_{\alpha/2},\ +\infty)}$$

Lógicamente, la región de aceptación será:

$$\boxed{RA_{HS} = (-Z_{\alpha/2},\ Z_{\alpha/2})}$$

$H2$ **Hipótesis compuestas**

$$\begin{array}{l} H_0 : \mu \leq \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{array} \longrightarrow \textbf{contraste unilateral o de una cola}$$



Como antes la región crítica, es la que aparece en la figura sombreada. En este caso, sólo tenemos un intervalo, que para un test de hipótesis compuesta, siendo $H_0 : \mu \leq \mu_0$, a un nivel de confianza del $(1 - \alpha)\,\%$ es:

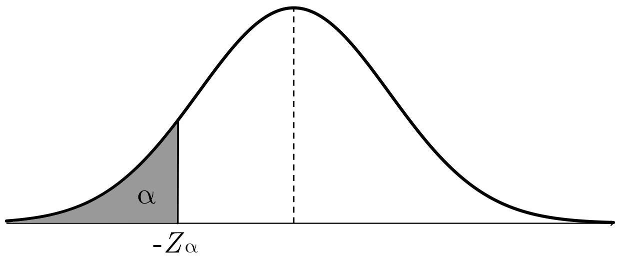
$$\boxed{RC_{HC1} = (z_\alpha,\ +\infty)}$$

La región de aceptación será:

$$\boxed{RA_{HC1} = (-\infty,\ -Z_\alpha)}$$

$H3$ **Hipótesis compuestas**

$$\begin{array}{l} H_0 : \mu \geq \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{array} \longrightarrow \textbf{contraste unilateral}$$



Si $H_0 : \mu \geq \mu_0$, a un nivel de confianza del $(1 - \alpha)\,\%$ tenemos:

$$\boxed{RC_{HC2} = (-\infty,\ -Z_\alpha)}$$

La región de aceptación será:

$$\boxed{RA_{HC1} = (Z_\alpha, +\infty)}$$

Problemas sobre contrastes de hipótesis

1. Una empresa fabrica bombillas, siguiendo la duración media una distribución normal $N(\mu,\ 100)$. Elegida una muestra aleatoria simple de 64 bombillas, se comprobó que su duración media era de 1 470 horas. A la vista de estos datos, ¿se puede aceptar con un nivel de significación del 5 % que la duración media de las bombillas es de 1 500 horas?

   Solución: Lo primero es plantear el contraste:

   $$H_0 : \mu = 1\,500$$
   $$H_1 : \mu \neq 1\,500$$

   La pregunta es, si se puede aceptar que la duración media sea, y no que sea menor o mayor.

   Por otro lado, como el contraste es bilateral, por no haber desigualdades, la región crítica es

   $$RC_{HS} = (-\infty,\ -Z_{\alpha/2}) \cup (Z_{\alpha/2},\ +\infty) = (-\infty,\ -1,96) \cup (1,96,\ +\infty)$$

   La región de aceptación es

   $$RA_{HS} = (-Z_{\alpha/2},\ Z_{\alpha/2}) = (-1,96,\ 1,96)$$

   Sólo nos falta comprobar si el estadístico T cae dentro o fuera de RC_{HS}:

   $$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{1470 - 1\,500}{100/\sqrt{64}} = -2,4$$

   Comprobamos que $-2,4 \in (-\infty,\ -1,96) \cup (1,96,\ +\infty)$.

   Tomando la región de aceptación, comprobamos que $-2,4 \neq (-1,96,\ 1,96)$

   Concluimos rechazando la hipótesis nula. Podemos asegurar, que con estos datos, la media no es $\mu = 1\,500$

2. La experiencia ha demostrado que la media de resistencia a la rotura de una determinada clase de hilo es de $9,72$ con una desviación de $1,40$. Recientemente, una muestra de 36 piezas de hilo dieron una resistencia media de $8,93$. ¿Se puede deducir al nivel de significación del $0,05$ que el hilo es ahora peor? Y si el nivel de significación es $0,01$, ¿qué conclusión se tomaría?

