6

Coordinadora:
María Trinidad Cámara Meseguer

El estudio de los números para alumnos con deficiencias auditivas (ESO y Bachillerato)

Edición digital

Consejería de Educación y Cultura
Dirección General de Formación Profesional,
Innovación y Atención a la Diversidad

Consejería de Educación
y Cultura

INTRODUCCIÓN

Al trabajar en el aula con alumnos sordos nos damos cuenta de que su gran problema es la dificultad que estos alumnos tienen en la comunicación tanto oral como **escrita**. La que la mayoría de las personas sordas consideran su lengua natural, la Lengua de Signos, es una lengua con una estructura distinta a la de la lengua castellana, y el signo o los signos usados por estas personas para denotar un objeto o un concepto son distintos a la sucesión de símbolos que se emplean en la lengua escrita para denotar dicho objeto o concepto.

Por esta razón, para estos alumnos, el enfrentarse a cualquier libro de texto implica una doble dificultad: la dificultad propia de la materia tratada por el libro y la dificultad de la lengua en la que están escritos dichos libros.

En este libro presentamos cinco temas adaptados a este tipo de alumnado con la doble intención de hacerles llegar de una manera sencilla estos cinco temas y de aumentar su comprensión lectora. La adaptación que realizamos no consiste en eliminar de su curriculum partes de un tema o conceptos complicados sino que es una adaptación metodológica en la que intentamos enseñar lo mismo pero usando una serie de recursos más visuales y más cercanos a su lengua.

Los temas desarrollados en este libro son:

Los números naturales.
Los números enteros.
Los números racionales.
Los números irracionales.
Los números reales.

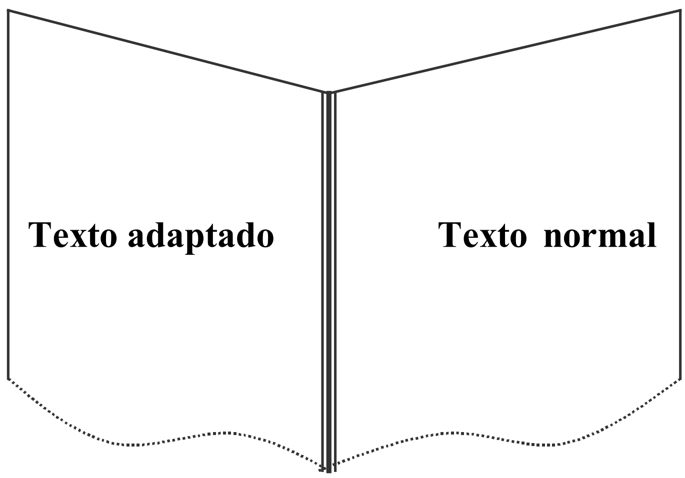
que no se corresponden con el curricilum de ningún curso pero que sí forman un bloque importante que se estudia desde los primeros cursos de primaria hasta primero de bachillerato.

Así, el primer tema es abordado por alumnos oyentes en la etapa de primaria, pero para una persona sorda la resolución de problemas con texto resulta muy complicada y se pospone su estudio hasta la etapa de secundaria. Los temas 2 y 3 se estudian de forma cíclica a lo largo de toda la secundaria. Los temas 4 y 5 se desarrollan sobre todo en 4º de E. S. O. en Matemáticas opción B y en 1º de Bachillerato.

Cada tema se divide en tres partes:

Teoría
Problemas resueltos
Problemas propuestos

El apartado de teoría se realiza siempre a doble página:



En las páginas derechas se encuentra la teoría correspondiente al tema tratado en lengua castellana, tal y como aparece en cualquier libro de matemáticas.

En las páginas izquierdas se adapta el texto de la página derecha utilizando distintos recursos: frases cortas y adaptadas a una estructura más cercana a la de la Lengua de Signos, dibujos, esquemas, color,...

Además en estas páginas izquierdas se usa el margen para aclarar expresiones o palabras del texto que los alumnos sordos nos han indicado que no conocen. En este caso la palabra o expresión no conocida se pone en cursiva en el texto, y se aclara al margen con un dibujo ilustrativo o un signo o un sinónimo,... Además se usa también el margen para recordarles conceptos y para indicarles cómo se leen determinadas expresiones matemáticas o cómo se leen algunos números, como por ejemplo algunas fracciones, raíces,...

El motivo por el que se escribió la teoría a doble página era para que los alumnos fuesen capaces de entenderla en las páginas izquierdas y pudieran comparar con las páginas derechas y de esta forma, en un futuro, sean capaces de entender otros libros de matemáticas.

El formato de los dos apartados siguientes, problemas resueltos y problemas propuestos, es diferente al de la teoría ya que en ambos apartados no hay distinción entre páginas derechas e izquierdas.

En ambos casos los enunciados aparecen tal y como pueden aparecer en cualquier examen o libro de texto, y sólo llevan aclarado al margen, con un signo, un dibujo, una explicación o usando sinónimos, todas aquellas palabras o expresiones que los alumnos sordos de nuestro centro nos han indicado que desconocen, en este caso dichas palabras o expresiones aparecen en cursiva en el texto.

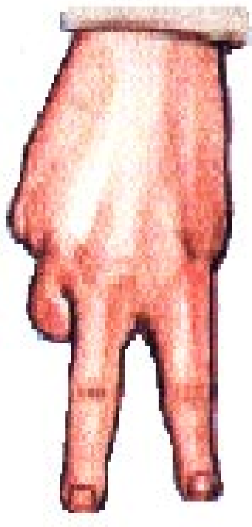
Las soluciones a los problemas resueltos tienen una estructura diferente a la que podemos encontrar en otros libros. Aquí sustituimos explicaciones largas y con mucho vocabulario por esquemas, dibujos, color y frases cortas con una estructura adaptada para que resulte más cercana a la estructura de la Lengua de Signos, aunque intentando que esta estructura sea correcta en Lengua Castellana.

En el caso de los problemas propuestos sólo aparece la solución final.

Al usar estos libros el alumno se acostumbra a intentar entender el texto, solicitando para aquellas palabras o expresiones que él desconoce y que no están aclaradas al margen alguna explicación que él mismo añadirá. Normalmente, tras la explicación del profesor, el alumno entiende por sí solo los problemas resueltos que le sirven de pauta para realizar los problemas propuestos. También usará estos libros como material de consulta en cursos posteriores para recordar conceptos olvidados, pues su manejo les resulta no demasiado complicado.

Mª Trinidad Cámara Meseguer
Coordinadora del proyecto
I.E.S. Juan Carlos I Murcia

TEMA I:
LOS NÚMEROS NATURALES



Autoras:
Mª José Fernández Hurtado
Mª Belén Ramírez Hellín

LOS NÚMEROS NATURALES

Nosotros podemos usar muchos números, el conjunto más pequeño de esos números es el conjunto de los **números naturales**. Su signo es la letra N y los números naturales son 0, 1, 2, ...

$$N = \{0, 1, 3, 4, ...\}$$

contar

Estos números se empezaron a usar hace mucho tiempo, y se usan mucho para *contar* cosas, aunque nosotros también las usamos para otras cosas:

Ejemplo:

¿Cuántos años tienes?	**14**
¿Cuántos hermanos sois?	**3**
¿Cuánto tiempo dura la clase de matemáticas?	**50** minutos

En la historia hay muchas formas de escribir los números naturales, nosotros ahora usamos una forma que se llama *sistema de numeración decimal*.

En este sistema usamos diez símbolos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Un símbolo quiere decir una cantidad u otra cantidad, depende el lugar dónde esté. En los siguientes ejemplos el número 5 está en distintos lugares y en cada lugar significa una cantidad distinta.

5 se dice cinco
50 se dice cincuenta
500 se dice quinientos

Número	**Quiere decir cantidad**
5	5 unidades (1 1 1 1 1)
50	5 decenas (cinco veces 10 → 10 + 10 + 10 + 10 + 10)
500	5 centenas (cinco veces 100→ 100 + 100 + 100 + 100 + 100)

Recuerda que:

9 se dice nueve
4 se dice cuatro

1. Un número de una cifra tiene unidades.

Por ejemplo 9 → 9 unidades
4 → 4 unidades

2. Un número de dos cifras tiene decenas y unidades.

decenas	unidades

31 se dice treinta y uno

Por ejemplo 31

decenas	unidades
3	1

3 decenas y 1 unidad → 3 veces diez y 1 unidad → 30 + 1

3. Un número de tres cifras tiene centenas, decenas y unidades.

centenas	decenas	unidades

543 se dice quinientos cuarenta y tres

Por ejemplo 543

centenas	decenas	unidades
5	4	3

5 centenas, 4 decenas y 3 unidades → 5 veces cien, 4 veces diez y 3 unidades → 500 + 40 + 3

LOS NÚMEROS NATURALES

Los números naturales son el conjunto más pequeño de números que podemos usar, se representan por N y son 0, 1, 2, 3, 4, ...

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

Estos números se comenzaron a utilizar hace mucho tiempo y sirven sobre todo para contar objetos aunque nosotros los utilizamos en numerosas aplicaciones.

¿Cuántos años tienes? **14**
¿Cuántos hermanos sois? **3**
¿Cuánto dura la clase de matemáticas? **50** minutos

A lo largo de la historia han existido muchas formas de escribir los números naturales, la que nosotros usamos actualmente se llama *sistema de numeración decimal*.

En este sistema utilizamos diez símbolos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, y 9. Dependiendo de la posición que ocupen estos símbolos significarán una u otra cantidad. Así, en los siguientes casos el número 5 ocupa distintas posiciones y significa distintas cantidades:

Número	**Cantidad que representa**
5	5 unidades
50	5 decenas, es decir, cinco veces diez
500	5 centenas, es decir, cinco veces cien

Recuerda que:

1. Un número de una cifra está formado por unidades.

Por ejemplo 9 → 9 unidades
4 → 4 unidades

2. Un número de dos cifras está formado por decenas y unidades.

decenas	unidades

Por ejemplo 31

decenas	unidades
3	1

3 decenas y 1 unidad → 3 veces diez y 1 unidad → 30 + 1

3. Un número de tres cifras está formado por centenas, decenas y unidades.

centenas	decenas	unidades

Por ejemplo 543

centenas	decenas	unidades
5	4	3

5 centenas, 4 decenas y 3 unidades → 5 veces cien, 4 veces diez y 3 unidades → 500 + 40 + 3

4. Si hay más cifras se hace igual, por ejemplo, un número de 5 cifras tiene decenas de millar, unidades de millar, centenas, decenas y unidades.

decenas de millar	unidades de millar	centenas	decenas	unidades

54.301 se dice cincuenta y cuatro mil trescientos uno.

Por ejemplo 54.301

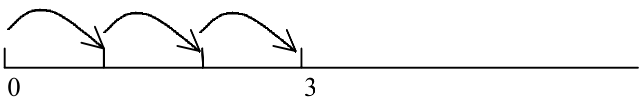
decenas de millar	unidades de millar	centenas	decenas	unidades
5	4	3	0	1

5 decenas de millar, 4 unidades de millar, 3 centenas, 0 decenas y 1 unidad →
5 veces diez mil, 4 veces mil, 3 veces cien, 0 veces diez y 1 unidad →
50.000 + 4.000 + 300 + 0 + 1

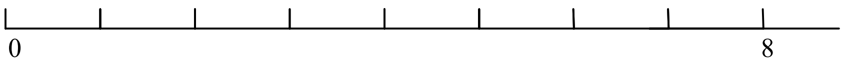
REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS NATURALES

Los números naturales se pueden representar (dibujar) en una recta .
Primero dibujamos en la recta un punto, que vale 0 y cogemos una medida (por ejemplo 1 cm.) para hacer los pasos.

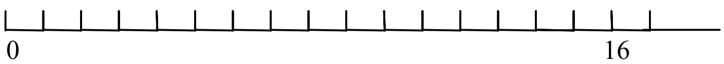
Para dibujar cualquier número, por ejemplo el 3, cogemos el 0 y damos 3 pasos a la derecha, igual que el dibujo:



el 8:



Si por ejemplo el número es muy grande cogemos una unidad más pequeña (paso más corto). Por ejemplo para dibujar el número 16:



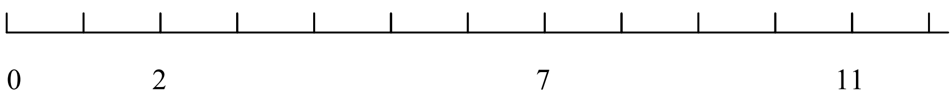
ORDENACIÓN DE NÚMEROS NATURALES

Para ordenar números naturales hay dos formas:
1. Dibujamos todos los números en una recta como hemos explicado antes. Ahora leemos los números desde la izquierda hasta la derecha (→) y ya están ordenados de menor (más pequeño) a mayor (más grande).

Notación matemática:

< quiere decir menor
> quiere decir mayor
= quiere decir igual
≤ quiere decir menor o igual
≥ quiere decir mayor o igual

Por ejemplo para ordenar los números 7, 2 y 11 primero los dibujamos:



Ahora leemos de izquierda → derecha: 2 después 7 después 11
entonces $2 < 7 < 11$

$2 < 7 < 11$ se dice
dos menor que siete menor que once

Esta forma vale cuando los números son pequeños.

4. Así con cualquier cantidad de cifras, por ejemplo, si tiene 5 cifras está formado por decenas de millar, unidades de millar, centenas, decenas y unidades.

decenas de millar	unidades de millar	centenas	decenas	unidades

Por ejemplo 54301

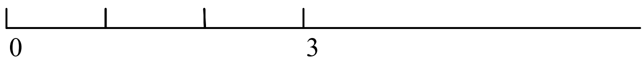
decenas de millar	unidades de millar	centenas	decenas	unidades
5	4	3	0	1

5 decenas de millar, 4 unidades de millar, 3 centenas, 0 decenas y 1 unidad →
5 veces diez mil, 4 veces mil, 3 veces cien, 0 veces diez y 1 unidad →
50.000 + 4.000 + 300 + 0 + 1

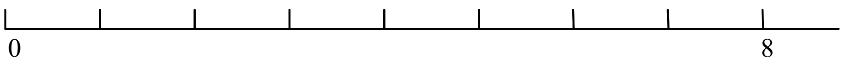
REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS NATURALES

Podemos representar los números naturales sobre una recta . Para ello, tomaremos en esta recta un punto como el valor 0 y una medida como longitud 1, por ejemplo un centímetro.

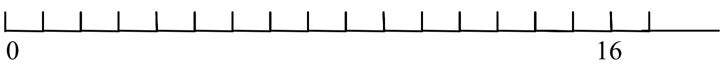
A partir de ahí para dibujar cualquier valor, por ejemplo el 3, mediremos a la derecha del 0 tres unidades de longitud como muestra la figura:



el 8:



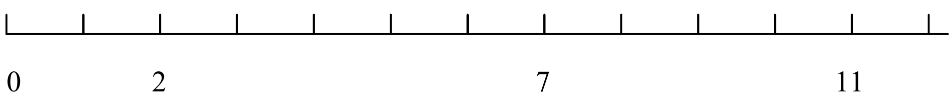
Si el número es muy grande cogeremos una unidad de medida menor. Por ejemplo para representar el número 16 podríamos:



ORDENACIÓN DE NÚMEROS NATURALES

Para ordenar números naturales podemos hacerlo de dos formas:
Caso I: Dibujamos los números sobre una recta como hemos explicado en el caso anterior. Si leemos los números dibujados de izquierda a derecha estaremos ordenando los números de menor a mayor.

Por ejemplo para ordenar los números 7, 2 y 11 los dibujamos sobre la recta:



Y ahora leemos de izquierda a derecha:
2 después 7 después 11
luego $2 < 7 < 11$

Este método se usa si los números son pequeños.

Notación matemática:

$<$ significa menor
$>$ significa mayor
$=$ significa igual
$\leq$ significa menor o igual
$\geq$ significa mayor o igual

2. Si por ejemplo los números son grandes, hacer el dibujo es difícil, entonces podemos ordenarlos con ayuda de unas normas:

2 se dice dos
110 se dice ciento diez
11 se dice once
4378 se dice cuatro mil trescientos setenta y ocho

1. Si un número tiene menos cifras y otro número tiene más cifras, el número con menos cifras es el número más pequeño.

Ejemplo: Ordenar 2, 110, 11 y 4378

$$\underbrace{\underset{(1)}{\underline{2}},\quad \underset{(3)}{\underline{1}\,\underline{1}\,\underline{0}},\quad \underset{(2)}{\underline{1}\,\underline{1}},\quad \underset{(4)}{\underline{4}\,\underline{3}\,\underline{7}\,\underline{8}}}_{\text{cifras}}$$

El número más pequeño es el 2 (1 cifra) después el 11 (2 cifras) después el 110 (3 cifras) y último el 4378 (4 cifras)

$$2 < 11 < 110 < 4378$$

2. Si los números tienen las mismas cifras, por ejemplo 3 cifras los dos, primero miramos las centenas, si las centenas son iguales →miramos las decenas. Si las decenas son iguales → miramos las unidades.

Ejemplos:

327 se dice trescientos veintisiete
351 se dice trescientos cincuenta y uno

Ordenar los números 327 y 351.

3 2 7
3 5 1

centenas iguales — decenas 2 < 5 entonces 327 < 351

535 se dice quinientos treinta y cinco
531 se dice quinientos treinta y uno

Ordenar los números 535 y 531.

5 3 5
5 3 1

centenas iguales — unidades 1 < 5 entonces 531 < 535
decenas iguales

27 se dice veintisiete
41 se dice cuarenta y uno
231 se dice doscientos treinta y uno
237 se dice doscientos treinta y siete

Ordenar los números 27, 41, 231, 11 y 237.

Hay números de dos cifras: 27, 41 y 11 y otros números con tres cifras: 231 y 237. Primero ordenamos los números de dos cifras:

2 7
4 1
1 1

1 < 2 < 4 entonces 11 < 27 < 41

Segundo ordenamos los de 3 cifras:

2 3 1
2 3 7

centenas iguales — unidades 1 < 7 entonces 231 < 237
decenas iguales

Los números de dos cifras son más pequeños, entonces el orden es:

$$11 < 27 < 41 < 231 < 237$$

Caso II: Si los números son grandes hacer el dibujo es complicado, en este caso, podemos ordenarlos siguiendo las siguientes normas:

1. Si dos número tienen distintas cifras, el número menor es el que menos cifras tiene.

Ejemplo: Ordenar 2, 110, 11 y 4378

2 $\rightarrow$ 1 cifra (el 2)
110 $\rightarrow$ 3 cifras (el 1, el 1 y el 0)
11 $\rightarrow$ 2 cifras (el 1 y el 1)
4378 $\rightarrow$ 4 cifras (el 4, el 3, el 7 y el 8)

Entonces el 2 es el más pequeño (1 cifra) después el 11 (2 cifras) después el 110 (3 cifras) y después el 4378 (4 cifras)

$$2 < 11 < 110 < 4378$$

2. Si tienen las mismas cifras, por ejemplo 3 cifras, comparamos primero las centenas, si son iguales, comparamos las decenas, si son iguales, comparamos las unidades.

Ejemplos:

Ordenar los números 327 y 351.

3 2 7
3 5 1

centenas iguales decenas 2 < 5 entonces 327 < 351

Ordenar los números 535 y 531.

5 3 5
5 3 1

centenas iguales unidades 1 < 5 entonces 531 < 535
decenas iguales

Ordenar los números 27, 41, 231, 11 y 237.

Aquí hay números de dos cifras: 27, 41 y 11 y números de tres cifras: 231 y 237. Ordenamos primero los números de dos cifras:

2 7
4 1
1 1

1 < 2 < 4 entonces 11 < 27 < 41

ordenamos ahora los números de tres cifras:

2 3 1
2 3 7

centenas iguales unidades 1 < 7 entonces 231 < 237
decenas iguales

Como los números de dos cifras son menores que los de tres cifras, entonces el orden es:

$$11 < 27 < 41 < 231 < 237$$

OPERACIONES CON NÚMEROS NATURALES

Con los números naturales podemos hacer algunas operaciones (cálculos):

Suma

UNIR = SUMAR

Cuando en un problema (ejercicio) tú quieres UNIR varios conjuntos de cosas, utiliza la SUMA.