   Solución: Planteamos el contraste:

   $$H_0 : \mu = 9,72$$
   $$H_1 : \mu < 9,72$$

Parece un contraste bilateral, cuando en realidad lo es unilateral. Nos tenemos que fijar en la hipótesis alternativa, ya que nos preguntan si el hilo es pero, es decir, si la media es menor que la que se suponía por la experiencia.

El contraste es pues unilateral o de una cola, siendo $z_\alpha = 1,65$, pues $\alpha = 0,05$. La región crítica es:

$$RC_{HC2} = (-\infty,\ -Z_\alpha) = (-\infty,\ -1,65)$$

El estadístico nos proporciona el siguiente valor:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{8,93 - 9,72}{1,40/\sqrt{36}} = -3,43$$

Como $T = -3,43 \in (-\infty,\ -1,65)$, concluimos rechazando la hipótesis nula. El hilo es ahora peor.

Al nivel de significación del $0,001$, la conclusión final sería la misma que la anterior, ya que, ampliamos la región crítica.

3. (**Murcia, 2006**) Un estudio realizado en el ámbito de la Unión Europea concluye que la edad de los propietarios de un automóvil “Mercedes” en el momento de su adquisición tiene un comportamiento Normal con media 38 años y varianza 16. Un concesionario de dicha marca, instalado recientemente en España, ha vendido sólo 150 vehículos y ha comprobado que la edad media de sus clientes es de 38,3 años. Aceptando para los clientes españoles la varianza obtenida para los clientes europeos, ¿se puede aceptar que la edad media al adquirir un vehículo de esa marca es la misma en España que en Europa, para un nivel de significación del 5 %?

   Solución: Planteamos un contraste de hipótesis bilateral para la media:

$$H_0 : \mu = 38$$
$$H_1 : \mu \neq 38$$

   La región crítica es

$$RC_{HS} = (-\infty,\ -Z_{\alpha/2}) \cup (Z_{\alpha/2},\ +\infty) = (-\infty,\ -1,96) \cup (1,96,\ +\infty)$$

   Es estadístico nos proporciona el valor

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{38,3 - 38}{4/\sqrt{150}} = 0,92$$

   El estadístico cae fuera de la región crítica y dentro de la región de aceptación, pues $0,92 \in (-1,96,\ 1,96)$.

   Concluimos que la edad media para adquirir “Mercedes” en España es la misma que en Europa.

4. El peso de los pollos de una granja es normal con media $2,6$ kg y desviación típica $0,5$. Se experimenta un nuevo tipo de alimentación con 50 crías. Cuando se hacen adultos, se les pesa y se obtiene una media de $2,78$ kg. Vamos a contrastar la hipótesis de que el peso medio de la población no aumenta, con un nivel de significación del 1 %.

Solución: El contraste es

$$H_0 : \mu \leq 2,6$$
$$H_1 : \mu > 2,6$$

La región de aceptación es $(-\infty,\ Z_\alpha)$ pues $\alpha = 0,01$ y luego $\alpha/2 = 0,005$. Recordemos que Z_α es aquel que cumple $P(X \leq Z_\alpha) = 1 - 0,01 = 0,99$. En nuestro caso $Z_{\alpha=2,33}$.
La región de aceptación es $(-\infty,\ 2,33)$

El estadístico nos proporciona el valor

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{2,78 - 2,6}{0,5/\sqrt{50}} = 2,54$$

$T = 2,54 \notin (-\infty,\ 2,33)$. Concluimos rechazando la hipótesis nula y se acepta la H_1. La población aumentará de peso con el nuevo tipo de alimentación, con un nivel de significación de $0,01$.

10.4. Ejercicios resueltos

1. (**Castilla-La Mancha, septiembre de 2009**) La varianza del número de horas diarias que duermen los estudiantes de un IES es de 3 horas. Se considera una muestra aleatoria de 40 estudiantes de ese IES que revela una media de sueño de 7 horas. Si el número de horas de sueño sigue una distribución normal:

   a) Encontrar el intervalo de confianza al 97 % para el número medio de horas de sueño de todos los estudiantes del centro.

   b) Interpretar el significado del intervalo obtenido.

   Solución:

   a) Los datos del problema son los siguientes: $\sigma = 3$, $n = 40$, $\overline{X} = 7$ y $N(\mu, 3)$.
   Un intervalo de confianza al 97 % nos proporciona un nivel de significación de $\alpha = 0,03$, luego $\dfrac{\alpha}{2} = 0,015$. Nos falta entonces encontrar el valor $Z_{\alpha/2}$, que cumple $P(X \geq Z_{\alpha/2}) = \alpha/2$ (o lo que es lo mismo, $P(X \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$).
   Según la tabla de la distribución normal $N(0,1)$, el valor que buscamos es $z_{\alpha/2} = 2,17$. Así pues, el intervalo de confianza sigue la expresión:

$$\left(\overline{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Sustituyendo por los datos del problema:

$$IC = \left(7 - 2,17 \cdot \frac{3}{\sqrt{40}}, 7 + 2,17 \cdot \frac{3}{\sqrt{40}}\right) = (5,9707; 8,0293)$$

Así pues, un intervalo de confianza al 97 % de fiabilidad para la media es precisamente:

$$\mu \in (5,9707; 8,0293)$$

b) Interpretemos el resultado: significa que, si tomamos una muestra de 40 alumnos de la población, el 97 % de los intervalos correspondientes contendrá a la media de la población, que en este caso corresponde a las horas de sueño de los estudiantes de dicho instituto, y el 3 % de los intervalos restantes no contendrá a la media de la población.

2. (**Madrid, septiembre de 2009**) Se supone que la cantidad de agua (en litros) recogidos cada día en una estación meteorológica, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica, $\sigma = 2$. Se elige una muestra aleatoria simple y se obtienen las siguientes cantidades de agua recogidas cada día en litros:

$$9,1;\ 4,9;\ 7,3;\ 2,8;\ 55;\ 6,0;\ 3,7;\ 8,6;\ 7,6$$

a) Determinar un intervalo de confianza para la cantidad media de agua recogida cada día en la estación, con un grado de confianza del 95 %.

b) Calcular el tamaño muestral mínimo necesario para que al estimar la media de agua recogida cada día en la estación meteorológica mediante la media de dicha muestra, la diferencia en valor absoluto entre ambos sea inferior a un litro, con un grado de confianza del 98 %.

Solución

a) Tenemos que $X \sim N(\mu, 2)$. El intervalo de confianza al 95 % de confianza

$$\left(\overline{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

siendo $Z_{\alpha/2} = 1,96$ y $\overline{X} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{60}{10} = 6$

b) Al 98 % le corresponde un nivel de confianza del $0,02 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,325$.
La amplitud del intervalo es 1, luego

$$Error = \frac{Amplitud}{2} = \frac{1}{2} \Longrightarrow n = \left(\frac{Z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{Error}\right)^2 = \left(\frac{2,325 \cdot 2}{1/2}\right)^2 = 86,4 \sim 87$$

Así, podemos afirmar que el tamaño muestral mínimo debe ser de 87 litros.

3. (**Murcia, junio de 2009**) El número de accidentes mortales en una ciudad es, en promedio, de doce mensuales. Tras una campaña de señalización y adecentamiento de las vías urbanas, se contabilizaron en seis meses sucesivos 8, 11, 9, 7, 10 y 9 accidentes mortales. Suponiendo que el número de accidentes mortales en dicha

ciudad tiene una distribución normal con una desviación típica igual a 1,3 ¿podemos afirmar que la campaña fue efectiva con un nivel de significación de 0,01?

Solución: X es el número de accidentes mortales. Luego $\overline{X} \sim 12$(mensuales), y tras una campaña, se obtienen en seis meses: 8, 11, 9, 7, 10 y 9 accidentes. $X \sim N(\mu; 1,3)$

¿Podemos afirmar que la campaña fue efectiva con un nivel de significación de $0,01$?

Nos piden que contrastemos la hipótesis inicial:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 12 \\ H_1 : \mu < 12 \end{cases}$$

Para que la campaña sea efectiva, necesitamos que el promedio de accidentes mortales sea menor que 12, es decir, que disminuya, luego se trata de un contraste unilateral.