Ejemplos:

1. En 3º A hay 31 alumnos, en 3º B hay 29 alumnos y en 3º C hay 27 alumnos. En total, ¿cuántos alumnos hay?
2. Ayer me compré varias cosas: un vestido que valía 36 €, unos pantalones por 30 € y un jersey de 15 €. En total, yo gasté... ¿cuánto?

Recuerda que para solucionar problema debes seguir los siguientes pasos:

1. Leer despacio.
2. Ver qué dice el problema → datos del problema.
3. El problema... ¿qué pregunta?... ¿qué me pide?
4. ¿Qué operación (suma, resta,...) debo utilizar?

Para solucionar estos problemas, hacemos los pasos que hay en el margen.

Ejemplo 1:

1. leer despacio: *En 3º A hay 31 alumnos, en 3º B hay 29 alumnos y en 3º C hay 27 alumnos. En total, ¿cuántos alumnos hay?*
2. Datos del problema:

   3º A → 31 alumnos
   3º B → 29 alumnos
   3º C → 27 alumnos
3. El Problema... ¿qué pregunta?... ¿qué me pide?

   En total, ¿cuántos alumnos hay?
4. ¿Qué operación debo utilizar? ¿suma?, ¿resta?, ¿multiplicación?, ...

   Yo quiero UNIR los alumnos de 3º A, 3º B y 3º C → quiere decir que debo SUMAR 31, 29 y 27

   31 + 29 + 27 = 87 alumnos hay en total.

Ejemplo 2:

1. leer despacio: *Ayer me compré varias cosas: un vestido que valía 36 €, unos pantalones por 30 € y un jersey de 15 €. En total, yo gasté... ¿cuánto?*
2. Datos:

   Vestido → 36 €
   Pantalón → 30 €
   Jersey → 15 €
3. El Problema... ¿qué pregunta?... ¿qué me pide?

   Yo gasté...¿Cuánto dinero?
4. ¿suma?, ¿resta?, ¿multiplicación?, ...

   JUNTAR = SUMAR

   Para saber cuánto dinero he gastado en el vestido, el pantalón y el jersey JUNTOS tengo que SUMAR el precio del vestido más el precio del pantalón más el jersey

   36 + 30 + 15 = 81 €

Los números dentro de la suma tienen un nombre especial, se llaman sumandos y el resultado se llama suma.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 36 \\ 30 \\ +\ 15 \\ \hline 81 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \to \text{sumandos} \\ \\ \to \text{suma} \end{array}$$

OPERACIONES CON NÚMEROS NATURALES

Con los números naturales podemos realizar las siguientes operaciones:

Suma

Se suman números en aquellos problemas en los que queremos UNIR varios conjuntos de cosas.

UNIR = SUMAR

Ejemplos:

1. En la clase de 3º A hay 31 alumnos, en 3º B hay 29 alumnos y en 3º C hay 27 alumnos. ¿Cuántos alumnos hay en los tres cursos?
2. Ayer compré un vestido que me costó 36 €, unos pantalones que me costaron 30 € y un jersey que me costó 15 € ¿Cuánto dinero me gasté?

Recuerda que para resolver cualquier problema debes seguir los siguientes pasos:

1. Leerlo despacio.
2. Ver qué información nos dan → datos del problema.
3. Ver qué me pide el problema.
4. ¿Qué operación (suma, resta,...) debo hacer?

Para resolver estos ejemplos seguiremos los pasos indicados en el margen. Así en el ejemplo 1 tenemos:

1. leer despacio: *En la clase de 3º A hay 31 alumnos, en 3º B hay 29 alumnos y en 3º C hay 27 alumnos. ¿Cuántos alumnos hay en los tres cursos?*
2. Datos del problema:
   Alumnos de 3º A → 31
   Alumnos de 3º B → 29
   Alumnos de 3º C → 27
3. ¿Qué me pide el problema?
   ¿Cuántos alumnos hay en los tres cursos?
4. ¿Qué operación debo hacer?
   Debo UNIR los alumnos de 3º A, 3º B y 3º C, es decir,
   debo SUMAR 31, 29 y 27
   31 + 29 + 27 = 87 alumnos hay en los tres cursos.

Vamos a resolver ahora el ejemplo 2:

1. leer despacio: *Ayer compré un vestido que me costó 36 €, unos pantalones que me costaron 30 € y un jersey que me costó 15 € ¿Cuánto dinero me gasté?*
2. Datos del problema:
   Precio del vestido → 36 €
   Precio del pantalón → 30 €
   Precio del jersey → 15 €
3. ¿Qué me pide el problema?
   ¿Cuánto dinero me gasté?
4. ¿Qué operación debo hacer?
   Quiero saber lo que me han costado el vestido, el pantalón y el jersey JUNTOS, es decir, SUMAR el precio del vestido, el pantalón y el jersey
   36 + 30 + 15 = 81 €

JUNTAR = SUMAR

Los números que intervienen en una suma tienen un nombre especial, se llaman sumandos y el resultado se llama suma.

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} 36 \\ 30 \\ +\ 15 \end{array}\right\} \rightarrow \text{sumandos}$$

$$\begin{array}{r} \hline 81 \end{array} \rightarrow \text{suma}$$

En la suma el orden (de los sumandos) NO importa:

$$\begin{array}{r} 237 \\ +\ 121 \\ \hline 358 \end{array} \quad \text{da igual} \quad \begin{array}{r} 121 \\ +\ 237 \\ \hline 358 \end{array}$$

Resta:

Se restan 2 números ¿para qué? Para saber la DIFERENCIA entre esos dos números. Ejemplos:

DIFERENCIA = RESTAR

1. En el instituto de Molina hay 700 alumnos y en el instituto Juan Carlos I hay 1.327 alumnos.
   a) ¿Dónde hay más alumnos?
   b) ¿Qué diferencia de alumnos hay entre los dos institutos?
2. Es mi cumpleaños y he comprado una tarta que vale 19 €. Yo tenía 24 €, ¿cuánto dinero sobra?

Ejemplo 1. Leemos despacio y vemos:

Datos:

Instituto Molina → 700 alumnos

Instituto Juan Carlos I → 1.327 alumnos

¿qué preguntan? Me preguntan dos cosas a) y b):

a) *¿Dónde hay más alumnos?*

Tengo que mirar los 2 números y mirar cuál es más grande

$$\underbrace{\underline{7}\,\underline{0}\,\underline{0},\ \ \underline{1}\,\underline{3}\,\underline{2}\,\underline{7}}_{\text{(3)}\qquad\text{(4)}}$$

cifras

Entonces 1.327 es más grande (porque tiene más cifras) y entonces el instituto Juan Carlos I tiene más alumnos.

b) *¿Qué diferencia de alumnos hay entre los dos institutos?*

Tú sabes que DIFERENCIA = RESTA,

Entonces tengo que restar los alumnos de los dos institutos:

1.327 – 700 = 627 alumnos hay de diferencia.

Ejemplo 2:

Datos: La tarta vale → 19 €

Yo tengo → 24 €

Nos preguntan: *¿cuánto dinero sobra?*

SOBRA = RESTA

SOBRA = RESTAR

Dinero que tenía – dinero que gasto = dinero que sobra

24 – 19 = 5 € sobran.

En la resta los números también tienen un nombre especial:

$$\begin{array}{r} 627 \\ -\ 203 \\ \hline 424 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{minuendo} \\ \text{sustraendo} \\ \text{resta} \end{array} \quad \begin{array}{r} 1527 \\ -\ 678 \\ \hline 849 \end{array}$$

Cuando termines la resta puedes comprobar si está bien, ¿cómo? con una fórmula:

resta + sustraendo = minuendo

Ejemplo: 424 + 203 = 627 la resta está bien

849 + 678 = 1.527 la resta está bien.

En la resta el orden de los números es muy importante, NO se puede cambiar.

En una suma no importa el orden de los sumandos:

$$\begin{array}{r} 237 \\ +\ 121 \\ \hline 358 \end{array} \xrightarrow{\text{cambiamos el orden de los sumandos}} \begin{array}{r} 121 \\ +\ 237 \\ \hline 358 \end{array}$$

358 —— da el mismo resultado → 358

Resta:

Se restan dos números cuando queremos saber la DIFERENCIA entre esos dos números. Ejemplos:

DIFERENCIA = RESTAR

1. En el instituto de Molina hay 700 alumnos y en el instituto Juan Carlos I hay 1.327 alumnos.
   a) ¿En qué instituto hay más alumnos?
   b) ¿Cuál es la diferencia de alumnos entre los dos institutos?
2. He comprado una tarta para mi cumpleaños que me ha costado 19 €. Si llevaba 24 €, ¿cuánto dinero me ha sobrado?

Vamos a resolver estos ejemplos. Si leemos despacio el ejemplo 1 vemos que los datos son:

Datos del problema:

Instituto de Molina → 700 alumnos

Instituto Juan Carlos I → 1.327 alumnos

Nos piden dos cosas:

a) *¿ En qué instituto hay más alumnos?*

Es decir, debo comparar dos números (700 y 1327) y ver cuál es mayor. Como 700 tiene 3 cifras y 1.327 tiene 4 cifras es mayor 1.327, es decir, el instituto Juan Carlos I tiene más alumnos.

b) *¿Cuál es la diferencia de alumnos entre los dos institutos?*

Sabemos que DIFERENCIA = RESTAR, luego debo restar el número de alumnos de los dos institutos: 1.327 – 700 = 627 alumnos hay de diferencia.

En el segundo ejemplo los datos son:

La tarta vale → 19 €

Yo tengo → 24 €

Y lo que nos piden es:

¿cuánto dinero me ha sobrado?

Para saber el dinero que me SOBRA necesito hallar la DIFERENCIA entre el dinero que tengo y el que debo de dar por la tarta, es decir, RESTAR el dinero que tengo menos el que vale la tarta:

SOBRA = RESTAR

24 – 19 = 5 € me sobran.

También en la resta los números que intervienen tienen un nombre especial:

627 ←	minuendo	→ 1527
- 203 ←	sustraendo	→ - 678
424 ←	resta	→ 849

Siempre que haces una resta puedes comprobar si el resultado está bien o no usando la siguiente fórmula:

resta + sustraendo = minuendo

Por ejemplo: 424 + 203 = 627 luego la primera resta está bien

849 + 678 = 1.527 luego la segunda resta también está bien.

En la resta es importante el orden de los números y NO podemos cambiarlo.

Producto = Multiplicación

Multiplicación:
Cuando queremos SUMAR MUCHAS VECES EL MISMO NÚMERO hacemos la multiplicación.
Ejemplo:

Un lápiz cuesta 20 céntimos, 4 lápices cuestan... ¿cuánto?

Datos del problema:

1 lápiz vale → 20 céntimos

Me preguntan

4 lápices cuestan... ¿cuánto?

Yo debo hacer... ¿qué operación? ¿suma?, ¿resta?, ...

Yo tengo que JUNTAR el dinero del primer lápiz, más el dinero del segundo lápiz, más el precio del tercer lápiz más el precio del cuarto lápiz.
Quiere decir SUMAR 20 + 20 + 20 + 20 = 80
SUMAR VARIAS VECES EL MISMO NÚMERO es igual que MULTIPLICAR ese número por las veces.
Aquí 20 + 20 + 20 + 20 = 20 × 4 (veces) = 80 céntimos cuestan 4 lápices.

En el producto, los números también tienen un nombre especial, se llaman factores y el resultado se llama producto.

$$\begin{array}{r l} 5 & \leftarrow \\ \underline{\times\ 8} & \leftarrow \text{ factores} \\ 40 & \leftarrow \text{ producto} \end{array}$$

El orden de los factores da igual:

$$\begin{array}{r c r} 5 & & 8 \\ \underline{\times\ \ 8} & & \underline{\times\ \ 5} \\ 40 & \longrightarrow \text{ da igual } \longrightarrow & 40 \end{array}$$

División = Cociente

División:
Se utiliza cuando queremos REPARTIR una cosa EN PARTES IGUALES.
Ejemplo:

Melisa tiene 42 caramelos y quiere repartirlos entre sus tres amigas. Entonces, ¿cuántos caramelos dará a cada amiga?

Datos:

Melisa tiene → 42 caramelos
Melisa tiene → 3 amigas

Preguntan:

¿Cuántos caramelos da a cada amiga?

¿Qué hacemos? ¿suma?, ¿resta?, ...

Quiero REPARTIR los 42 caramelos entre las 3 amigas =DIVIDIR
42 : 3 = 14 caramelos para cada amiga.

Los números de la división también tienen un nombre especial:

$$\begin{array}{r c r l c l} \text{Dividendo} & \longleftarrow & 34 & \underline{|\,6} & \longrightarrow & \text{Divisor} \\ \text{Resto} & \longleftarrow & 4 & 5 & \longrightarrow & \text{Cociente} \end{array}$$

Cuando termines la división, tú puedes comprobar si está bien o mal. Se llama la prueba de la división:

Divisor x Cociente + Resto = Dividendo
5 x 6 + 4 = 34

El orden de los números NO se puede cambiar.

Producto = Multiplicación

Multiplicación:
Realizaremos esta operación cuando queramos SUMAR MUCHAS VECES EL MISMO NÚMERO.
Ejemplo:

Si un lápiz cuesta 20 céntimos, ¿cuánto nos costarán 4 lápices?

Los datos de este problema son:

1 lápiz vale → 20 céntimos

Y nos piden

¿cuánto nos costarán 4 lápices?

La operación que debo hacer es:

JUNTAR lo que vale el primer lápiz, lo que vale el segundo lápiz, lo que vale el tercer lápiz y lo que vale el cuarto lápiz, es decir,
SUMAR 20 + 20 + 20 + 20 = 80
Pero SUMAR VARIAS VECES EL MISMO NÚMERO es igual que MULTIPLICAR el número que sumo por las veces que lo sumo. Aquí MULTIPLICAR 20 × 4 = 80 céntimos cuestan 4 lápices.

En el producto los números que intervienen también tienen un nombre especial, se llaman factores y el resultado se llama producto.

$$\begin{array}{r l} 5 \leftarrow & \\ \underline{\times 8} \leftarrow & \text{factores} \\ 40 \longleftarrow & \text{producto} \end{array}$$

El orden en que pongamos los factores da igual:

$$\begin{array}{r c r} 5 & \xrightarrow{\text{cambiamos el orden de los factores}} & 8 \\ \underline{\times\ 8} & & \underline{\times\ 5} \\ 40 & \text{——— da el mismo resultado} \longrightarrow & 40 \end{array}$$

División = Cociente

División:
Usaremos esta operación cuando queramos REPARTIR algo EN PARTES IGUALES.
Ejemplo:

Melisa tiene 42 caramelos que quiere repartir entre sus tres amigas. ¿Cuántos caramelos dará a cada amiga?

Los datos del problema son:

Melisa tiene → 42 caramelos
Melisa tiene → 3 amigas

¿Qué pide el problema

¿Cuántos caramelos dará a cada amiga?

¿Qué operación debo hacer?

Debo REPARTIR los 42 caramelos entre las 3 amigas, es decir
DIVIDIR 42 entre 3 → 42 : 3 = 14 caramelos para cada amiga.

Los números que aparecen en una división también tienen nombre propio:

$$\begin{array}{r l} \text{Dividendo} \longleftarrow 34 & \underline{|\,6} \longrightarrow \text{Divisor} \\ \text{Resto} \longleftarrow 4 & \ 5 \longrightarrow \text{Cociente} \end{array}$$

Siempre que hagas una división puedes comprobar si está bien realizando la prueba de la división:

Divisor x Cociente + Resto = Dividendo
5 x 6 + 4 = 34

El orden de los números que intervienen en una división no se puede cambiar.

JERARQUÍA DE OPERACIONES

A veces tienes que hacer una operación (cálculo) con sumas, restas, productos y divisiones. Recuerda que hay orden para hacerlo:

1º multiplicaciones y divisiones por orden de izquierda a derecha (→).
2º sumas y restas por orden de izquierda a derecha (→).

Este orden se puede cambiar con paréntesis ( ) o corchetes [ ]. Si hay ( ) o [ ], se hace primero lo que hay dentro. Si hay varios paréntesis o corchetes primero se hace el paréntesis o corchete que hay más dentro.

Ejemplos:

1. Calcula $2 + 3 \cdot 5$
   Hay suma y producto → primero se hace el producto:
   $2 + 3 \cdot 5 = 2 + 15$
   Ahora hacemos la suma:
   $2 + 15 = 17$

2. Calcula $4 \cdot 7 : 2$
   Hay producto y división. Los dos valen igual, entonces hacemos por orden. Primero hay producto:
   $4 \cdot 7 : 2 = 28 : 2$
   Ahora hacemos la división:
   $28 : 2 = 14$

3. Calcula $48 : 24 \cdot 5$
   Hay división y producto. Los dos valen igual, entonces hacemos por orden. Primero hay división:
   $48 : 24 \cdot 5 = 2 \cdot 5$
   Ahora hacemos el producto:
   $2 \cdot 5 = 10$

4. Calcula $(2 + 3) \cdot 5$
   Hay paréntesis → Primero se hace el paréntesis siempre::
   $(2 + 3) \cdot 5 = 5 \cdot 5$
   Ahora hacemos el producto:
   $5 \cdot 5 = 25$

JERARQUÍA DE OPERACIONES

Si tienes que realizar una operación en la que aparecen sumas, restas, productos y divisiones recuerda que el orden para hacerlas es el siguiente:

1º multiplicaciones y divisiones en el orden que aparecen.
2º sumas y restas en el orden que aparecen.

Este orden se puede modificar usando paréntesis y corchetes que tienen la máxima preferencia cuando vayas a hacer las operaciones. Si hay varios paréntesis o corchetes tendrán preferencia los más internos.

Ejemplos:

1. Calcula $2 + 3 \cdot 5$

   Aquí hay sumas y productos, primero debemos hacer el producto:

   $2 + 3 \cdot 5 = 2 + 15$

   Y ahora hacemos la suma:

   $2 + 15 = 17$

2. Calcula $4 \cdot 7 : 2$

   Aquí hay productos y divisiones, tienen la misma prioridad, debemos hacer primero lo primero que me encuentro, es decir, el producto:

   $4 \cdot 7 : 2 = 28 : 2$

   Y ahora hacemos la división:

   $28 : 2 = 14$

3. Calcula $48 : 24 \cdot 5$

   Aquí hay divisiones y productos, tienen la misma prioridad, debemos hacer primero lo primero que me encuentro, es decir, la división:

   $48 : 24 \cdot 5 = 2 \cdot 5$

   Y ahora hacemos el producto:

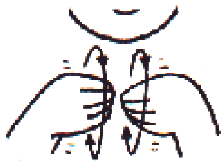
   $2 \cdot 5 = 10$

4. Calcula $(2 + 3) \cdot 5$

   Aquí hay un paréntesis que tiene preferencia sobre cualquier operación:

   $(2 + 3) \cdot 5 = 5 \cdot 5 = 25$

PROBLEMAS RESUELTOS


1. Escribe los siguientes números:
a) Mil cuatrocientos noventa y dos.
b) Dos mil uno.
c) Seis millones ochenta y cinco mil.
d) Un millón mil uno.
e) Ciento veintisiete mil cuatro.