La prueba es unilateral y para el nivel de significación $\alpha = 0,01$ le corresponde un valor crítico de $Z_\alpha = 2,33$ que separa las zonas de aceptación y rechazo. EL valor tipificado (estadístico) es precisamente:$T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ y la región de rechazo es $R = (-\infty, -Z_\alpha)$

$T = \dfrac{9-12}{1,3/\sqrt{6}} = -5,6526$; siendo $\overline{X} = \dfrac{\sum X_i}{n} = 9$.

Como $-5,6526 \in (-\infty, -2,33)$ se rechaza H_0 (el estadístico pertenece a la región de rechazo).

Podemos afirmar que la campaña de señalización y adecentamiento ha sido efectiva.

4. Se sabe que el peso de los recién nacidos sigue una distribución normal con media desconocida y desviación típica igual a $0,75$ kilogramos. Si en una muestra aleatoria simple de cien de ellos se obtiene una media muestral de 3 kilogramos, calcular un intervalo de confianza para la media poblacional que presente una confianza del 95 %.

   Solución: X en este caso es el peso de los recién nacidos. $X \sim N(\mu; 0,75)$, $n = 100$ y $\overline{X} = 3$.

   Nos piden el intervalo de confianza al 95 % de fiabilidad. Para ello, tendremos un nivel de significación de $0,05$, al que le corresponde $Z_{\alpha/2} = 1,96$.

$$IC = \left(\overline{X} - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(3 - 1,96 \cdot \frac{0,75}{\sqrt{100}}, 3 + 1,96 \cdot \frac{0,75}{\sqrt{100}}\right)$$

   $\Longrightarrow IC = (2,855;\ 3,147)$

   Así un intervalo de confianza al 95 % para el peso medio de los recién nacidos de la población será: $IC = (2,853; 3,147)$

5. El promedio de las puntuaciones obtenidas en historia por un número elevado de alumnos es de $6,50$ puntos. Un determinado curso se examinaron cincuenta alumnos obteniendo una puntuación promedio de $7,25$ puntos. Suponiendo que la variable puntuación obtenida en historia es una normal con desviación típica igual a uno, ¿podemos afirmar con un nivel de significación de $0,05$ que variaron las calificaciones?

Solución: Se trata de un contraste de hipótesis. Nos hacemos la pregunta ¿$\mu = 6,5$? Sabemos que $n = 50$, $\overline{X} = 7,25$ puntos y $N(\mu, 1)$.
Nos piden que contrastemos la hipótesis inicial $H_0 = 6,5$ frente a la hipótesis alternativa $H_1 \neq 1$. Se trata pues de un contraste bilateral: $\begin{cases} H_0 : \mu = 6,5 \\ H_1 : \mu \neq 6,5 \end{cases}$

Para un nivel de significación de $0,05$ en un contraste bilateral le corresponde un valor crítico de $Z_{\alpha/2} = 1,96$, valor que genera dos zonas de rechazo y una de aceptación:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{7,25 - 6,5}{1/\sqrt{50}} = 5,303$$

$$RC = (-\infty, -1,96) \cup (1,96, +\infty)$$

y como $5,303 \in (1,96, +\infty)$, esto implica que rechazamos H_0.
Por lo tanto, al rechazar la hipótesis inicial de que se mantiene el promedio de puntuaciones, podemos afirmar con una confianza del 95 % que variarán las calificaciones.

6. Una muestra aleatoria simple de veinticinco estudiantes responden a una prueba de inteligencia espacial, obteniendo una media de cien puntos. Se sabe que la variable inteligencia espacial de todos los alumnos es una variable normal con una desviación típica igual a diez, pero se desconoce la media. ¿Entre qué límites se hallará la verdadera inteligencia espacial media de todos los alumnos, con un nivel de confianza de $0,99$?

   Solución: $n = 25$ estudiantes, $\overline{X} = 100$ y $X \sim N(\mu, 10)$. ¿Entre qué limites se hallará la verdadera inteligencia espacial de todos los alumnos con un nivel de confianza de $0,99$?
   A $\alpha = 0,01$ le corresponde $Z_{\alpha/2} = 2,58$.

$$IC = \left(\overline{X} - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(100 - 2,58 \cdot \frac{10}{\sqrt{25}}, 100 + 2,58 \cdot \frac{10}{\sqrt{25}}\right)$$

   $\Longrightarrow IC = (94,84; 105,16)$. Por lo tanto $\mu \in (94,84; 105,16)$ con un nivel de confianza del 99 %.