Solución

a)

Unidad de millar	centenas	Decenas	Unidades
mil	cuatrocientos	noventa	Dos
1	4	9	2

Mil cuatrocientos noventa y dos = **1 492**

b)

Unidad de millar	centenas	Decenas	Unidades
Dos mil			Uno
2	0	0	1

Dos mil uno = **2 001**

c)

Unidad de millón	Centenas de millar	Decenas de millar	Unidad de millar	Centenas	Decenas	Unidades
Seis millones		Ochenta	Cinco mil			
6	0	8	5	0	0	0

Seis millones ochenta y cinco mil = **6 085 000**

d)

Unidad de millón	Centenas de millar	Decenas de millar	Unidad de millar	Centenas	Decenas	Unidades
Un millón			Mil			Uno
1	0	0	1	0	0	1

Un millón mil uno = **1 001 001**

e)

Centenas de millar	Decenas de millar	Unidad de millar	Centenas	Decenas	Unidades
ciento	veinti	siete mil			cuatro
1	2	7	0	0	4

Ciento veintisiete mil cuatro = **127 004**

2. Cómo se dicen los siguientes números:

a) 101 003
b) 75 081
c) 2 406 400

Solución

a)

Centenas de millar	**Decenas de millar**	**Unidad de millar**	**Centenas**	**Decenas**	**Unidades**
1	0	1	0	0	3
Ciento		Un mil			Tres

101 003 = **ciento un mil tres**.

b)

Decenas de millar	**Unidad de millar**	**Centenas**	**Decena s**	**Unidades**
7	5	0	8	1
Setenta	Cinco mil		Ochenta	Uno

75 081 = **setenta y cinco mil ochenta y uno**.

c)

Unidad de millón	**Centenas de millas**	**Decenas de millar**	**Unidad de millar**	**Centenas**	**Decenas**	**Unidades**
2	4	0	6	4	0	0
Dos millones	Cuatrocien tos		Seis mil	Cuatrocien tos		

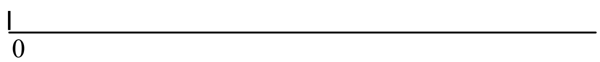
2 406 400 = **dos millones cuatrocientos seis mil cuatrocientos**.

Representa = dibuja

3. *Representa* sobre una recta los números: 4, 6, 9, 5 y ordénalos de menor a mayor.

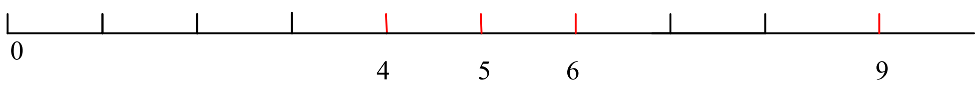
Solución

Dibujamos una recta y ponemos un punto = 0



y ponemos el número 1 (donde tú quieras)

Ahora pasos a la derecha ¿cuántos?   número manda: 4, 6, 9 y 5



Orden números ¿cuál?

4 después 5 después 6 después 9 → **4 < 5 < 6 < 9**

4. Ordena los siguientes números: 27, 471, 228, 435, 25, 227.

Solución

1º ¿Cuántas cifras tiene cada número?

27 → 2 cifras (el 2 y el 7)

471 → 3 cifras (el 4, el 7 y el 1)

228 → 3 cifras (el 2, el 2 y el 8)

435 → 3 cifras (el 4, el 3 y el 5)

25 → 2 cifras (el 2 y el 5)

227 → 3 cifras (el 2, el 2 y el 5)

$\underbrace{2\ 7}_{\text{2 cifras}}$

$\underbrace{4\ 3\ 5}_{\text{3 cifras}}$

Entonces: más pequeños → números con 2 cifras: 27 y 25

después → números con tres cifras: 431, 228, 435, 227

Ahora vamos a ordenar los números de 2 cifras: 27 y 25.

2 7

2 5

decenas iguales unidades 5 < 7 entonces 25 < 27

Después ordenamos los números de 3 cifras: 431, 228, 435, 227. Miramos las centenas:

4 3 1

2 2 8

4 3 5

2 2 7

2 < 4 entonces 228 y 227 son más pequeños, 471 y 435 son más grandes

Vamos a ordenar 228 y 227 mirando las decenas:

2 2 8

2 2 7

centenas iguales unidades 7 < 8 entonces 227 < 228

decenas iguales

Ahora ordenamos 471 y 435: Miramos las decenas:

4 7 1

4 3 5

centenas iguales decenas 3 < 7 entonces 435 < 471

Si juntamos todo tenemos: 25 < 27 < 227 < 228 < 435 < 471

5. Realiza las siguientes operaciones:

a) 2 347 - 1098

b) 1 047 × 21

c) 1049 : 21

d) 128 421 + 27 581

e) 12345 - 9876

f) 1092 + 73645

g) 56478 : 547

h) 67890 × 78

Solución

a) 2347 - 1098 = 1249

b) 1 047 × 21 = 21987

c) 1049 : 21 = 49 resto = 20

d) 128421 + 27581 = 156002

e) 12345 - 9876 = 2469

f) 1092 + 73645 = 74737

g) 56478 : 547 = 103 resto 137

h) 67890 × 78 = 5295420

6. En mi instituto hay dos intérpretes de lengua de signos. Pepi tiene 33 años y Belén cuatro años más, ¿cuántos años tiene Belén?

Solución

Datos

Pepi años → 33
Belén años → 4 más

Pregunta

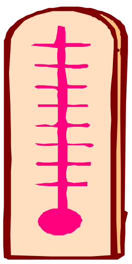
Belén → ¿años?

Operación

JUNTAR años de Pepi y 4 años más → SUMAR años de Pepi y 4 más

33 + 4 = **37 años tiene Belén.**

7º se dice siete grados

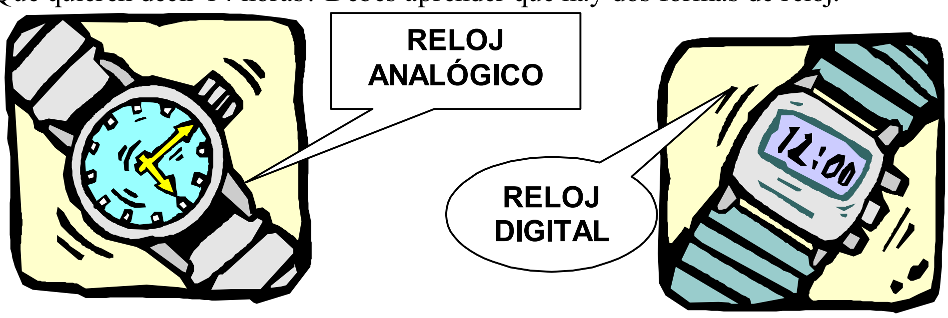


termómetro
aumentado = más

7. Si el *termómetro* a las 9 de la mañana en la Plaza de Romea marcaba *7º* y a las 14 horas había *aumentado* 12º C. ¿Cuál será la temperatura a esa hora?

Solución

¿Qué quieren decir 14 horas? Debes aprender que hay dos formas de reloj.



El reloj analógico marca la 1, las 2, ... hasta las 12 y después por la tarde otra vez la 1, las 2, ... hasta las 12.

El reloj digital marca desde las 0 horas hasta las 24. Desde las 0 hasta las 12 igual que el reloj analógico. Si son números mayores que 12 (13, 14, ...), entonces restamos 12 y es la hora por la tarde.

Ya sabemos los relojes, ahora empezamos el problema.

Datos

A las 9 horas → 7º
A las 14 horas (14 - 12 = 2 de la tarde) → *aumenta* 12º.

Pregunta

A las 14 horas = 2 de la tarde → ¿temperatura?

Operación

A las 14 horas la temperatura AUMENTA
AUMENTAR quiere decir que la temperatura es MAYOR (MÁS calor)

MÁS = SUMAR

Entonces la temperatura a las 2 de la tarde = temperatura a las 9 de la mañana + AUMENTO = 7 + 12 = **19º C**

8. Ayer fuimos de Murcia a Archena que están *separadas* 22 Km. Después de comer allí subimos hasta Ricote recorriendo 15 Km. más, desde allí *regresamos* a Murcia por el mismo camino.

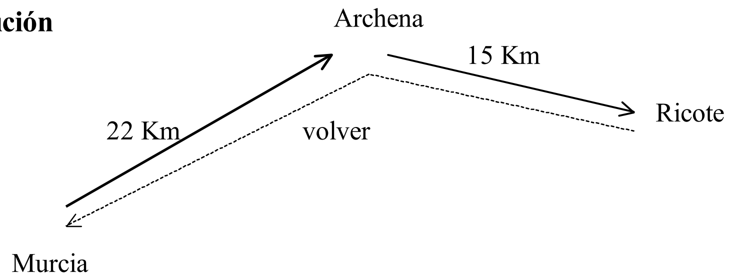
¿Cuántos kilómetros *recorrimos en total*?

separadas = distancia entre dos lugares

regresamos = volver

recorrimos en total = ir y venir

Solución



Datos

Murcia hasta Archena = 22 Km.
Archena hasta Ricote = 15 Km.

Pregunta

Ir y venir → ¿Km.?

Operación

JUNTAR Km. para ir y Km. para venir = SUMAR Km. para ir y Km. para venir.
Km. para ir = JUNTAR Km. desde Murcia hasta Archena y Km. desde Archena hasta Ricote = SUMAR Km. desde Murcia hasta Archena + Km. desde Archena hasta Ricote = 22 + 15 = 37
Km. para venir = Km. para ir (la misma carretera) = 37
Km en total = JUNTAR Km. para ir y Km. para venir = 37 + 37 = **74 Km**

9. Esmeralda lleva 4 horas de paseo con sus amigas. Si salieron a las 6 de la tarde, ¿qué hora es?

Solución

Datos

Esmeralda → 4 horas de paseo
Esmeralda → salió a las 6 de la tarde

Pregunta

Ahora → ¿hora?

Operación

Esmeralda sale a las 6 de la tarde $\xrightarrow{\text{1 hora paseando}}$ 7 de la tarde $\xrightarrow{\text{1 hora paseando}}$ 8 de la tarde → ....

SUMAR hora de salida y horas paseando = 6 + 4 = **10 horas**.

10. Mi cartera llena de libros pesa 3300 gramos. Si los libros pesan 3000 gramos, ¿cuánto pesa la cartera?

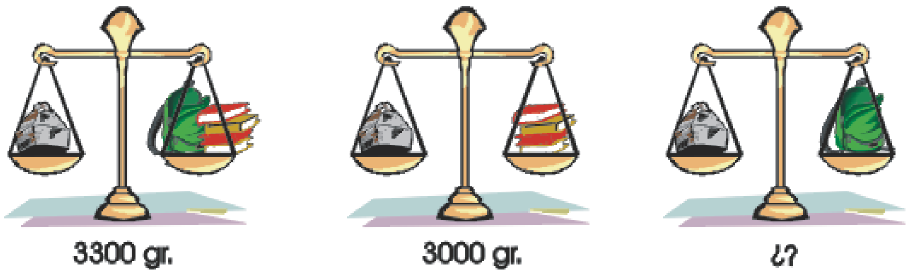
Solución

Datos

La Cartera y los libros pesan → 3.300 gr.
Los libros pesan → 3.000 gr.

Pregunta

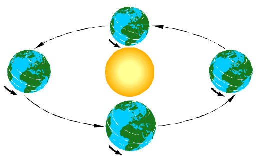
La cartera pesa → ¿gr.?



Operación

El peso de la cartera = DIFERENCIA entre el peso de la cartera y los libros (juntos) menos el peso de los libros = RESTAR el peso de la cartera y los libros (juntos) menos el peso de los libros = 3300 - 3000 = **300 gramos pesa la cartera.**

alrededor



FALTAR = RESTAR

11. Cuando la Tierra ha dado 4300 vueltas *alrededor* del Sol. ¿Cuántas le faltan para dar 5000 vueltas?

Solución

Datos

Debe dar → 5.000 vueltas
Ha dado ya → 4.300 vueltas

Pregunta

faltan → ¿vueltas?

Operación

Vueltas que FALTAN = DIFERENCIA entre las vueltas que tiene que hacer y las vueltas que ya ha hecho = RESTAR las vueltas que tiene que hacer y las vueltas que ya ha hecho = 5000 - 4300 = **700 vueltas faltan**

12. Este año en mi clase, empezaremos el curso veinticinco alumnos. Si sólo hay nueve chicos, ¿cuántas chicas hay?

Solución

Datos

alumnos (chicos y chicas juntos) → 25
chicos → 9

Pregunta

chicas → ¿cuántas?

Operación

chicas = DIFERENCIA entre todos los alumnos (chicas y chicos juntos) menos las chicas = RESTAR todos los alumnos (chicas y chicos juntos) menos las chicas = 25 - 9 = **16 chicas**

13. Quiero comprar un libro que cuesta 24 € y sólo llevo 18 €. ¿Cuántos euros me faltan?

Recuerda:
Normalmente:

Solución

Datos

El libro vale → 24 €
yo tengo → 18 €

FALTAR = RESTAR

Pregunta

Faltan → ¿€?

Operación

Yo necesito → 24 €
Yo tengo → 18 €
18 < 24 entonces FALTAN €
Los € que FALTAN = DIFERENCIA entre lo que necesito menos lo que tengo = 24 – 18 = **6 € me faltan**

14. Para comprar un regalo que cuesta 12 € tenemos 18 €, ¿cuántos euros sobran?

SOBRAR = RESTAR

Solución

Datos

El regalo vale → 12 €
Tenemos → 18 €

Pregunta

Sobran → ¿€?

Operación

Necesitamos → 12 €
Tenemos → 18 €
18 > 12 entonces SOBRAN €
Los € que SOBRAN = DIFERENCIA entre lo que tenemos y lo que necesitamos = 18 – 12 = **6 € me sobran**

15. Halla el doble de: a) 20 b) 35 c) 127

Solución

Debes aprender que DOBLE = ×2

a) $20 \xrightarrow{\times 2} 40$

b) $35 \xrightarrow{\times 2} 70$

c) $127 \xrightarrow{\times 2} 254$

16. Halla el triple de:

a) 13 b) 27 c) 81

Solución

Debes aprender que TRIPLE = $\times 3$

a) $13 \xrightarrow{\times 3} 39$

b) $27 \xrightarrow{\times 3} 81$

c) $81 \xrightarrow{\times 3} 243$

17. Halla la mitad de:

a) 48 b) 128 c)256

Solución

Debes aprender que MITAD = :2

a) $48 \xrightarrow{:2} 24$

b) $128 \xrightarrow{:2} 64$

c) $256 \xrightarrow{:2} 128$

18. El sábado pasado un grupo de amigos fuimos a cenar y después al cine. En la cena estuvimos seis amigos pero al cine fuimos el doble. ¿Cuántos amigos fuimos al cine?

Solución

Datos

A cenar van $\rightarrow$ 6 amigos

Al cine van $\rightarrow$ el doble

Pregunta

Al cine, ¿cuántos amigos van?

Operación

Al cine van el DOBLE = = $\times 2 \rightarrow 6 \times 2 =$ **12 amigos van al cine.**

19. ¿Cuántos minutos tienen tres horas?

Solución

Datos

No hay pero sabemos que 1 hora = 60 minutos

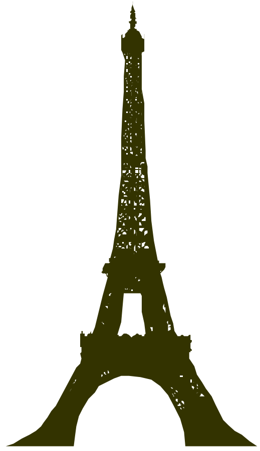
Pregunta

3 horas $\rightarrow$ ¿minutos?

Operación

Sabemos que 1 hora=60 minutos. Para saber los minutos de 3 horas JUNTAMOS los minutos de la 1ª hora, la 2ª hora y la 3ª hora=SUMAR 3 VECES 60=MULTIPLICAR 3 por 60=60 $\times$ 3 =**180 minutos tienen 3 horas.**

20. Se calcula que por término medio visitan la *torre Eiffel* cada día de Semana Santa 5000 personas. ¿Cuántas personas visitaron la torre Eiffel en dicha semana?



torre Eiffel = torre famosa en París

Solución

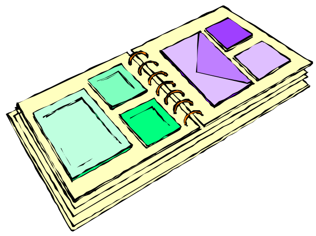
Datos
1 día de Semana Santa visitan la torre Eiffel → 5000 personas

Pregunta
En Semana Santa van a la torre Eiffel → ¿personas?

Operación

JUNTAR las personas que van a la torre Eiffel el lunes, el martes, el miércoles,... = SUMAR 7 VECES 5.000 = MULTIPLICAR 7 por 5.000 = 5.000 × 7 = **35.000 personas visitaron la torre Eiffel en Semana Santa**.

21. María colecciona sellos. En un *álbum* de 10 páginas, ¿cuántos sellos podemos poner si en cada página caben 12 sellos?



álbum de sellos = álbum dentro pones sellos

Solución

Datos
Álbum → 10 páginas
1 página → 12 sellos

Pregunta
En todo el álbum → ¿sellos?

Operación

JUNTAR sellos de la 1ª página, de la 2ª página, de la 3ª página,... =
SUMAR 10 (10 páginas) 12 VECES =
MULTIPLICAR 10 por 12 = 10 × 12 = **120 sellos.**

22. Quiero un *equipo de música* que cuesta 360 € y lo quiero pagar en 20 meses. ¿Cuántos euros debo pagar cada mes?

equipo de música

Solución

Datos
Equipo de música vale → 360 €
Pago en → 20 meses

Pregunta
1 mes → ¿€?

Operación

REPARTIR lo que vale entre los meses = DIVIDIR 360 entre 20

$$\begin{array}{r|l} 360 & 20 \\ \hline \underline{0} & \mathbf{18\ €} \end{array}$$

No sobra nada

Paga cada mes

23. Tengo 50 € y quiero comprar varios C. D. de música. Si cada C. D. cuesta 18 € ¿Cuántos C. D. puedo comprar? ¿Cuántos euros me sobran?

Solución

Datos

Tengo → 50 €
1 C. D. vale → 18 €

Pregunta

Compra C. D. → ¿cuántos?
Sobra → ¿cuánto?

Operación

Debo REPARTIR 50 € en grupos de 18 € (cada grupo = compro 1 C. D.) = DIVIDIR 50 entre 18

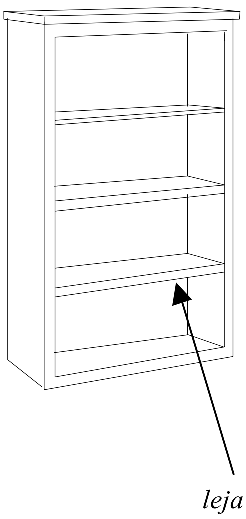
$$\begin{array}{r|l} 50 & 18 \\ \hline \underline{14} & \mathbf{2} \end{array}$$

Sobran 14 € **Puedo comprar 2 C. D.**

colocar = poner

Recuerda: el resto de la división = lo que sobra de repartir en partes iguales.

estanterías



24. Este curso me he comprado catorce libros. De otros años tenía guardados 23 libros. Si quiero *colocar* estos libros en una *estantería* y sé que en cada *leja* puedo poner once libros, ¿cuántas *lejas* necesitaré para *colocar* todos estos libros?

Solución

Datos

Este año → 14 libros.
Otros años → 23 libros
1 leja caben → 11 libros

Pregunta

JUNTAMOS los libros y los ponemos en lejas. ¿Cuántas lejas necesito?

Operación

1º JUNTAR libros = SUMAR libros de este año + libros de otros años =
14 + 23 = 37 libros tengo

2º REPARTIR los 37 libros en lejas = DIVIDIR los 37 libros en grupos de 11 libros (11 libros en 1 leja)

$$\begin{array}{r|l} 37 & 11 \\ \hline 4 & 3 \end{array}$$

Sobran 4 libros → ¿dónde los ponemos? → Otra leja

Necesito 3 lejas completas

TOTAL:
4 lejas:
3 lejas completas
1 leja con 4 libros

25. A una excursión organizada por el instituto van 327 alumnos y 12 profesores. Si en cada autobús caben 50 personas. ¿Cuántos autobuses hay que contratar? ¿Cuántas plazas sobran?

Solución

Datos

A la excursión van → 327 alumnos
→ 12 profesores
1 autobús → 50 plazas

Pregunta

¿Cuántos autobuses?
¿Cuántas plazas sobran?

Operación

1º JUNTAR alumnos y profesores (para saber personas en total) = SUMAR 327 y 12 = 327 + 12 = 339 personas van de excursión.
2º REPARTIR 339 personas en grupos de 50 (personas en el mismo autobús) = DIVIDIR 339 entre 50.

$$\begin{array}{r|l} 339 & 50 \\ \hline \underline{39} & 6 \end{array}$$

Sobran 39 personas → Necesitamos otro autobús

6 grupos de 50 personas = 6 autobuses

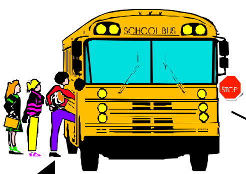
TOTAL: **7 autobuses** =un autobús con 39 personas y 6 autobuses completos

En el autobús de 39 personas hay asientos libres ¿Cuántos? = DIFERENCIA entre asientos que hay y asientos ocupados = 50 – 39 = **11 asientos libres**.

26. El autobús que hace el recorrido de Murcia a Madrid salió de la estación con treinta y dos *pasajeros*. En Albacete bajaron ocho *pasajeros* y subieron veinte. Al llegar a Mota del Cuervo subieron cuatro *pasajeros* más. Si no hubo otra parada, ¿cuántas personas llegaron a Madrid?

pasajeros = personas dentro del autobús

Solución



Subir

Bajar

Datos

En Murcia → 32 pasajeros
En Albacete → bajan 8 pasajeros
→ suben 20 pasajeros

En Mota del Cuervo → suben 4 pasajeros

Pregunta

En Madrid → ¿pasajeros?

Operación

Debes saber:
Si SUBEN pasajeros → hay MÁS pasajeros → SUMAR
Si BAJAN pasajeros → hay MENOS pasajeros → RESTAR

En Murcia → 32 pasajeros

En Albacete:
bajan 8 personas → en el autobús ahora 32 - 8 = 24 pasajeros
suben 20 personas → en el autobús ahora 24 + 20 = 44 pasajeros

En Mota del Cuervo:
suben 4 personas → en el autobús ahora 44 + 4 = 48 pasajeros

No hay más paradas entonces en **Madrid bajaron 48 personas**.

27. En cierto supermercado sabemos que el kilo de patatas cuesta 1 €, el kilo de plátanos cuesta 2 € y el kilo de queso cuesta 9 €. Si compramos 3 kilos de patatas, 2 kilos de plátanos y 1 kilo de queso, ¿cuánto nos cobraron?
Si tenemos 50 €, ¿cuánto nos sobrará?

Solución

Datos

1 kilo de patatas vale → 1 €
1 kilo de plátanos vale → 2 €
1 kilo de queso vale → 9 €

Compro → 3 Kg. de patatas
Compro → 2 Kg. de plátanos
Compro → 1 Kg. de queso

Yo tengo → 50 €

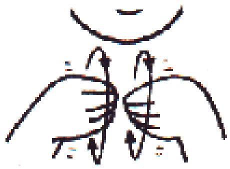
Pregunta

Todo JUNTO vale → ¿€?
Sobra → ¿€?

Operación

JUNTAR lo que valen **3 Kg. de patatas**, **2 Kilos de plátanos** y 1 Kg. de queso
3 Kg. de patatas valen =3 VECES lo que vale 1 Kg. de patatas = 3 · 1 = **3 €**
2 Kilos de plátanos valen =2 VECES lo que vale 1 Kg. de plátanos = 2 · 2 = **4 €**
1 Kg. de queso = 9 €
TODO JUNTO vale = SUMAR lo que valen **3 Kg. de patatas**, **2 Kilos de plátanos** y 1 Kg. de queso = **3** + **4** + 9 = **16 €**
Yo tengo 50 € > 16 € entonces SOBRA
SOBRA = DIFERENCIA del dinero que tengo menos el dinero que pago = 50 – 16 = **34 € sobran**

PROBLEMAS PROPUESTOS



1. Escribe como se dicen los siguientes números:

a) 27	e) 1023	i) 150000
b) 31	f) 5471	j) 458975
c) 128	g) 6006	k) 2849495
d) 894	h) 73425	l) 4567890

2. Escribe los siguientes números:

a) Seiscientos cuarenta y tres mil veinticinco
b) Un millón cuatrocientos veintisiete mil seis
c) Ciento veinticinco
d) Dos millones quinientos veintitrés
e) Novecientos sesenta y ocho mil nueve

Representa = dibuja

3. *Representa* sobre una recta los números: 1, 5, 7, 3, 6, 4. ¿Qué orden tienen estos números?

4. Coloca entre cada par de números los signos de desigualdad (> o <):

a) 3 y 5 → 3 < 5
b) 4 y 1
c) 0 y 7
d) 127 y 81
e) 1571 y 2438
f) 404 y 505

5. Completa:

a) 627 = 6 centenas, 2 decenas y 7 unidades
b) 2431
c) 7272
d) 143
e) 15
f) 150000
g) 103

3 4 5

cifras

en este ejemplo la suma de las tres cifras es
3 + 4 + 5 = 12

6. a) Ordena los siguientes números de menor a mayor: 17, 431, 228, 341, 11, 43, 1.043.
b) Ordena los siguientes números de mayor a menor: 231, 333, 341, 347, 528, 521.

7. Escribe cinco números de tres *cifras* para que la suma de estas cifras sea quince.

8. Escribe cinco números de tres *cifras* para que la suma de las unidades y las decenas sea doce.

9. Escribe cinco números de cuatro *cifras* para que las unidades de millar y las decenas sumen trece.

10. Efectúa las siguientes operaciones:

347	1024	127	609
+ 128	- 531	+ 541	- 240

11. Realiza las siguientes operaciones:

a) 2437 – 1092 =
b) 1047 – 298 =
c) 1024 × 86 =
d) 953 × 953 =
e) 128421+27581 =

12. En unos *grandes almacenes* observamos los siguientes precios: una camisa 30 €, un par de zapatos 18 €, un bolso 12 €, una toalla 5 €, un reloj 36 € y unas gafas de sol 60 €. Indica cuánto me he gastado en cada uno de los casos siguientes:

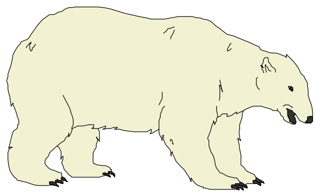
a) Si compro una camisa y un bolso.
b) Si compro una toalla, un reloj y unas gafas de sol.
c) Si compro un par de zapatos, una camisa y un bolso.

grandes almacenes = tienda grande

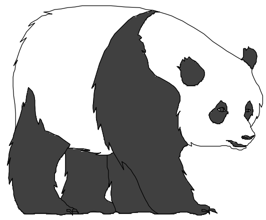
13. Quiero hacer el siguiente viaje:
Primer día: De Murcia a Valencia (270 Km.)
Segundo día: De Valencia a Madrid (300 Km.)
Tras pasar en Madrid varios días regreso de Madrid a Murcia (450 Km.)
¿Cuántos Km. he recorrido en este viaje?

14. En el año 1.978 comenzó a construirse un instituto, 4 años después se acabó. ¿En qué año se terminó el instituto?

oso pardo



oso polar



oso panda

15. Ana tiene 2 € y su madre le da 3 € en el fin de semana. ¿Cuántos € tiene ahora Ana?

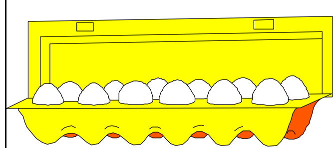
16. En una piscina hay 3.000 litros de agua y añadimos 1.500 litros. ¿Cuántos litros hay ahora en la piscina?

17. En un zoo hay 3 osos pardos, 4 osos polares y 2 osos panda ¿Cuántos osos hay en el zoo?

18. Carolina ha gastado 1 € en el autobús, 3 € en comer y 3 € en el cine. ¿Cuánto dinero ha gastado Carolina?

19. En un bosque hay 123 pinos. Plantan 12 pinos más, ¿cuántos pinos hay ahora?

20. La madre de Luisa tiene *una docena de huevos* y utiliza 5 huevos para hacer una tortilla, ¿cuántos le quedan?



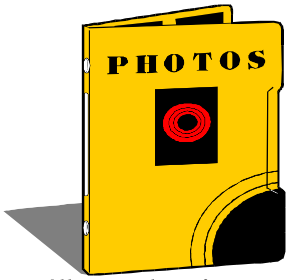
una docena de huevos = 12 huevos

21. Mari Trini tiene 41 años y Melisa 19. ¿Quién es mayor? ¿qué diferencia de edad hay?

22. María pesa 55 kilos y Loli 50 kilos, ¿quién pesa más? ¿Cuál es la diferencia de peso?

23. Hace 6 años que compré una casa. Si estamos en el año 2.001 ¿en qué año compré la casa?

24. Alicia tiene 20 €. Yo tengo 5 € menos que Alicia, ¿Cuántos euros tengo yo?



álbum de fotos = álbum dentro fotos

25. Angel tiene un *álbum con fotos*. En el álbum caben 100 fotos y Angel tiene ya 48, ¿cuántas le faltan para completar el álbum?

26. En el aula de 3ºC hay 30 mesas. Hoy hay 4 mesas vacías, ¿cuántos alumnos hay en clase?

arrancar = quitar

27. En un bosque de 120 pinos *arrancan* 13, ¿cuántos pinos quedan?

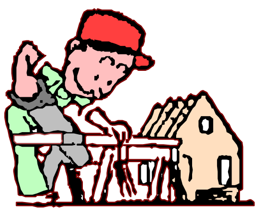
28. En un parque quieren poner 14 asientos. Se han colocado ya 9 asientos, ¿cuántos faltan por poner?

29. En una excursión que los alumnos de 4º E han hecho a la playa se han bañado 18 alumnos. Si a la excursión han ido 27 alumnos, ¿cuántos alumnos no se han bañado?

tableros

30. Juan compra 13 dulces, por el camino se come 4, ¿cuántos dulces le quedan?

31. Tenemos un *tablero* de 150 cm. de largo y 60 cm. de ancho, ¿cuánto debo cortarle de largo y de ancho para conseguir un tablero de 120 cm. de largo y 50 de ancho?



hombre cortando un tablero

32. Calcula el doble de: a) 431 b)1234 c)47

33. Calcula el triple de: a) 56 b)67 c)60

34. Calcula la mitad de: a) 1234 b)56 c)9046

35. María tiene 10 años y su madre tiene el triple, ¿cuántos años tiene su madre?

36. Lucía tiene 30 € y le da la mitad a su marido, ¿cuánto dinero le da?

37. Juan tiene 10 juegos de ordenador y María tiene el doble de juegos, ¿cuántos juegos tiene María?

38. Si un litro de vino cuesta 2 €, ¿cuánto me costarán 5 litros de vino?

39. Tengo 4 *montones de monedas* y en cada montón tengo 10 monedas, ¿cuántas monedas tengo?

40. En un huerto hay 10 filas de naranjos y en cada fila hay 7 naranjos, ¿cuántos naranjos hay en el huerto?

41. Una estantería tiene 5 lejas. Cada leja tiene 13 libros, ¿Cuántos libros hay en la estantería?

42. Tengo 16 botellas de agua. Cada botella es de 5 litros, ¿cuántos litros de agua tengo?

43. En un edificio hay 13 plantas, en cada planta hay 4 pisos, ¿cuántos pisos hay en dicho edificio?

44. Si cada *caja de cerillas* tiene 100 cerillas y tengo 8 cajas de cerillas, ¿Cuántas cerillas tengo?

45. Abraham tiene 4 cajas de lápices con 10 lápices cada caja. ¿Cuántos lápices tiene Abraham?

46. ¿Cuántos días son 4 semanas?

47. a)¿Cuántas patas tienen 13 caballos?
b)¿Cuántas patas tienen 5 pollos y 20 cerdos?

48. 15 personas quieren ir a la playa en coche. Si en cada coche caben 4 personas, ¿cuántos coches necesitaremos?

49. María tiene 52 caramelos que quiere repartir a partes iguales entre sus 7 amigas. ¿Cuántos caramelos da a cada amiga?, ¿cuántos le sobran?

50. 3 amigos salen al cine y a cenar. En total se gastan 21 €, ¿cuántos euros ha gastado cada uno?

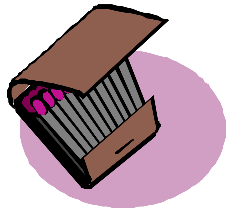
51. La profesora de matemáticas nos ha puesto 30 problemas para hacerlos en 5 días, ¿cuántos problemas debo hacer cada día?

52. Un álbum de fotos tiene 20 páginas. Si tengo 45 fotos y en cada página caben 3 fotos, ¿Me caben todas las fotos en este álbum? ¿Cuántas páginas ocuparé?

53. En un hotel hay 4 *limpiadoras* y 20 habitaciones. ¿Cuántas habitaciones tiene que limpiar cada limpiadora?

54. En una calle de 30 metros de larga queremos aparcar coches. Si cada coche necesita 4 metros:
a) ¿Cuántos coches puedo aparcar?
b) ¿Cuántos metros me sobran?

montón de12 monedas

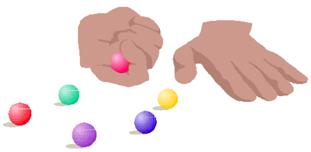


caja de cerillas

limpiadoras = mujer que trabaja limpiamdo

55. Un grupo de 9 amigos deciden coger en la playa unas barcas. En cada barca caben 4 personas.

a) ¿Cuántas barcas deben alquilar?
b) Si el precio del alquiler de cada barca es de 3 €, ¿cuánto le costará a cada uno de los amigos?



canicas

56. ¿Cuántos días son 7 semanas y 5 días?

57. En una partida con *canicas*, Juan empezó con 27 canicas. En la primera partida perdió 5 canicas, en la segunda ganó 3 canicas, en la tercera ganó 3 y en la cuarta partida ni ganó ni perdió. ¿Con cuántos canicas acabó Juan las 4 partidas?

58. Juan tiene tres hermanos y yo tengo el doble de hermanos que Juan. ¿Cuántos hermanos tengo yo?

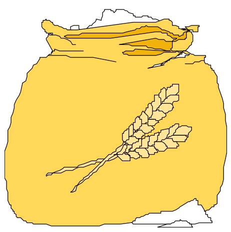
59. Completa la siguiente factura:

1 armario de madera	25.500 ptas
1 mesa de comedor de 0.90 x 1.80...........	42.300 ptas
6 sillas de comedor de madera a 6.000 ptas./unidad	
TOTAL A PAGAR...........	

Recuerda:
1 hora tiene 60 minutos
1 minuto tiene 60 segundos.

60. ¿Cuántos segundos tiene un día?

61. La suma de tres números es 12.725; los dos primeros suman 7.560 y el segundo es 2.349. ¿Qué números son?



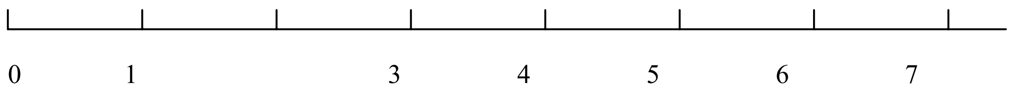
saco de trigo

62. Un camión transporta 95 *sacos de trigo* de 68 kilos cada uno y 67 sacos de arroz de 54 kilos cada uno. ¿Cuánto peso lleva?

63. 19 Kg. de café me han costado 76 €. ¿Cuánto dinero costarán 13 kilos de café?

SOLUCIONES

1. a) veintisiete
   b) treinta y uno
   c) ciento veintiocho
   d) ochocientos noventa y cuatro
   e) mil veintitrés
   f) cinco mil cuatrocientos setenta y uno
   g) seis mil seis
   h) setenta y tres mil cuatrocientos veinticinco
   i) ciento cincuenta mil
   j) cuatrocientos cincuenta y ocho mil novecientos setenta y cinco
   k) dos millones ochocientos cuarenta y nueve mil cuatrocientos noventa y cinco
   l) cuatro millones quinientos sesenta y siete mil ochocientos noventa.
2. a) 643 025 b) 1 427 006 c) 125 d) 2 000 523 e) 978 009
3. $1 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7$



4. a) 3 y 5 $\rightarrow 3 < 5$ b) 4 y 1 $\rightarrow 4 > 1$
   c) 0 y 7 $\rightarrow 0 < 7$ d) 127 y 81 $\rightarrow 127 > 81$
   e) 1571 y 2438 $\rightarrow$ 1 571 < 2 438 f) 404 y 505 $\rightarrow 404 < 505$
5. a) 627 = 6 centenas, 2 decenas y 7 unidades
   b) 2431 = 2 unidades de millar, 4 centenas, 3 decenas y una unidad
   c) 7272 = 7 unidades de millar, 2 centenas, 7 decenas y 2 unidades
   d) 1432 = 1 unidad de millar, 4 centenas, 3 decenas y 2 unidades
   e) 152 = 1 centena, 5 decenas y 2 unidades
   f) 1 500 002 = 1 unidad de millón, 5 centenas de millar y 2 unidades
   g) 1032 = 1 unidad de millar, 3 decenas y 2 unidades
6. a) $11 < 17 < 43 < 228 < 341 < 431 < 1.043$.
   b) $528 > 521 > 347 > 341 > 333 > 231$.
7. 195, 294, 384, 555, 654.
8. 666, 275, 448, 166, 284.
9. 6275, 7160, 8251, 9040, 4090.
10.

347	1024	127	609
+ 128	- 531	+ 541	- 240
475	493	668	369

11. a) 2437 – 1092 = 1345 b) 1047 – 298 = 749 c) $1024 \times 86 = 88\ 064$
    d) $953 \times 953 = 908\ 209$ e) 128 421+27 581 = 156 002
12. a) 42 € b) 101 € c) 60 €
13. 1.020 Km.
14. El instituto se terminó en 1.982
15. 5 €.
16. 4.500 litros.
17. 9 osos.
18. 7 €.
19. 135 pinos.
20. 7 huevos.
21. Es mayor Mari Trini. La diferencia es de 22 años.
22. Pesa más María. La diferencia es de 5 kilos.
23. En 1.995.
24. 15 €.
25. 52 fotos.
26. 26 alumnos.
27. 107 pinos.
28. 5 asientos.
29. 9 alumnos no se han bañado.
30. 9 dulces.
31. Hay que cortar 30 cm. de largo y 10 cm. de ancho.

32. a) 862 b) 2.468 c) 94
33. a) 168 b) 201 c) 180
34. a) 617 b) 28 c) 4523
35. 30 años.
36. 15 €.
37. 20 juegos.
38. 10 €.
39. 40 monedas.
40. 70 naranjos.
41. 65 litros.
42. 80 litros.
43. 52 pisos.
44. 800 cerillas.
45. 40 lápices.
46. 28 días.
47. a) 52 patas b) 90 patas.
48. 4 coches.
49. Da 7 caramelos a cada amiga y le sobran 3 caramelos.
50. 7 € gasta cada uno.
51. 6 problemas cada día.
52. Sí caben todas las fotos, necesitaré 15 páginas.
53. 5 habitaciones cada limpiadora.
54. a) 7 coches b) 2 metros.
55. a) 3 barcos b)1 € paga cada persona.
56. 33 días
57. 28 canicas.
58. Seis hermanos.
59.

1 armario de madera de pino.................. 25.500 ptas.

1 mesa de comedor de 0.90 x 1.80 .... 42.300 ptas.

6 sillas de comedor de pino a
6.000 ptas./unidad .... 36.000 ptas.

TOTAL A PAGAR........... 103.800 ptas.

60. 86 400 segundos
61. El primer número es 5211 y el tercero es 5165.
62. 10 078 kilos.
63. 52 €.