7. El gasto que hacen las familias españolas en regalos de navidad sigue una ley normal de media desconocida y desviación típica 84 euros. Para estimar esta media se seleccionó una muestra aleatoria y se obtuvo el intervalo de confianza $(509,41; 539,79)$, con un nivel de confianza del 97 %.

   a) ¿Cuál ha sido la media de la muestra escogida?

   b) ¿Qué tamaño tenía la muestra?

   Solución:

   a) $X \sim N(\mu, 84)$
   En este ejercicio, nos piden que, teniendo ya el intervalo de confianza, encontremos la media muestral escogida para dicho intervalo. Para ello, seguiremos las

mismas pautas que en ejercicios anteriores y llegado el momento se despejará la media.
Un intervalo de confianza al 97 % nos proporciona un nivel de significación de $\alpha = 0,03$, de donde $\alpha/2 = 0,015$.
Para encontrar el valor crítico, buscamos en la tabla tal y como se han hecho en ejercicios anteriores y sigue la expresión

$$\left(\overline{X} - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Así pues:

$$\left(\overline{X} - 2,17 \cdot \frac{84}{\sqrt{n}}, \overline{X} + 2,17 \cdot \frac{84}{\sqrt{n}}\right) = (509,41; 539,79)$$

Para calcular $\overline{X}$ y n resolveremos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \overline{X} - 2,17 \cdot \dfrac{84}{\sqrt{n}} = 509,41 \\ \overline{X} + 2,17 \cdot \dfrac{84}{\sqrt{n}} = 539,79 \end{cases}$$

Obtenemos $\overline{X} = 524,6$ y $n = 144$

10.5. Ejercicios propuestos

1. (**Madrid, septiembre de 2008**) Se supone que la calificación en Matemáticas obtenida por los alumnos de una cierta clase es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 1,5 puntos. Se elige una muestra aleatoria simple de tamaño 10 y se obtiene una suma de calificaciones igual a 59,5 puntos.

   a) Determínese un intervalo de confianza al 95 % para la calificación media de la clase.
   Solución: $\mu \in (5,02;\ 6,87)$

   b) ¿Qué tamaño ha de tener la muestra para que el error máximo de la estimación sea de 0,5 puntos, con el nivel de confianza del 95 %?
   Solución: 35 alumnos.

2. (**Madrid, septiembre de 2008**) La duración de la vida de una determinada especie de tortuga se supone que es una variable aleatoria, con distribución normal de desviación típica igual a 10 años. Se toma una muestra aleatoria, con distribución normal de desviación típica igual a 10 años. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 tortugas y se obtienen las siguientes duraciones, en años:

   $$46;\ 38;\ 59;\ 29;\ 34;\ 32;\ 38;\ 21;\ 44;\ 34$$

   a) Determínese un intervalo de confianza al 95 % para la vida media de dicha especie de tortugas.
   Solución: $\mu \in (31,3;\ 43,7)$

b) ¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra observada para que el error de la estimación de la vida media no sea superior a 5 años, con un nivel de confianza del 90 %?
Solución: 11 tortugas.

3. (**Castilla-La Mancha, septiembre de 2008**) Tras múltiples observaciones se ha constatado que le número de pulsaciones de los deportistas entre 20 y 25 años se distribuye normalmente con una desviación típica de 9 pulsaciones. Si una muestra de 100 deportistas de esa edad presenta una media de 64 pulsaciones:

   a) Encontrar el intervalo de confianza al 97 % para la media de pulsaciones de todos los deportistas de esa edad.
   Solución: $\mu \in (62,047;\ 65,953)$

   b) Interpretar el significado del intervalo obtenido.
   Solución: Significa que, si tomamos una muestra de 100 deportistas el 97 % de los intervalos correspondientes contendrá a la media de pulsaciones y el 3 % de los intervalos restantes no la contendrá.