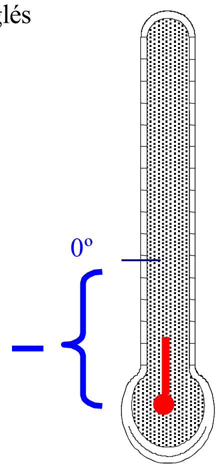
TEMA II:
LOS NÚMEROS ENTEROS

Autores:
José Luis Camacho Navas
Mª Belén Ramírez Hellín

LOS NÚMEROS ENTEROS

Los números naturales no valen para todas las situaciones de la vida. Por ejemplo seguro tú has visto un ascensor. El ascensor tiene números negativos (-), por ejemplo -1, -2, -3 que quiere decir *sótanos* de un edificio; la temperatura también puede ser negativa, ejemplo -10º, -11º, -3º, que quiere decir "menos de 0".

sótano = pisos bajo tierra. Ejemplo: garaje de coches en El Corte Inglés



los números -1, -2, -3, ... se llaman números **negativos** y los números 1, 2, 3, ... se llaman números **positivos**.

Los números negativos se leen:
-1 → menos uno
-2 → menos dos
...

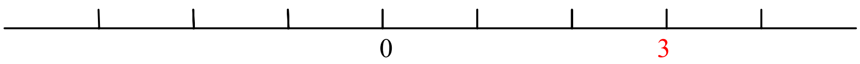
Los números naturales no valen para eso, necesitamos otros números: los números enteros. El conjunto de números enteros se llama Z y son los números 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3 ...

$$Z = \{......, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

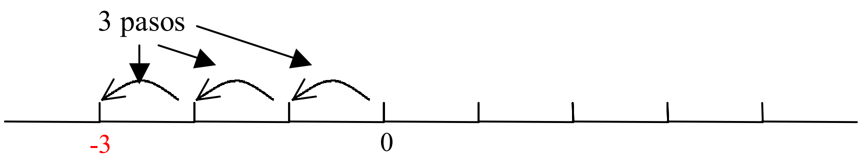
Los números como 3 y -3 o 4 y -4 o 7 y -7 son iguales pero tienen distinto signo: se dice que son **opuestos**.

En el tema anterior ya hemos dibujado los números naturales en una recta. Ahora podemos hacer igual con los números enteros. Los números negativos quiere decir pasos a la izquierda del 0 y positivos quiere decir pasos a la derecha del 0.

Ejemplo: para dibujar número 3, hacemos 3 pasos a la derecha del 0



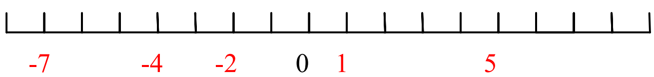
y para dibujar número –3, contar 3 pasos a la izquierda del 0.



Gracias al dibujo, podemos ordenar los números, igual que antes con los números naturales.

Para ordenar números -7, -2, 5, -4 y 1:

primero dibujar en una recta



y ahora leer de izquierda a derecha (⟶):

- 7 después -4 después -2 después 1 después 5

$$-7 < -4 < -2 < 1 < 5$$

se dice

- 7 menor que -4 menor que -2 menor que 1 menor que 5

< se dice **menor que**

> se dice **mayor que**

LOS NÚMEROS ENTEROS

Con los números naturales no podemos describir todas las situaciones que se presentan en la vida diaria. Así, por ejemplo, puede que en un ascensor veamos los números -1, -2, -3 para indicar los sótanos de un edificio o que al decir la temperatura de un determinado lugar nos digan que hay -10º.

A los números -1, -2, -3, ... se les llama números **negativos** y a los números 1, 2, 3, ... se les llama números **positivos**.

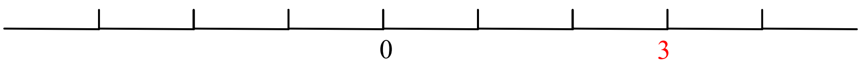
Para resolver situaciones como éstas se utilizan los números enteros que se representan por Z y son 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...

$$Z = \{......, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

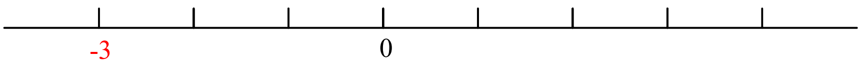
Los números como 3 y -3 o 4 y -4 o 7 y -7 que son iguales pero con distinto signo se dice que son **opuestos**.

Igual que representamos sobre una recta los números naturales, también podemos representar sobre una recta los números enteros. El proceso será el mismo pero si el número es negativo contaremos desde cero hacia la izquierda y si es positivo de cero hacia la derecha.

Por ejemplo, para representar el número 3 mediremos tres unidades a la derecha del cero

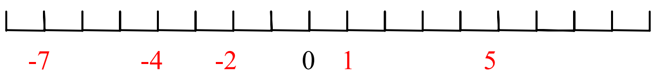


y para representar el número -3 mediremos tres unidades de longitud a la izquierda del cero.



A partir de esta representación podemos ordenar una serie de números igual que lo hacíamos en los números naturales.

Así, para ordenar los números -7, -2, 5, -4 y 1 los representaremos sobre una recta



y ahora leemos de izquierda a derecha:

- 7 después -4 después -2 después 1 después 5

$$-7 < -4 < -2 < 1 < 5$$

que se lee

- 7 menor que -4 menor que –2 menor que 1 menor que 5

Recuerda que:

número sin signo = número positivo

ejemplo:
5 = + 5

OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS

SUMA:
Para sumar dos números enteros primero mira el signo.

- Cuando los dos números tienen el mismo signo, (+ + ó - -) primero sumar los números y después copiar el signo.

Ejemplos:

2 + 3 = 5

positivo positivo → se suman (2+3) y se pone el signo +

(-2) + (-3) = -5

negativo negativo → se suman (2+3) y se pone el signo -

- Cuando los dos números tienen signo distinto (+ -), primero se restan los números (número grande – número pequeño) y después poner el signo del número grande.

Ejemplos:

(2) + (-3) = -1

positivo negativo → se restan (3-2 =1) ¿signo? mismo del número grande
-3 (negativo) (2) + (-3) = -1

(-2) + 3 = 1

negativo positivo→ se restan (3-2=1) ¿signo? mismo del número grande
+ 3 (positivo) (-2) + 3 = +1

Otros ejemplos:
3 + (-1) = 2; (-7) + 9 = 2; 7 + (-10) = -3

Para sumar varios números, se suman separados en grupos; se hace un grupo con números positivos y un grupo con números negativos. Después restar grupo grande menos (-) grupo pequeño, ¿signo? el mismo del grupo grande.

Ejemplo:

2 + (-1) + 3 + (-5) + 4 + 6 + (-8)

Grupo positivos: 2, 3, 4 y 6 → la suma es 15
Grupo negativos: (-1), (-5) y (-8) → su suma es (-14)

Ahora restar los dos grupos → 15- 14 = 1 y signo el mismo del grupo grande: + 15

2 + (-1) + 3 + (-5) + 4 + 6 + (-8) = 15 + (-14) = +1

Vamos a calcular ahora (-3) + (-7) + 2 + (-8) + 1 + 10 + (-13)

(-3) + (-7) + 2 + (-8) + 1 + 10 + (-13) = 13 + (-31) = -18

OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS

SUMA:
Para sumar dos números enteros nos fijaremos primero en su signo.

- Si los dos números tienen igual signo, sumaremos los números sin tener en cuenta el signo y copiaremos el signo.

Ejemplos:
a) 2 + 3 = 5
los números a sumar son 2 y 3 que son ambos positivos, entonces los sumaremos y pondremos al resultado el signo positivo.

b) (-2) + (-3) = -5
los números a sumar son (-2) y (-3) que son ambos negativos, entonces los sumaremos y pondremos al resultado el signo negativo.

- Si los dos números tienen distinto signo, restaremos los números sin tener en cuenta el signo (el mayor menos el menor) y pondremos el signo del mayor.

Ejemplos:
a) (2) + (-3) = -1
los números a sumar son 2 y (-3) que tienen distinto signo, 2 es positivo y (-3) es negativo por tanto, restaremos sin considerar los signos.

Si no consideramos los signos, 3 es mayor que 2 luego restamos 3 menos 2 que da 1. Como el mayor (sin signo) es 3 que viene de quitar el signo a (-3) que es negativo el resultado será negativo.

b) (-2) + 3 = 1
los números a sumar son (-2) y 3 que tienen distinto signo, (-2) es negativo y 3 es positivo por tanto, restaremos sin considerar los signos.

Si no consideramos los signos, 3 es mayor que 2 luego restamos 3 menos 2 que da 1. Como el mayor (sin signo) es 3 que viene de 3 que es positivo el resultado será positivo.

Otros ejemplos:
3 + (-1) = 2;   (-7) + 9 = 2;   7 + (-10) = -3

Si lo que queremos es sumar varios números, sumaremos por una parte todos los positivos y por otra todos los negativos. Después restaremos estos dos resultados poniendo el signo del mayor.

Ejemplos:
a) 2 + (-1) + 3 + (-5) + 4 + 6 + (-8)

los números positivos son 2, 3, 4 y 6 y su suma es 15
los números negativos son (-1), (-5) y (-8) y su suma es (-14)
Ahora restamos los dos resultados sin signo 15 - 14 = 1 ponemos el signo del mayor que es positivo.

2 + (-1) + 3 + (-5) + 4 + 6 + (-8) = 15 + (-14) = 1

b) Vamos a calcular ahora (-3) + (-7) + 2 + (-8) + 1 + 10 + (-13)

(-3) + (-7) + 2 + (-8) + 1 + 10 + (-13) = 13 + (-31) = -18

Recuerda que:
número opuesto = cambiar signo

Ejemplos:
3 opuesto –3
-5 opuesto +5
.....

RESTA:
Restar dos números enteros ¿Cómo se hace?:
Primer número + opuesto del segundo número

Ejemplos:
a) 2 – 3
3 opuesto → (-3), entonces: 2 – 3 = 2 + (-3) = -1

b) 2 - (-3)
(-3) opuesto → 3, entonces: 2 - (-3) = 2 + 3 = 5

Otros ejemplos:
(-2) - (-5) = (-2) + 5 = 3
(-4) - 8 = (-4) + (-8) = -12

Cuando hay varias sumas y restas, primero cambiar todo a sumas y después hacer igual que el ejemplo de arriba.

Ejemplos:
a) Para hacer (-4) - 8 - (-1) + (-3) - (-9) + 6 cambiar restas a sumas:

(-4) - 8 -(-1) + (-3) -(-9) + 6 = (-4) +(-8) +(1) + (-3) + (9) + 6

hacer la suma (-4) + (-8) + (1) + (-3) + (9) + 6 y ahora sumar cada grupo, los positivos en un grupo y los negativos en otro grupo:

(-4) + (-8) + (1) + (-3) + (9) + 6 = 16 + (-15) = 1

b) Ahora vamos a calcular: 4 -6 + 5 -8 + 9 -10 - (-4)

4 - 6 + 5 - 8 + 9 - 10 - (-4) = 4 + (-6) + 5 + (-8) + 9 + (-10) + (4)
4 + (-6) + 5 + (-8) + 9 + (-10) + (4) = 22 + (-24) = -2

PRODUCTO = MULTIPLICACIÓN

***PRODUCTO*:**
Para multiplicar dos números enteros, primero multiplicar los números sin signo y después multiplicar signos. ¿Cómo? Hay estas reglas:

Regla	La regla quiere decir	Ejemplo
+ · + = +	Positivo x positivo = positivo	(+2) · (+ 3) = (+6)
- · - = +	negativo x negativo = positivo	(-2) · (- 3) = (+6)
+ ·- = -	positivo x negativo = negativo	(+2) · (- 3) = (-6)
- · + = -	negativo x positivo = negativo	(-2) · (+ 3) = (-6)

Otros ejemplos:
(-4) · (-8) = (+32); 6 · (-5) = (-30)

Para multiplicar varios números, multiplicar primero todos los números y *aparte* multiplicar los signos.

aparte = separado, en otro sitio

Ejemplo:
Multiplicar 2 · (-3) · 4 · (-5) · (-1):
primero el producto de números, sin signo: 2 · 3 · 4 · 5 · 1 = 120
y después multiplicar signos: + · - · + · - · - = -

Entonces la solución de 2 · (-3) · 4 · (-5) · (-1) = - 120

RESTA:
Para restar dos números enteros sumaremos al primero el opuesto del segundo.

Ejemplos:
a) 2 - 3
El opuesto de 3 es (-3), por tanto: 2 - 3 = 2 + (-3) = -1

b) 2 - (-3)
El opuesto de (-3) es 3, por tanto: 2 - (-3) = 2 + 3 = 5

Otros ejemplos:
(-2) - (-5) = (-2) + 5 = 3
(-4) - 8 = (-4) + (-8) = -12

Cuando tenemos que realizar varias sumas y restas, podemos trasformar primero todo en sumas y después hacerlo como ya habíamos visto antes.

Ejemplos:
a) Para hacer (-4) - 8 - (-1) + (-3) - (-9) + 6 trasformaremos todas las restas en sumas:
(-4) - 8 - (-1) + (-3) - (-9) + 6 = (-4) + (-8) + (1) + (-3) + (9) + 6

y ahora hacemos la suma (-4) + (-8) + (1) + (-3) + (9) + 6 sumando por una parte todos los positivos y por otra todos los negativos:
(-4) + (-8) + (1) + (-3) + (9) + 6 = 16 + (-15) = 1

b) Vamos a calcular ahora 4 -6 + 5 -8 + 9 -10 - (-4)
4 - 6 + 5 - 8 + 9 - 10 - (-4) = 4 + (-6) + 5 + (-8) + 9 + (-10) + (4)
4 + (-6) + 5 + (-8) + 9 + (-10) + (4) = 22 + (-24) = -2

PRODUCTO:
Para multiplicar dos números enteros se multiplican los números sin signo y después se multiplican los signos según las siguientes reglas:

Regla	**La regla significa**	**Ejemplo**
+ · + = +	positivo por positivo da positivo	(+2) · (+ 3) = (+6)
- · - = +	negativo por negativo da positivo	(-2) · (- 3) = (+6)
+ ·- = -	positivo por negativo da negativo	(+2) · (- 3) = (-6)
- · + = -	negativo por positivo da negativo	(-2) · (+ 3) = (-6)

Otros ejemplos:
(-4) · (-8) = (+32); 6 · (-5) = (-30)

Si queremos multiplicar varios números, multiplicaremos por un lado todos los números sin signo y por otro los signos.

Ejemplo:
Para hacer la multiplicación 2 · (-3) · 4 · (-5) · (-1) haremos por una parte el producto de los números sin signo 2 · 3 · 4 · 5 · 1 = 120 y por otra el producto de los signos: + · - · + · - · - = -

Por tanto el resultado es 2 · (-3) · 4 · (-5) · (-1) = - 120

También se puede hacer paso a paso. El primer número x el segundo número, después × el otro número, ... hasta el último.

Ejemplo:
$2 \cdot (-3) \cdot 4 \cdot (-5) \cdot (-1) = (2 \cdot (-3)) \cdot 4 \cdot (-5) \cdot (-1) = (-6) \cdot 4 \cdot (-5) \cdot (-1) =$
$((-6) \cdot 4) \cdot (-5) \cdot (-1) = (-24) \cdot (-5) \cdot (-1) = ((-24) \cdot (-5)) \cdot (-1) = (120) \cdot (-1) =$
$((120) \cdot (-1)) = -120$

DIVISIÓN:
Para dividir dos números enteros, primero hacer la división normal, sin signo, y después dividir los signos, ¿cómo? Con estas reglas:

Reglas división = reglas producto.

Regla	La regla quiere decir	Ejemplo
+: + = +	positivo entre positivo da positivo	(+6) : (+ 3) = (+2)
- : - = +	negativo entre negativo da positivo	(-6) : (- 3) = (+2)
+ : - = -	positivo entre negativo da negativo	(+6) : (- 3) = (-2)
- : + = -	negativo entre positivo da negativo	(-6) : (+ 3) = (-2)

POTENCIAS DE BASE ENTERA Y EXPONENTE NATURAL

Cuando tenemos números como por ejemplo: 2^3; $(-5)^2$; 7^0; $(-2)^0$; 4^0; 4^2 o 3^4 hacemos una operación que se llama **potencia**.

Los números 2; (-5); 7; (-2); 4 o 3 se llaman **base** de la potencia y los números 3; 2; 0 y 4 se llaman **exponentes** de la potencia.

Para hacer potencias, tú tienes que saber:

– Si el exponente es 0 el resultado es siempre = 1

$7^0 = 1$ $(-2)^0 = 1$ $4^0 = 1$ $527^0 = 1$

– Si el exponente es positivo, multiplicar base x base x base ... ¿cuántas veces? el número del exponente.

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$	Multiplicamos 3 veces el 2
$(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$	Multiplicamos 2 veces el (-5)
$4^2 = 4 \cdot 4 = 16$	Multiplicamos 2 veces el 4
$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$	Multiplicamos 4 veces el 3

Cuando haces potencias, hay algunas propiedades (normas) para hacer el cálculo más rápido:

Mira:

$2^3 \cdot 2^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 128$

$2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 216$

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, quiere decir que para multiplicar dos potencias con base igual, ¿cómo se hace? copiar base y sumar exponentes.

   $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 128$

2. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$, si los exponentes son iguales → ¿Cómo? Se multiplican las bases (a · b) y se copia el exponente

   $2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 3)^3 = 6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

También podemos hacer la multiplicación de varios números multiplicando primero los dos primeros, después el resultado por el siguiente y así sucesivamente.

Ejemplo:

$2 \cdot (-3) \cdot 4 \cdot (-5) \cdot (-1) = (2 \cdot (-3)) \cdot 4 \cdot (-5) \cdot (-1) = (-6) \cdot 4 \cdot (-5) \cdot (-1) = ((-6) \cdot 4) \cdot (-5) \cdot (-1) = (-24) \cdot (-5) \cdot (-1) = ((-24) \cdot (-5)) \cdot (-1) = (120) \cdot (-1) = ((120) \cdot (-1)) = -120$

DIVISIÓN:

Para dividir dos números enteros se dividen los números sin signo y después se dividen los signos según las siguientes reglas.

Observa que estas reglas son las mismas que las usadas para el producto.

Regla	La regla significa	Ejemplo
+ : + = +	Positivo entre positivo da positivo	(+6) : (+ 3) = (+2)
- : - = +	Negativo entre negativo da positivo	(-6) : (- 3) = (+2)
+ : - = -	Positivo entre negativo da negativo	(+6) : (- 3) = (-2)
- : + = -	Negativo entre positivo da negativo	(-6) : (+ 3) = (-2)

POTENCIAS DE BASE ENTERA Y EXPONENTE NATURAL

Cuando tenemos expresiones como: 2^3; $(-5)^2$; 7^0; $(-2)^0$; 4^0; 4^2 o 3^4 se dice que estamos haciendo una operación llamada potencia.

A los números 2; (-5); 7; (-2); 4 o 3 se les llama **base** de la potencia y a los números 3; 2; 0 y 4 se les llama **exponentes** de la potencia.

Para realizar esta operación debes saber que:

- Si el exponente es 0 el resultado es siempre 1

  $7^0 = 1$ $(-2)^0 = 1$ $4^0 = 1$ $527^0 = 1$

- Si el exponente es positivo, hay que multiplicar la base por si misma tantas veces como indica el exponente.

  $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Multiplicamos 3 veces el 2
  $(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$ Multiplicamos 2 veces el (-5)
  $4^2 = 4 \cdot 4 = 16$ Multiplicamos 2 veces el 4
  $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ Multiplicamos 4 veces el 3

Cuando se trabaja con potencias es interesante usar, si se puede, las siguientes propiedades:

3. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, esto quiere decir que si multiplicamos dos potencias de igual base, podemos copiar la base y sumar los exponentes.

   $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 128$

4. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$, esto quiere decir que si multiplicamos dos potencias de igual exponente, podemos multiplicar las bases y copiar el exponente.

   $2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 3)^3 = 6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

Observa que:

$2^3 \cdot 2^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 128$

$2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 216$

$\frac{2^4}{2^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{16}{8} = 2$

$\frac{6^3}{3^3} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 6}{3 \cdot 3 \cdot 3} == \frac{216}{27} = 8$

$(2^2)^5 = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 1024$

JERARQUÍA = orden

5. $a^n : a^m = a^{n-m}$, división con base igual → se copia la base y se restan los exponentes

   $2^4 : 2^3 = 2^{4-3} = 2^1 = 2$

6. $a^n : b^n = (a : b)^n$, división con exponente igual → se dividen las bases (a:b) y se copia el exponente.

   $6^3 : 3^3 = (6 : 3)^3 = 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

7. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$, una potencia elevada (↑) a otra potencia → se copia la base y se multiplican los exponentes

   $(2^2)^5 = 2^{2 \cdot 5} = 2^{10} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 1024$

JERARQUÍA DE OPERACIONES

Para hacer una operación con sumas, restas, productos, divisiones y potencias, recuerda, tú debes seguir un orden:

1º potencias
2º multiplicaciones y divisiones
3º sumas y restas

El orden puede cambiar, ¿cómo? Con paréntesis ( ) y corchetes [ ]. Los dos mandan igual.

Cuando por ejemplo hay varios ( ) o [ ], ¿cuál se hace primero? primero se hace el que está más dentro.

Ejemplos:

1. Queremos hacer operación:

   $(-44) + 11 \cdot (-3 + 1) - (-3)^3$

   vemos que hay sumas, productos y potencias. También hay paréntesis y dentro hay una suma. Entonces, primero hacer los paréntesis.

   $(-44) + 11 \cdot (-3 + 1) - (-3)^3 = (-44) + 11 \cdot (-2) - (-3)^3 =$

   Paréntesis ya fin, ahora hacer la potencia:

   $= (-44) + 11 \cdot (-2) - (-3)^3 = (-44) + 11 \cdot (-2) - (-27) =$

   Ahora hay una suma, un producto y una resta, primero ¿cuál? el producto

   $= (-44) + 11 \cdot (-2) - (-27) = (-44) + (-22) - (-27) =$

   Por último, hacer las sumas y restas:

   $(-44) + (-22) - (-27) = (-66) - (-27) = (- 66) + (+27) = -39$

5. $a^n : a^m = a^{n-m}$, esto quiere decir que si dividimos dos potencias de igual base, podemos copiar las bases y restar los exponentes.

   $2^4 : 2^3 = 2^{4-3} = 2^1 = 2$

6. $a^n : b^n = (a : b)^n$, esto quiere decir que si dividimos dos potencias de igual exponente, podemos dividir las bases y copiar el exponente.

   $6^3 : 3^3 = (6 : 3)^3 = 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

7. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$, esto quiere decir que si tenemos una potencia elevada a otra potencia, podemos elevar la base al producto de ambas potencias.

   $(2^2)^5 = 2^{2 \cdot 5} = 2^{10} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 1024$

$$\frac{2^4}{2^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{16}{8} = 2$$

$$\frac{6^3}{3^3} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 6}{3 \cdot 3 \cdot 3} == \frac{216}{27} = 8$$

$(2^2)^5 = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 1024$

JERARQUÍA DE OPERACIONES

Si tienes que realizar una operación en la que aparecen sumas, restas, productos divisiones y potencias recuerda que el orden para hacerlas es el siguiente:

1º potencias
2º multiplicaciones y divisiones
3º sumas y restas

Este orden se puede modificar usando paréntesis y corchetes que tienen la máxima preferencia cuando vayas a hacer las operaciones.

Si hay varios paréntesis o corchetes tendrán preferencia los más internos.

Ejemplos:

1. Si queremos realizar la siguiente operación:

   $(-44) + 11 \cdot (-3 + 1) - (-3)^3$

   vemos que hay que realizar sumas, productos y potencias. Además existe un paréntesis dentro del cual hay una suma, por tanto, esto será lo primero que hay que hacer:

   $(-44) + 11 \cdot (-3 + 1) - (-3)^3 = (-44) + 11 \cdot (-2) - (-3)^3 =$

   Como ya no quedan paréntesis con operaciones dentro, tendremos que hacer la potencia:

   $= (-44) + 11 \cdot (-2) - (-3)^3 = (-44) + 11 \cdot (-2) - (-27) =$

   Si observamos la operación vemos que en ella hay una suma, un producto y una resta, por tanto, primero realizaremos el producto:

   $= (-44) + 11 \cdot (-2) - (-27) = (-44) + (-22) - (-27) =$

   Finalmente haremos las sumas y las restas:

   $(-44) + (-22) - (-27) = (-66) - (-27) = (- 66) + (+27) = -39$

2. Ejemplo para hacer:

$7 - [\ 10 + (2 - 3) \cdot 4 - 5] =$

Hay un corchete [ ] y un paréntesis ( ), pero más dentro ¿cuál? → ( ), entonces primero hacemos (2-3).

$7 - [\ 10 + (2 - 3) \cdot 4 - 5] = 7 - [\ 10 + (-1) \cdot 4 - 5] =$

Ahora hacer [ ]. Dentro hay suma, resta y multiplicación; Primero ¿cuál? la multiplicación.

$= 7 - [\ 10 + (-1) \cdot 4 - 5] = 7 - [\ 10 + (-1) \cdot 4 - 5] = 7 - [\ 10 + (-4) - 5] = 7 - [\ 1] = 6$

Cuando hay + · -, - (+ · -), etc... se usan las reglas del producto.

Ejemplo:

$-(-(-8)) + (-5) -(-(-(9))) = -8 - 5 - 9 = -22$

VALOR ABSOLUTO
Se escribe | |. Quiere decir el mismo número pero sin signo.

Ejemplos:

$|-3| = 3$ $|3| = 3$ $|7| = 7$

$|-4| = 4$ $|-5| = 5$ $|23457| = 23457$

al revés

a sí es múltiplo
a |b
0

a no es múltiplo
a |b
1

a |b
5

exacta = resto igual a cero

MÚLTIPLOS Y DIVISORES
Un número multiplicado por otros números → múltiplos.

Ejemplo:
Para saber múltiplos del 2. ¿Cómo se hace? Multiplicando por otros números

$2 \xrightarrow{\times 3} 6 \longrightarrow$ 6 es múltiplo de 2

$2 \xrightarrow{\times(-2)} -4 \longrightarrow$ -4 es múltiplo de 2

$2 \xrightarrow{\times 5} 10 \longrightarrow$ 10 es múltiplo de 2

$2 \xrightarrow{\times(-7)} -14 \longrightarrow$ -14 es múltiplo de 2

También se puede hacer *al revés*. Por ejemplo:
Tengo dos números **a** y **b**, y quiero saber si **a** es múltiplo de **b**,¿cómo se hace?
Divido **a**: **b**. → Si la división es *exacta,* entonces **a** sí es múltiplo de **b**.
→ Si la división no es *exacta* entonces **a** no es múltiplo de **b**

Ejemplos:

1. Quiero saber si 6 es múltiplo de 2. Hacemos la división.
El resto es 0, entonces 6 SÍ es múltiplo de 2.

6 |2
0 3

2. Supongamos que tenemos que realizar la operación:

   7 - [10 + (2 - 3) · 4 - 5] =

   Como hay un corchete y dentro un paréntesis, tendrá preferencia el más interno, es decir, el paréntesis:

   7 - [10 + (2 - 3) · 4 - 5] = 7 - [10 + (- 1) · 4 - 5] =

   Ahora realizaremos la operación del corchete. Como dentro del corchete hay sumas, productos y restas deberemos realizar esta operación en varios pasos, comenzando por el producto:

   = 7 - [10 + (- 1) · 4 - 5] = 7 - [10 + (- 1) · 4 - 5] =
   7 - [10 + (- 4) - 5] = 7 - [1] = 6

Si al realizar una operación aparecen varios signos (+ o -) podemos convertirlo en un único signo aplicando las reglas estudiadas en el producto:

Ejemplo:

-(-(-8)) + (-5) -(-(-(9))) = -8 - 5 -9 = -22

VALOR ABSOLUTO

Otra operación que podemos hacer con los números enteros es hallar su valor absoluto, que se escribe | |.

El valor absoluto de un número entero es el número que queda si eliminamos su signo.

Ejemplos:

$\vert -3 \vert = 3$	$\vert 3 \vert = 3$	$\vert 7 \vert = 7$
$\vert -4 \vert = 4$	$\vert -5 \vert = 5$	$\vert 23457 \vert = 23457$

MÚLTIPLOS Y DIVISORES

Si tomamos un número y lo vamos multiplicando por otros números obtenemos sus múltiplos.

Ejemplo:

Para hallar los múltiplos de 2, multiplicaremos 2 por otros números:

2 · 3 = 6	6 es un múltiplo de 2
2 · (-2) = -4	-4 es un múltiplo de 2
2 · 5 = 10	10 es un múltiplo de 2
2 · (-7) = -14	-14 es un múltiplo de 2

Si lo que queremos es averiguar si dado un número a es múltiplo de otro b, dividiremos a entre b. Si la división es exacta (da de resto 0) entonces a es múltiplo de b y en cualquier otro caso no.

Ejemplos:

1. Si queremos averiguar si 6 es múltiplo de 2, dividimos 6 entre 2. Como el resto es cero, 6 si es múltiplo de 2.

2. ¿128 es múltiplo de 2? Hacemos la división. El resto es 0, entonces 128 SÍ es múltiplo de 2.

3. ¿123 es múltiplo de 2?

   Hacemos la división y el resto es 1, entonces 123 NO es múltiplo de 2.

Cuando decimos que un número que se llama **a** es múltiplo de **b**, eso se puede decir de otra forma:

a es múltiplo de **b** = **a** es divisible por **b** = **b** es divisor de **a**

En los ejemplos de antes:

6 es múltiplo de 2 = 6 es divisible por 2 = 2 es divisor de 6. Y en el otro ejemplo, 128 es múltiplo de 2 = 128 es divisible por 2 = 2 es divisor de 128. Se puede decir de las tres formas.

Algunas veces, algunas veces no hace falta hacer la división, porque hay reglas que ayudan para saber directo si un número es múltiplo de otro número o no.

Las reglas más importantes son:

1. Un número es divisible por 2 si termina en 0 o en cifra par.

<u>Ejemplo</u>:

Son múltiplos de 2 (divisibles por 2) los números 1248; 470; 5126

par 0 par

No son múltiplos de 2 números como 123, 781, 5127

No par =impar

3 4 5

cifras

2. Un número es divisible por 3 si la suma de las *cifras* es divisible por 3.

   <u>Ejemplo</u>:

   137 no es divisible por 3 porque 1 + 3 + 7 = 11; 11: 3 = 3´.. no da exacto.
   1371 sí es divisible por 3 porque 1 + 3 + 7 + 1 = 12; 12: 3 = 4 da exacto.

82 |4
2 20

3. Un número es divisible por 4 si las dos últimas *cifras* son divisibles por 4.

48 |4
0 12

<u>Ejemplo</u>:

123782 no es divisible por 4 porque 82 entre 4 no da exacto.
56948 si es divisible por 4 porque 48 entre 4 da exacto.

4. Un número es divisible por 5 si termina en 0 o 5.

<u>Ejemplo</u>:
125; 1540 y 325 son divisibles por 5 porque terminan en 0 o 5.
123; 781 y 9472 no son divisibles por 5 porque no terminan en 0 o 5.

2. ¿128 es múltiplo de 2?

Hacemos la división y como el resto es 0, 128 si es múltiplo de 2.

3. ¿123 es múltiplo de 2?

Hacemos la división y como el resto es 1, 123 no es múltiplo de 2.

Cuando decimos que un número **a** es múltiplo de **b** también podemos decir que **a** es divisible por **b** o que **b** es divisor de **a**.

a es múltiplo de **b** = **a** es divisible por **b** = **b** es divisor de **a**

Así, en los ejemplos anteriores:

6 es múltiplo de 2 es lo mismo que decir que 6 es divisible por 2 o que 2 es divisor de 6. De la misma forma 128 es múltiplo de 2 es lo mismo que decir que 128 es divisible por 2 o que 2 es divisor de 128.

Aparte de hacer la división existen una serie de reglas para saber si un número es divisible por otro. Las más importantes de estas reglas son:

1. Un número es divisible por 2 si acaba en 0 o en cifra par.

   Ejemplo:

   Son múltiplos de 2 o divisibles por 2 los números 1248; 470; 5126 porque su última cifra 8; 0 y 6 son par o 0.

   No son múltiplos de 2 números como 123, 781, 5127 porque su última cifra 3; 1 y 7 no es par o 0.

2. Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es divisible por 3.

   Ejemplo:

   137 no es divisible por 3 porque 1 + 3 + 7 = 11 al dividirlo entre 3 no da exacto.
   1371 si es divisible por 3 porque 1 + 3 + 7 + 1 = 12 al dividirlo entre 3 da exacto.

3. Un número es divisible por 4 si sus dos últimas cifras son divisibles por 4

   Ejemplo:

   123782 no es divisible por 4 porque 82 entre 4 no da exacto.
   56948 si es divisible por 4 porque 48 entre 4 da exacto.

4. Un número es divisible por 5 si termina en 0 o 5.

   Ejemplo:
   125; 1540 y 325 son divisibles por 5 porque terminan en 0 o 5.
   123; 781 y 9472 no son divisibles por 5 porque no terminan en 0 o 5.

5. Un número es divisible por 10 si acaba en 0.

Ejemplo:

120; 1540 y 1300 son divisibles por 10 porque acaban en 0.
563; 1431 y 7652 no son divisibles por 10 porque no acaban en 0.

1 2 3 7 8 1

cifras de lugar impar las de color azul

cifras de lugar par las de color rojo

6. Un número es divisible por 11 cuando la suma de las cifras en lugar par – la suma de las cifras en lugar impar = 0 ó múltiplo de 11.

Ejemplo:

123781 suma de cifras en lugar par 1 + 3 + 8 = 12
suma de cifras en lugar impar 2 + 7 + 1 = 10 .
12 - 10 = 2 que no es 0 ni múltiplo de 11 → 123781 no es divisible por 11

374825 suma de cifras en lugar par 2 + 4 + 3 = 9
suma de cifras en lugar impar 5 + 8 + 7 = 20
20 - 9 = 11 que es múltiplo de 11→ 374825 sí es divisible por 11

NÚMEROS PRIMOS Y NÚMEROS COMPUESTOS

¿Qué es un número primo? →Un número que sólo es divisible por 1 y por él mismo. Los números que no son primos se llaman compuestos.

Ejemplo
13 es primo porque sólo se divide entre 1 $\begin{array}{r|l} 13 & 1 \\ \hline 0 & 13 \end{array}$ y él mismo $\begin{array}{r|l} 13 & 13 \\ \hline 0 & 1 \end{array}$
Si hacemos la división con otros números (:2, :3, :6, etc..) el resto no es 0.

Número	dividido entre	resto
13	2	1
13	3	1
13	4	1
13	5	3
13	6	1
13	7	6
13	8	5
13	9	4
13	10	3
13	11	2
13	12	1

Raíz cuadrada = $\sqrt{\ }$

128 no es primo, es compuesto porque se puede dividir por 2.
Para saber si un número es primo no hace falta hacer todas las divisiones entre los números menores que él, sólo divisiones entre los números menores o iguales que su *raíz cuadrada*.

Ejemplo:

Para saber si 151 es primo calculamos primero su *raíz cuadrada* que es 12.2, entonces hacemos las divisiones hasta el 12, más no hace falta.

5. Un número es divisible por 10 si acaba en 0.

Ejemplo:

120; 1540 y 1300 son divisibles por 10 porque acaban en 0.
563; 1431 y 7652 no son divisibles por 10 porque no acaban en 0.

6. Un número es divisible por 11 si la dferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugar par y la suma de las cifras que ocupan lugar impar es 0 o múltiplo de 11.

Ejemplo:

123781 no es divisible por 11 porque si sumamos las cifras que ocupan lugar par 1 + 3 + 8 = 12 y las que ocupan lugar impar 2 + 7 + 1 = 10 y restamos estos números 12 - 10 = 2 que no es 0 ni múltiplo de 11.

374825 si es divisible por 11 porque si sumamos las cifras que ocupan lugar par 3 + 4 + 2 = 9 y las que ocupan lugar impar 7 + 8 + 5 = 20 y restamos estos números 20 - 9 = 11 que es múltiplo de 11.

NÚMEROS PRIMOS Y NÚMEROS COMPUESTOS

Un número es **primo** si sólo es divisible por 1 y por el mismo. Un número es **compuesto** si no es primo.

Ejemplo:

13 es primo porque si vamos haciendo las divisiones y observando el resto tenemos que ningún resto es cero:

Número	dividido entre	resto
13	2	1
13	3	1
13	4	1
13	5	3
13	6	1
13	7	6
13	8	5
13	9	4
13	10	3
13	11	2
13	12	1

128 no es primo sino compuesto porque es divisible por 2.
Para saber si un número es primo no es necesario que pruebes a hacer todas las divisiones entre los números menores que él, sobra con que hagas las divisiones entre los números menores o iguales que su raíz cuadrada.

Ejemplo:

Para saber si 151 es primo calculamos primero su raíz cuadrada que es 12.2, por tanto tendremos que hacer las divisiones como mucho hasta el 12.

¿151 es divisible por 2, 3, 4, ...?
¿cómo lo sabes?
No hace falta dividir :2; :3; :4; ...
puedes usar las reglas de divisibilidad

Número	dividido entre	resto
151	2	1
151	3	1
151	4	3
151	5	1
151	6	1
151	7	4
151	8	7
151	9	7
151	10	1
151	11	8
151	12	7

resto = 0 no hay, entonces, 151 es primo.

DESCOMPOSICIÓN DE UN NÚMERO EN PRODUCTO DE FACTORES

Descomponer un número es poner el número = producto de números primos.

factores = divisores

Ejemplo
Vamos a descomponer 6480 en *factores* primos

$\begin{array}{r|l} 6480 & 2 \\ \hline 0 & 3240 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 3240 & 2 \\ \hline 0 & 1620 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 1620 & 2 \\ \hline 0 & 810 \end{array}$

$\begin{array}{r|l} 810 & 2 \\ \hline 0 & 405 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 405 & 2 \\ \hline 1 & 202 \end{array}$ no vale $\begin{array}{r|l} 405 & 3 \\ \hline 0 & 135 \end{array}$

$\begin{array}{r|l} 135 & 3 \\ \hline 0 & 45 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ \hline 0 & 15 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ \hline 0 & 5 \end{array}$

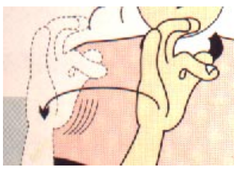
$$\begin{array}{r|l} 6480 & 2 \\ 3240 & 2 \\ 1620 & 2 \\ 810 & 2 \\ 405 & 3 \\ 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Este tema, al final, tiene una tabla con algunos números primos, pero los números primos más normales (que más se usan) son:
2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; ...

Entonces, 6480= $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5$

Vamos a descomponer en *factores* primos 13475

13475	5	13475 no es divisible por 2 ni por 3 pero sí por 5.
2695	5	
539	7	539 ya no es divisible por 5 probamos por el *siguiente*
77	7	número primo 7
11	11	11 ya no es divisible por 7, probamos con el *siguiente*
1		número primo, 11.



siguiente

Por tanto 13475 = $5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11 = 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11$

Número	dividido entre	resto
151	2	1
151	3	1
151	4	3
151	5	1
151	6	1
151	7	4
151	8	7
151	9	7
151	10	1
151	11	8
151	12	7

Para saber si es divisible 151 entre alguno de los factores puedes usar las reglas de divisibilidad en lugar de hacer la división y ver el resto.

Por tanto, 151 es primo.

DESCOMPOSICIÓN DE UN NÚMERO EN PRODUCTO DE FACTORES

Descomponer un número como producto de factores es poner ese número como producto sólo de números primos.