4. (**Murcia, junio de 2008**) El peso medio de los paquetes de café puestos a la venta por cierta casa comercial es supuestamente de 1 kg. Para comprobar esta suposición, elegimos una muestra aleatoria simple de 100 paquetes y encontramos que su peso medio es de $0,978$ kg. Suponiendo que la distribución del peso de los paquetes de café es normal y la desviación típica de la población es de $0,10$ kg. ¿Es compatible este resultado con la hipótesis nula $H_0 : \mu = 1$ con un nivel de significación de $0,05$? ¿Y con un nivel de significación de $0,01$?
   Solución: Rechazamos para $\alpha = 0,05$. Aceptamos para $\alpha = 0,01$.

5. (**Murcia, junio de 2008**) La puntuación media obtenida por una muestra aleatoria simple de 81 alumnos de secundaria en el examen de cierta asignatura ha sido 25 puntos. Suponiendo que la distribución de las puntuaciones de la población es normal con desviación típica igual a $20,25$ puntos, calcular el intervalo de confianza para la media de la población con un nivel de significación de $0,01$.
   Solución: $\mu \in (19,21;\ 30,79)$

6. (**Castilla-La Mancha, junio de 2008**) Para efectuar un control de calidad sobre la duración en horas de un modelo de juguetes electrónicos se elige una muestra aleatoria de 36 juguetes de ese modelo obteniéndose una duración media de 97 horas. Sabiendo que la duración de los juguetes electrónicos de ese modelo se distribuye normalmente con una desviación típica de 10 horas:

   a) Encontrar el intervalo de confianza al $99,2$ % para la duración media de los juguetes electrónicos de ese modelo.
   Solución: $\mu \in (92,58;\ 101,42)$

   b) Interpretar el significado del intervalo obtenido.
   Solución: Significa que si tomamos un número de muestra de 36 juguetes, el $99,2$ % de los intervalos correspondientes contendrá a la media de la población, en este caso correspondiente a la duración en horas de juguetes electrónicos, y el $0,08$ % de los intervalos restantes no los contendrá.

7. (**Madrid, junio de 2008**) EL tiempo en minutos dedicado cada día a escuchar música por los estudiantes de secundaria de una cierta ciudad se supone que es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 15 minutos. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 estudiantes y se obtienen los siguientes tiempos (en minutos):

$$91;\ 68;\ 39;\ 82;\ 55;\ 70;\ 72;\ 62;\ 54;\ 67$$

   a) Determínese un intervalo de confianza al 90 % para el tiempo medio diario dedicado a escuchar música por un estudiante.
   Solución: $\mu \in (58,2;\ 73,8)$

   b) Calcúlese el tamaño muestral mínimo necesario para conseguir una estimación de la media del tiempo diario a escuchar música con un error menor que 5 minutos, con un nivel de confianza del 95 %
   Solución: $n = 34,57 \sim 35$ estudiantes.

8. El rendimiento por hectárea de las plantaciones de trigo de una cierta región, se supone que es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 1 tonelada por hectárea. Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 64 parcelas con una superficie igual a 1 hectárea cada una, obteniéndose un rendimiento medio de 6 toneladas.

   a) ¿Puede asegurarse que el error de estimación del rendimiento medio por hectárea es menor que $0,5$ toneladas, con un nivel de confianza del 98 %? Razónese.
   Solución: Se puede asegurar pues $E < 0,5$.

   b) ¿Qué tamaño muestral mínimo ha de tomarse para que el error en la estimación se menor que $0,5$ toneladas con un nivel de confianza del 95 %?
   Solución: $n = 15,37 \sim 16$ parcelas.

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II.
Manual práctico para Bachillerato

La pretensión de los autores no era otra que elaborar un libro de texto que permitiera a los alumnos de segundo curso de Bachillerato, inmersos ya en ese paso tan importante que es la Prueba de Acceso a la Universidad, una visión positiva de lo aprendido. Este manual pretende servir de puente entre el curǎo en el que están ȅ la prueba a la que se van a enfrentar, pero de una forma práctica, poniendo al alcance del profesor y del alumno los conceptos básicos; y éstos, unidos a procedimientos y actitudes mediante un método que aclara el concepto matemático en todo su fundamento.

www.educarm.es/publicaciones

Región de Murcia