Al final de este tema tienes una tabla con los primeros números primos aunque al descomponer un número los que más vas a usar son:

2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; ...

<u>Ejemplo</u>:

Vamos a descomponer 6480 en factores primos:

6480	2	como 6480 acaba en 0, es divisible por 2 que es el primer
3240	2	número primo.
1620	2	
810	2	
405	3	405 ya no es divisible por 2, probamos por el siguiente
135	3	número primo 3.
45	3	
15	3	
5	5	5 ya no es divisible por 3, probamos con el siguiente nú-
1		mero primo, 5.

Por tanto $6480 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5$

Vamos a descomponer en factores primos 13475

13475	5	13475 no es divisible por 2 ni por 3 pero si lo es por 5.
2695	5	
539	7	539 ya no es divisible por 5 probamos por el siguiente
77	7	número primo 7
11	11	11 ya no es divisible por 7, probamos con el siguiente
1		número primo, 11.

Por tanto $13475 = 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11 = 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11$

MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

El máximo común divisor se escribe más corto = m. c. d.

El mínimo común múltiplo se escribe más corto = m. c. m.

Tenemos dos números y los descomponemos en factores. El Máximo común divisor (m. c. d.). ¿Cómo se hace?. Cogemos los factores ($\uparrow$ al número más pequeño) que están repetidos en los dos números, y los multiplicamos.

El mínimo común múltiple (m. c. m.) ¿Cómo se hace? Cogemos los factores que están repetidos ($\uparrow$ al número más grande) y los que no están repetidos y los multiplicamos

<u>Ejemplo</u>:

1. Halla el m. c. d. y m. c. m. de 36 y 24

Primero descomponemos los números

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Entonces:

$36 = 2^2 \cdot 3^2$
$24 = 2^3 \cdot 3^1$

m. c. d (36 y 24) $\rightarrow$ números repetidos (el 2 y el 3), elevados ($\uparrow$ arriba) al número más pequeño: 2^2 y 3^1.

Entonces el m. c. d.= $2^2 \cdot 3 =$ **12**

m. c. m. (36 y 24) $\rightarrow$ $\underbrace{\text{números repetidos}}$ $\underbrace{\text{y no repetidos}}$

$\uparrow$ al número más grande

2^2 y 2^3 (no hay)

2 y 3, el más grande es 3, entonces cogemos 2^3.

3^2 y 3^1

2 y 1, el más grande es 2, entonces cogemos 3^2

Entonces el m. c. m = $2^3 \cdot 3^2 =$ **72**

2. Vamos a calcular ahora el m. c. d. y el m. c. m. de 27 y 8

$$\begin{array}{r|l} 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

Entonces:

$27 = 3^3$
$8 = 2^3$

Recuerda:
Si no hay factores comunes$\rightarrow$ m. c. d. = 1

No hay números repetidos, entonces el m. c. d. = 1 y el m. c. m. = $3^3 \cdot 2^3 = 216$

MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

Si tenemos dos números y los descomponemos en factores, llamamos :

Máximo común divisor de estos dos números a otro número que se obtiene al multiplicar todos los factores comunes de estos dos números elevados al menor exponente.

Mínimo común múltiplo de estos dos números a otro número que se obtiene al multiplicar todos los factores comunes y no comunes de estos dos números elevados al mayor exponente.

<u>Ejemplos</u>:

1. Halla el Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de 36 y 24

   Primero descomponemos los dos números en factores:

   $$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

   Luego:

   $36 = 2^2 \cdot 3^2$
   $24 = 2^3 \cdot 3^1$

   Los factores comunes son 2 y 3. El exponente de 2 en la descomposición de 36 es 2 y en la descomposición de 24 es 3, por tanto el menor exponente de 2 es 2. De la misma forma, el exponente de 3 en la descomposición de 36 es 2 y en la descomposición de 24 es 1, por tanto el menor exponente de 3 es 1.

   Luego el m. c. d. (36, 24) = $2^2 \cdot 3^1 = 12$

   Los factores comunes son los mismos y factores no comunes no hay. El mayor exponente de 2 es 3 y el mayor exponente de 3 es 2.

   Luego el m. c. m. (36, 24) = $2^3 \cdot 3^2 = 72$

2. Vamos a hallar ahora el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de 27 y 8.

   $$\begin{array}{r|l} 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

   Luego:

   $27 = 3^3$
   $8 = 2^3$

   Factores comunes no hay, por tanto el m. c. d. (27, 8) = 1

   Los factores no comunes son el factor 3 que aparece sólo en la descomposición del 27 y el factor 2 que aparece sólo en la descomposición del 8. Para hallar el m. c. m. cogeremos estos factores con el mayor exponente que aparezcan.

   Luego el m. c. m. (27, 8) = $3^3 \cdot 2^3 = 216$

El máximo común divisor se escribe como **m. c. d.**
y el mínimo común múltiplo como
m. c. m.

Recuerda:

Cuando no hay factores comunes el m. c. d. siempre es 1.

Si queremos calcular el m. c. d. y el m. c. m. de varios números, se hace igual.

<u>Ejemplo</u>:
Calcular el m. c. d. y el m. c. m. de 210, 726 y 60

$$\begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 726 & 2 \\ 363 & 3 \\ 121 & 11 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Entonces:

$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
$66 = 2 \cdot 3 \cdot 11^2$
$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

m. c. d. → números repetidos ($\overbrace{\underbrace{2;\ 2;\ 2^2}_{\text{cogemos el más pequeño} \to 2}}^{2}$ y $\overbrace{\underbrace{3;\ 3;\ 3}_{\text{cogemos el más pequeño} \to 3}}^{3}$)

m. c. d. = 2 · 3 = 6

m. c. m.→ $\overbrace{\text{2 y 3}}^{\text{números repetidos}}$ y $\overbrace{\text{5, 7 y 11}}^{\text{números no repetidos}}$

$\overbrace{\underbrace{2;\ 2;\ 2^2}_{2^2}}^{2}$ $\overbrace{\underbrace{3;\ 3;\ 3}_{3}}^{3}$ $\overbrace{\underbrace{5;\ 5}_{5}}^{5}$ $\underbrace{7}_{7}$ $\overbrace{\underbrace{11^2}_{11^2}}^{11}$

el más grande 2^2 3 5 7 11^2

m. c. m. = $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 = 50820$

Si queremos hallar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de varios números procederemos de la misma forma.

<u>Ejemplo</u>:

Para calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de 210, 726 y 60, hallamos primero su descomposición:

$$\begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 726 & 2 \\ 363 & 3 \\ 121 & 11 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Luego:

$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
$66 = 2 \cdot 3 \cdot 11^2$
$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

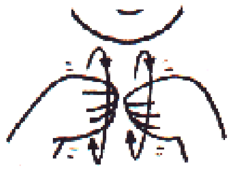
Para hallar el m. c. d. vemos que los factores comunes a los tres números son el 2 y el 3. El menor exponente de 2 es 1 y el menor de 3 es 1, luego:

m. c. d. $(210, 726, 60) = 2 \cdot 3 = 6$

Para hallar el m. c. m. tenemos que los factores comunes a los tres números son el 2 y el 3. El mayor exponente de 2 es 2 y el mayor exponente de 3 es 1. Además 5, 7 y 11 son factores no comunes a los tres y sus mayores exponentes son 1, 1 y 2, luego:

m. c. m. $(210, 726, 60) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 = 50820$

PROBLEMAS RESUELTOS

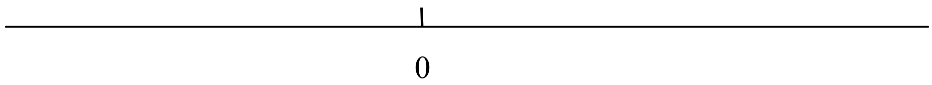


1. Di el opuesto de: -1, 3, -5, 7, -8, 0

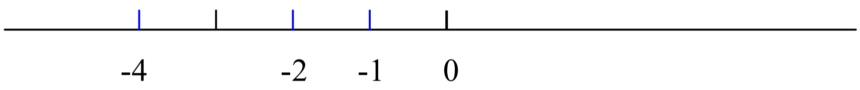
Solución
-1, signo negativo, **opuesto 1** (signo positivo)
3, signo positivo, **opuesto –3** (signo negativo)
-5, signo negativo, **opuesto 5** (signo positivo)
7, signo positivo, **opuesto –7** (signo negativo)
-8, signo negativo, **opuesto 8** (signo positivo)
0, **opuesto 0** (+0 y –0 igual número)

2. Representa sobre una recta los números: -2, 3, -4, -1, 7.

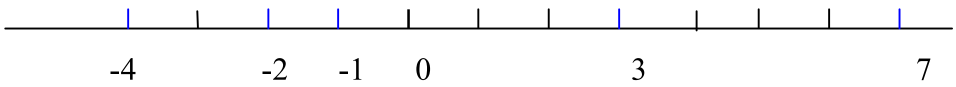
Solución
Dibujamos una recta y ponemos un punto = 0



Para dibujar -2, -4 y –1, números negativos, ¿cuántos pasos a la izquierda? según el número, número -4 → 4 pasos, número -2 → 2 pasos

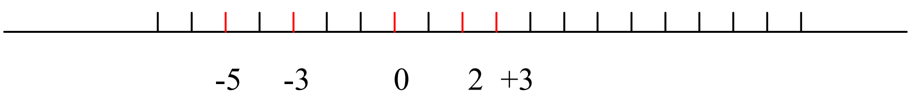


Para dibujar 3 y 7, números positivos, ¿cuántos pasos a la derecha? según el número. Número 3 → 3 pasos, número 7 → 7 pasos.



3. Ordena los siguientes conjuntos de números:
a) -5, +3, 2, -3, 0
b) 4, -1, 8, -3, -4
c) 11, -5, 15, 6, -10

Solución
a) Para ordenar números -5, +3, 2, -3, 0, primero dibujar en una recta



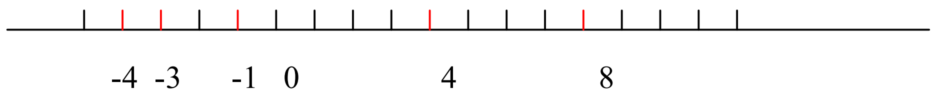
Ahora leer de izquierda a derecha

-5 después –3 después 0 después 2 después +3
-5 < -3 < 0 < 2 < +3

Recuerda que:

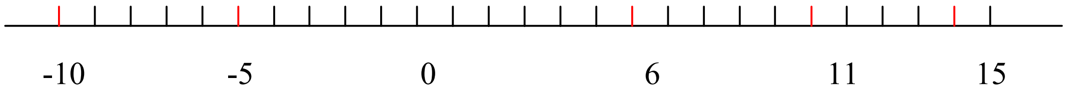
opuesto significa igual número, cambiar signo

b) Para ordenar números 4, -1, 8, -3, -4 primero dibujar en una recta



Entonces **–4 < -3 < -1 < 4 < 8**

c) Para ordenar números 11, -5, 15, 6, -10, primero dibujar en una recta



-10 < -5 < 6 < 11 < 15

Recuerda que:

mismo signo, sumar los números y copiar el signo

4. Realiza las siguientes operaciones:

a) + 2 + 3	b) - 5 - 8	c) - 1 - 7
d) 1 + 2	e) -5 - 4	f) + 5 + 4

Solución

a) + 2 + 3, sumar números 2 + 3 = 5 y copiar signo +
+ 2 + 3 = + 5

b) –5 –8, sumar números 5 + 8 = 13 y copiar signo -
- 5 – 8 = - 13

c) –1 – 7, sumar números 1 + 7 = 8 y copiar signo -
- 1 – 7 = - 8

d) 1 + 2, sumar números 1 + 2 = 3 y copiar signo +
1 + 2 = + 3

e) –5 – 4, sumar números 5 + 4 = 9 y copiar signo -
- 5 – 4 = - 9

f) +5 + 4, sumar números 5 + 4 = 9 y copiar signo +
+5 + 4 = + 9

Recuerda que:

signo distinto, restar (número grande – número pequeño), signo ¿cuál? el mismo del grande manda

5. Realiza las siguientes operaciones:

a) – 2 + 3	b) 2 – 3	c) –5 + 8
d) 7 – 8	e) 9 – 6	f) – 15 + 13

Solución

a) – 2 + 3, restar (número grande – número pequeño), 3 – 2 = 1, ¿qué signo? número grande es + 3, signo +
-2 + 3 = +1

b) 2 – 3, restar (número grande – número pequeño), 3 – 2 = 1, signo del número grande -
2 - 3 = -1

c) - 5 + 8, restar (número grande – número pequeño), 8 – 5 = 3, signo del número grande +

-5 + 8 = +3

d) 7 - 8, restar (número grande – número pequeño), 8 – 7 = 1, signo del número grande -

7 - 8 = - 1

e) 9 - 6, restar (número grande – número pequeño), 9 - 6 = 3, signo del número grande +

9 - 6 = +3

f) -15 + 13, restar (número grande – número pequeño), 15 – 13 = 2, signo del número grande -

-15 + 13 = -2

6. Realiza las siguientes operaciones:

a) -2 + 32 b) -32 - 41

c) - 47 + 54 d) 38 - 27

Solución

a) -2 + 32, signo distinto, restar (número grande – número pequeño), 32 – 2 = 30, signo del número grande +

-2 + 32 = +30

b) -32 – 41, mismo signo, sumar números 32 + 41 = 73 y copiar signo –

-32 - 41 = - 73

c) - 47 + 54 signo distinto, restar (número grande – número pequeño), 54 – 47 = 7, signo del número grande +

-47 + 54 = + 7

d) 38 - 27 signo distinto, restar (número grande – número pequeño), 38 - 27 = 11, signo del número grande +

38 – 27 = + 11

7. Realiza las siguientes operaciones:

a) - 2 + 4 - 7 + 21 - 18 + 13 b) - 1 - 3 + 5 + 4 - 8 + 7

c) 54 - 38 + 27 - 41 - 107 d) 100 - 50 + 25 - 27

Solución

a) - 2 + 4 - 7 + 21 - 18 + 13

Grupo de los números positivos: 4, 21 y 13 → la suma es 4+ 21+ 13 = +38

Grupo de los números negativos: -2, -7 y -18 → la suma es (-2) + (-7) + (-18) = -27

Ahora restar los dos grupos: 38 -27 = 11 y poner el signo del grupo grande: +

- 2 + 4 - 7 + 21 - 18 + 13 = + 11

b) - 1 - 3 + 5 + 4 - 8 + 7

Grupo de los números positivos: 5, 4 y 7 → la suma es 5 + 4 + 7 = +16
Grupo de los números negativos: -1, -3 y -8 → la suma es (-1)+(-3)+(-8)=-12
Ahora restar los dos grupos: 16 -12 = 4 y poner el signo del grupo grande: +

- 1 - 3 + 5 + 4 - 8 + 7 = + 4

c) 54 - 38 + 27 - 41 - 107

Grupo de los números positivos: 54 y 27 → la suma es 54 + 27 = + 81
Grupo de los números negativos: -38, -41 y -107 → su suma es: (-38) + (-41) + (-107) = (-186)
Ahora restar los dos grupos: 186 - 81 = 105 y poner el signo del grupo grande: -

54 - 38 + 27 - 41 – 107 = -105

d) 100 - 50 + 25 – 27

Grupo de los números positivos: 100 y 25 → la suma es 100 + 25 = +125
Grupo de los números negativos: -50 y -27 → la suma es: (-50)+(-27) = -77
Ahora restar los dos grupos: 125-77= 48 y poner el signo del grupo grande: +

100 - 50 + 25 – 27 = + 48

8. Realiza las siguientes operaciones:

a) (-2) · (-3) b) (-4) · (5)
c) (-7) · 2 · (-1) · 3 d) (-8) · 2 · (-3) · 4

Solución:

a) (- 2) . (- 3), multiplicar signos - · - = + y multiplicar números 2 · 3 = 6

(- 2) · (-3) = + 6

b) (-4) · (5), multiplicar signos - · + = - y multiplicar números 4 · 5 = 20

(-4) · (5) = -20

c) (-7) · 2 · (-1) · 3, multiplicar signos - · + · - · + = +
multiplicar números 7 · 2 · 1 · 3 = 42

(-7) · 2 · (-1) · 3 = + 42

d) (-8) · 2 · (-3) · 4, multiplicar signos - · + · - · + = +
multiplicar números 8 · 2 · 3 · 4 = 192

(-8) · 2 · (-3) · 4 = + 192

9. Realiza las siguientes operaciones:

$a)\ \frac{-8}{-2} \qquad b)\ \frac{27}{9} \qquad c)\ \frac{-81}{-3} \qquad d)\ \frac{-125}{5}$

Solución

a) $\frac{-8}{-2}$, dividir signos: - : - = + y dividir números 8 : 2 = 4

$$\frac{-8}{-2} = +4$$

b) $\frac{27}{9}$, dividir signos: + : + = + y dividir números 27 : 9 = 3

$$\frac{27}{9} = +3$$

c) $\frac{-81}{-3}$, dividir signos: - : - = + y dividir números 81 : 3 = 27

$$\frac{-81}{-3} = +27$$

d) $\frac{-125}{5}$, dividir signos: - : + = - y dividir números 125 : 5 = 25

$$\frac{-125}{5} = -25$$

10. Efectúa:

a) $(-3)^0$ b) 7^2 c) 5^4 d) $(-7)^2$ e) $(-5)^0$

Solución:

a) $(-3)^0 = \mathbf{1}$ Siempre elevar a 0 es 1
b) $7^2 = 7 \cdot 7 = \mathbf{49}$
c) $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = \mathbf{625}$
d) $(-7)^2 = (-7) \cdot (-7) = \mathbf{49}$
e) $(-5)^0 = \mathbf{1}$

11. Usando las propiedades de las potencias, simplifica y después calcula:

a) $2^3 \cdot 2^2$ b) $\frac{3^7}{3^4}$ c) $5^3 \cdot 2^3$

d) $\left(\left(2^2\right)^2\right)^2$ e) $\frac{10^5}{10^3}$ f) $\frac{100^4}{10^4}$

Solución:

a) $2^3 \cdot 2^2$ multiplicar números con misma base, ¿cómo se hace? copia la base y se suman los exponentes:

$$2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

b) $\frac{3^7}{3^4}$ dividir números con misma base, ¿cómo se hace? se copia la base y se restan los exponentes:

$$\frac{3^7}{3^4} = 3^{7-4} = 3^3 = 27$$

c) $5^3 \cdot 2^3$ multiplicar números con mismo exponente, ¿cómo se hace? se multiplican las bases y se copia el exponente:

$$5^3 \cdot 2^3 = (5 \cdot 2)^3 = 10^3 = 1.000$$

d) $\left(\left(2^2\right)^2\right)^2$ una potencia elevada (↑) a otra potencia, ¿cómo se hace? se copia la base y se multiplican los exponentes:

$$\left(\left(2^2\right)^2\right)^2 = 2^{2\cdot 2\cdot 2} = 2^8 = 64$$

e) $\dfrac{10^5}{10^3}$ dividir misma base, ¿cómo se hace? se copia la base y se restan los exponentes:

$$\frac{10^5}{10^3} = 10^{5-3} = 10^2 = 100$$

f) $\dfrac{100^4}{10^4}$ dividir mismo exponente, ¿cómo se hace? se dividen las bases y se copia el exponente:

$$\frac{100^4}{10^4} = \left(\frac{100}{10}\right)^4 = 10^4 = 10.000$$

Recuerda:
cuando hay operación con sumas, restas, productos, divisiones, potencias y ( ), tú tienes que seguir un orden:

1º ( ) y [ ] Los dos mandan igual.
Cuando hay varios ( ) o [ ], manda el que está más dentro.
Ejemplo:
$(\underbrace{(\ )}_{\text{manda}})$; $[\underbrace{(\ )}_{\text{manda}}]$

2º potencias
3º multiplicaciones y divisiones
4º sumas y restas

12. Efectúa las siguientes operaciones de jerarquía:

a) - (-3) + (-2) · 5 + (- 4) · (-2)

b) 2 – 3 · 4 + 5) – 6

c) [(3 – 5) · (7 – (-8)] : 5 + 3

d) $\dfrac{[(7-5)\cdot 3-(4-(-8)]\cdot 8}{2^2}$

e) (8 – 4) : 2 + 3 · (- (-5) + 2) : 7

Solución:

a) – (-3) + (-2) · 5 + (- 4) · (-2)
hay sumas, productos y ( ).
( ) dentro no hay operación, entonces primero se hacen los productos
– (-3) + (-2) · 5 + (- 4) · (-2) = 3 + (- 10) + 8
por último hacer las sumas y restas: 3 + (- 10) + 8 = 1

– (-3) + (-2) · 5 + (- 4) · (-2) = **1**

b) (2 – 3 · 4 + 5) – 6
hay sumas, productos y ( ).
( ) dentro hay operación, entonces primero hacer ( )

(2 – 3 · 4 + 5)
dentro del paréntesis hay sumas, productos. Primero hacer el producto:
(2 – 3 · 4 + 5) = 2 – 12 + 5
ahora se hacen las sumas y restas: 2 – 12 + 5 = -5
( ) ya terminado: (2 – 3 · 4 + 5) – 6 = (- 5) - 6
por último hacer sumas y restas: (- 5) – 6 = - 11

(2 – 3 · 4 + 5) – 6 = **-11**

c) [(-2) · (15)] : 5 + 3 =
[- 30] : 5 + 3 =
(-6) + 3 = -3

$$[(3 - 5) \cdot (7 - (-8))] : 5 + 3 = \mathbf{-3}$$

d) $\dfrac{[(7-5)\cdot 3-(4-(-8))]\cdot 8}{2^2}$

Tú debes saber que
$\dfrac{[(7-5)\cdot 3-(4-(-8))]\cdot 8}{2^2} = [\,[\,(7-5)\cdot 3-(4-(-8)\,)]\cdot 8\,]: 2^2$

$$[\,[\,\underbrace{(7-5)}_{2} \cdot 3 - \underbrace{(4-(-8))}_{12}\,] \cdot 8\,]: 2^2 =$$

$[\,[\,2 \cdot 3 - (\,12)\,] \cdot 8\,]: 2^2=$
$[\,[\,6 - 12\,] \cdot 8\,] : 2^2 =$
$[\,[-6\,] \cdot 8\,] : 2^2 =$
$[\,-48\,] : 2^2 =$
$[\,-48\,] : 4 = -\,12$

$$\frac{[(7-5)\cdot 3-(4-(-8)]\cdot 8}{2^2} = \mathbf{-12}$$

e) (8 – 4) : 2 + 3 · (- (-5) + 2) : 7 =
4: 2 + 3 · 7 : 7 =
2 + 3 · 7 : 7 =
2 + 21 : 7 =
2 + 3 = 5

$$(8 - 4) : 2 + 3 \cdot (-(-5) + 2) : 7 = \mathbf{5}$$

13. Halla:

a) $|-5|$ b) $|7|$ c) $|-(-8)|$ d) $|-(-(-8))|$

Recuerda:
| | quiere decir el mismo número pero sin signo

Solución

a) $|-5| = \mathbf{5}$
b) $|7| = \mathbf{7}$
c) $|-(-8)| = \mathbf{8}$
d) $|-(-(-8))| = \mathbf{8}$

14. Halla tres múltiplos de cada uno de los siguientes números: 15; 7 y -2.

Recuerda:

Un número multiplicado por otros números (cero no vale)→ múltiplos

Solución

Para hallar múltiplos de 15, se multiplica 15 por otro número, el que quieras (no 0):

15 · 2 = 30
15 · (-1) = -15
15 · 3 = 45

30; -15 y 45 son múltiplos de 15

Para hallar múltiplos de 7, se multiplica 7 por otro número, el que tú quieras (no 0):

$$7 \cdot (-2) = -14$$
$$7 \cdot 3 = 21$$
$$7 \cdot 10 = 70$$

-14; 21 y 70 son múltiplos de 7

Para hallar múltiplos de -2, se multiplica -2 por otro número, el que tú quieras (no 0):

$$(-2) \cdot (-2) = 4$$
$$(-2) \cdot 5 = -10$$
$$(-2) \cdot 7 = -14$$

4; -10 y -14 son múltiplos de -2

15. Responde sí o no a cada una de las siguientes afirmaciones:

a) 1024 es múltiplo de 2
b) 3 es divisor de 81
c) 81 es divisible por 4
d) 2 y 3 son divisores de 36
e) 20 es múltiplo de 10

Recuerda:
a es múltiplo de **b** =
a es divisible por **b** =
b es divisor de **a**

Solución

a) 1024 es múltiplo de 2¿sí o no? Hacemos la división.

$$\begin{array}{r|l} 1024 & 2 \\ \hline \cancel{0} & 512 \end{array}$$

El resto es 0, entonces 1024 SÍ es múltiplo de 2.

b) 3 es divisor de 81 = 81 es múltiplo de 3, ¿sí o no?
Hacemos la división → 81:3
El resto es 0, entonces 81 SÍ es múltiplo de 3 = 3 SÍ es divisor de 81.

c) 81 es divisible por 4 = 81 es múltiplo de 4, ¿sí o no?
Hacemos la división → 81:4
El resto es 1, entonces 81 NO es múltiplo de 4 = 81 NO es divisible por 4.

d) 2 y 3 son divisores de 36
2 es divisor de 36 = 36 es múltiplo de 2, ¿sí o no?
Hacemos la división → 36:2
El resto es 0, entonces 36 SÍ es múltiplo de 2= 2 SÍ es divisor de 36.

3 es divisor de 36 = 36 es múltiplo de 3, ¿sí o no?
Hacemos la división → 36:3
El resto es 0, entonces 36 SÍ es múltiplo de 3 = 3 SÍ es divisor de 36.

e) 20 es múltiplo de 10, ¿sí o no? Hacemos la división → 20 : 10
El resto es 0, entonces 20 SÍ es múltiplo de 10.

16. Di si son divisibles por 2, 3, 5, y por 11 cada uno de los siguientes números:

a) 2310 b) 1250 c) 891 d) 735 e)121

Solución

Número	**2: si termina en 0 o en cifra par**	**3: si la suma de las cifras es divisible por 3**	**5: si termina en 0 o 5**	**11: si la suma de las cifras en lugar par – la suma de las cifras en lugar impar = 0 ó múltiplo de 11**
a) 2310	si, porque: 2310 acaba en 0	si, porque: 2+3+1+0= 6 y 6 : 3 da resto cero	si, porque: 2310 acaba en 0	si, porque: 2310 la suma de las cifras en lugar par: 1 + 2 = 3 la suma de las cifras en lugar impar: 0 + 3 = 3 3 – 3 = 0
b) 1250	si, porque: 1250 acaba en 0	no, porque: 1+2+5+0=8 y 8 : 3 no da resto cero	si, porque: 1250 acaba en 0	no, porque: 1250 la suma de las cifras en lugar par: 5 + 1 = 6 la suma de las cifras en lugar impar: 0 + 2 = 2 6 – 2 = 4 que no es 0 ni múltiplo de 11
c) 891	no: 891 acaba en 1 que no es 0 ni par	si, porque: 8+9+1=18 y 18:3 da resto cero	no: 891 acaba en 1 que no es 0 ni 5	si, porque: 891 la suma de las cifras en lugar par: 9 = 9 la suma de las cifras en lugar impar: 1 + 8 = 9 9 – 9 = 0
d) 735	no: 735 acaba en 5 que no es 0 ni par	si, porque: 7+3+5=15 y 15:3 da resto cero	si, porque: 735 acaba en 5	no, porque: 735 la suma de las cifras en lugar par: 3 = 3 la suma de las cifras en lugar impar: 5 + 7 = 12 12 - 3 = 9 que no es 0 ni múltiplo de 11
e) 121	no: 121 acaba en 1 que no es 0 ni par	no, porque: 1+2+1=4 y 4 : 3 no da resto cero	no: 121 acaba en 1 que no es 0 ni 5	si, porque: 121 la suma de las cifras en lugar par: 2 = 2 la suma de las cifras en lugar impar: 1 + 1 = 2 2 – 2 = 0

Recuerda:
cifra par = 2 ó 4 ó 6 ó 8.

lugar par = 2º ó 4º ó 6º ó ...

17. De los siguientes números di los que son primos y los que son compuestos:

a)59 b) 1236 c) 98 d) 123570

Solución

a) $\sqrt{59}$ = 7,6. Entonces se hacen las divisiones hasta el 7, más no hace falta.

Número	**dividido entre**	**resto**
59	2	1
59	3	2
59	4	3
59	5	4
59	6	5
59	7	3

División con resto = 0 no hay, entonces 59 es primo.

a) 1236 es divisible por 2 porque acaba en cifra par, por tanto, es compuesto.

b) 98 es divisible por 2 porque acaba en cifra par, por tanto, es compuesto.

c) 123570 es divisible por 2 porque acaba en 0, por tanto, es compuesto.

18. Descompón en factores los siguientes números:

a) 968 b) 128 c) 81 d) 750

Solución

a) Vamos a descomponer 968 en factores

$$\begin{array}{r|l} 968 & 2 \\ 484 & 2 \\ 242 & 2 \\ 121 & 11 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 968 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 484 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 242 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 121 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 121 & 11 \\ \cline{2-2} 0 & 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 484 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 242 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 121 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 60 \end{array}$$

no vale ....

968 = $\mathbf{2^3 \cdot 11^2}$

b) Vamos a descomponer 128 en factores	c) Vamos a descomponer 81 en factores	b) Vamos a descomponer 750 en factores
$\begin{array}{r\|l} 128 & 2 \\ 64 & 2 \\ 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 750 & 2 \\ 375 & 3 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$
$128 = 2^7$	**$81 = 3^4$**	**$750 = 2 \cdot 3 \cdot 5^3$**

19. Usando las propiedades de las potencias, halla:

a) $\dfrac{\left(3^2 \cdot 10^4\right)^3 \cdot (2 \cdot 100)^2}{(6 \cdot 10)^5}$ b) $\dfrac{\left(2 \cdot 10^5\right)^2}{4 \cdot 1000}$ c) $\dfrac{(2 \cdot 3)^4 \cdot 3^5}{2^3 \cdot 3^7}$

Solución

Para hacer este tipo de ejercicios hay distintas formas. Una forma es:

1º descomponer en factores las bases
2º aplicar las propiedades de las potencias

a) $\dfrac{\left(3^2 \cdot 10^4\right)^3 \cdot (2 \cdot 100)^2}{(6 \cdot 10)^5}$

descomponemos las bases: $3 = 3$
$10 = 2 \cdot 5$
$2 = 2$
$100 = 2^2 \cdot 5^2$
$6 = 2 \cdot 3$

$$\frac{\left(3^2 \cdot 10^4\right)^3 \cdot (2 \cdot 100)^2}{(6 \cdot 10)^5} = \frac{\left(3^2 \cdot (2 \cdot 5)^4\right)^3 \cdot \left(2 \cdot 2^2 \cdot 5^2\right)^2}{(2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5)^5}$$

Ahora hacemos las operaciones, primero el paréntesis que está más dentro

$$\frac{\left(3^2 \cdot (2 \cdot 5)^4\right)^3 \cdot \left(2 \cdot 2^2 \cdot 5^2\right)^2}{(2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5)^5} = \frac{\left(3^2 \cdot 2^4 \cdot 5^4\right)^3 \cdot \left(2^3 \cdot 5^2\right)^2}{\left(2^2 \cdot 3 \cdot 5\right)^5}$$

ahora seguimos con los otros paréntesis

$$\frac{\left(3^2 \cdot 2^4 \cdot 5^4\right)^3 \cdot \left(2^3 \cdot 5^2\right)^2}{\left(2^2 \cdot 3 \cdot 5\right)^5} = \frac{3^6 \cdot 2^{12} \cdot 5^{12} \cdot 2^6 \cdot 5^4}{2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^5}$$

Ahora se juntan las bases iguales

$$\frac{3^6 \cdot 2^{12} \cdot 5^{12} \cdot 2^6 \cdot 5^4}{2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^5} = 3^{6-5} \cdot 2^{12+6-10} \cdot 5^{12+4-5} = \mathbf{3^1 \cdot 2^8 \cdot 5^{11}}$$

b) $\dfrac{\left(2 \cdot 10^5\right)^2}{4 \cdot 1000}$

descomponemos las bases: $2 = 2$
$10 = 2 \cdot 5$
$4 = 2^2$
$1000 = 2^3 \cdot 5^3$

$$\frac{\left(2 \cdot 10^5\right)^2}{4 \cdot 1000} = \frac{\left(2 \cdot (2 \cdot 5)^5\right)^2}{2^2 \cdot 2^3 \cdot 5^3}$$

Ahora hacemos las operaciones, primero el paréntesis que está más dentro

$$\frac{\left(2 \cdot (2 \cdot 5)^5\right)^2}{2^2 \cdot 2^3 \cdot 5^3} = \frac{\left(2 \cdot 2^5 \cdot 5^5\right)^2}{2^2 \cdot 2^3 \cdot 5^3}$$

ahora seguimos con los otros paréntesis

$$\frac{\left(2 \cdot 2^5 \cdot 5^5\right)^2}{2^2 \cdot 2^3 \cdot 5^3} = \frac{2^2 \cdot 2^{10} \cdot 5^{10}}{2^2 \cdot 2^3 \cdot 5^3}$$

Ahora juntamos las bases iguales

$$\frac{2^2 \cdot 2^{10} \cdot 5^{10}}{2^2 \cdot 2^3 \cdot 5^3} = 2^{2+10-2-3} \cdot 5^{10-3} = \mathbf{2^7 \cdot 5^7 = (2 \cdot 5)^7 = 10^7}$$

c) $\dfrac{(2 \cdot 3)^4 \cdot 3^5}{2^3 \cdot 3^7}$

descomponemos las bases: $2 = 2$
$3 = 3$

$$\frac{(2 \cdot 3)^4 \cdot 3^5}{2^3 \cdot 3^7} = \frac{(2 \cdot 3)^4 \cdot 3^5}{2^3 \cdot 3^7}$$

Ahora hacemos las operaciones, primero el paréntesis

$$\frac{(2 \cdot 3)^4 \cdot 3^5}{2^3 \cdot 3^7} = \frac{2^4 \cdot 3^4 \cdot 3^5}{2^3 \cdot 3^7}$$

Ahora juntamos las bases iguales

$$\frac{2^4 \cdot 3^4 \cdot 3^5}{2^3 \cdot 3^7} = 2^{4-3} \cdot 3^{4+5-7} = \mathbf{2^1 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18}$$

20. Halla el m.c.d. y m.c.m. de:
a) 200 y 36 b) 40 y 18 c) 750 y 126

Solución
a) Vamos a hallar el máximo común divisor (m. c. d.) y mínimo común múltiplo (m. c. m.) de 200 y 36

Primero descomponemos los dos números en factores:

$$\begin{array}{r|l} 200 & 2 \\ 100 & 2 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Entonces:

$200 = 2^3 \cdot 5^2$
$36 = 2^2 \cdot 3^2$

El factor común es 2. El exponente de 2 en la descomposición de 200 es 3 y en la descomposición de 36 es 2, por tanto el menor exponente de 2 es 2.

Entonces el m. c. d. (200, 36) = $2^2 = 4$

Los factores comunes son los mismos y los factores no comunes son 5 y 3. El mayor exponente de 2 es 3, el mayor exponente de 5 es 2 y el mayor exponente de 3 es 2.

Entonces el m. c. m. (200, 36) = $2^3 \cdot 5^2 \cdot 3^2 = 1800$

b) Vamos a hallar el Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de 40 y 18

Primero descomponemos los dos números en factores:

$$\begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Entonces:

$40 = 2^3 \cdot 5^1$
$36 = 2^1 \cdot 3^2$

El factor común es 2. El exponente de 2 en la descomposición de 40 es 3 y en la descomposición de 18 es 1, por tanto el menor exponente de 2 es 1.

Entonces el m. c. d. (200, 36) = $2^1 = 2$

Los factores comunes son los mismos y los factores no comunes son 5 y 3. El mayor exponente de 2 es 3, el mayor exponente de 5 es 1 y el mayor exponente de 3 es 2.Entonces el m. c. m. (40, 18) = $2^3 \cdot 5^1 \cdot 3^2 = 360$

c) Vamos a hallar el Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de 750 y 126

Primero descomponemos los dos números en factores:

$$\begin{array}{r|l} 750 & 2 \\ 375 & 3 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Entonces:

$750 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1$
$36 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 7^1$

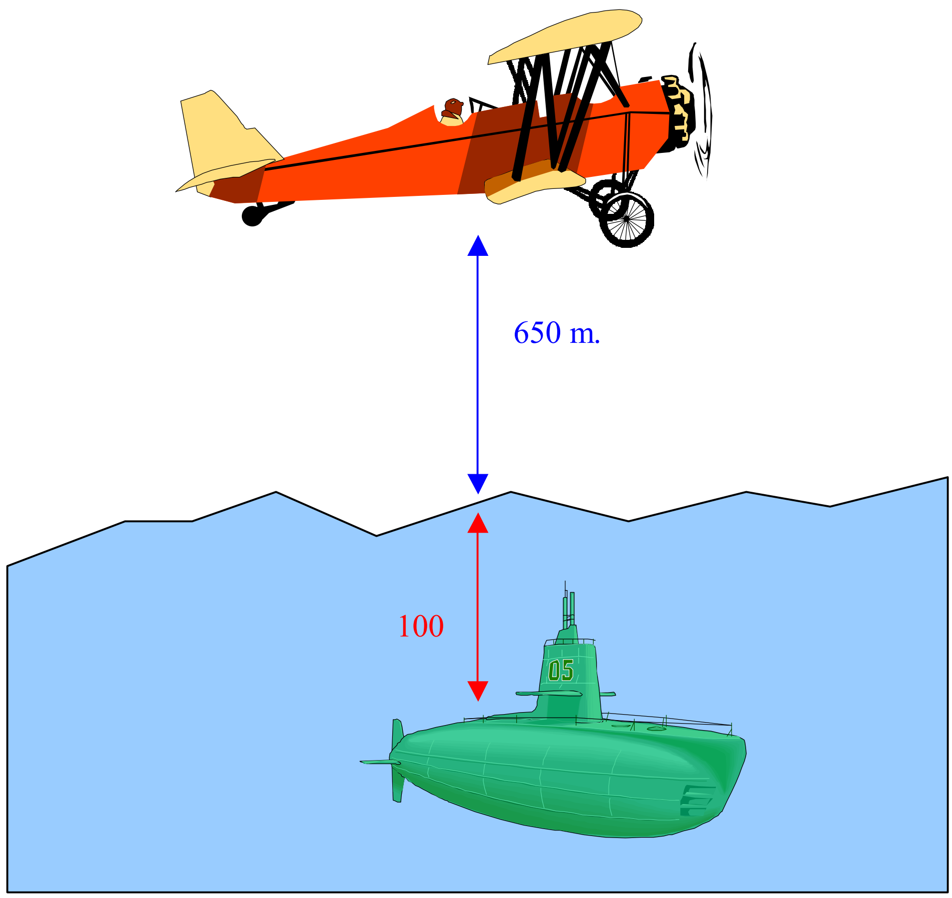
Los factores comunes son 2 y 3. El exponente de 2 en la descomposición de 750 es 1 y en la descomposición de 126 es 1, por tanto el menor exponente de 2 es 1. El exponente de 3 en la descomposición de 750 es 1 y en la descomposición de 126 es 2, por tanto el menor exponente de 3 es 1.

Entonces el m. c. d. (750, 126) = $2^1 \cdot 3^1 = 6$

Los factores comunes son los mismos y los factores no comunes son 5 y 7. El mayor exponente de 2 es 1, el mayor exponente de 3 es 2, el mayor exponente de 5 es 1 y el mayor exponente de 7 es 1.

Entonces el m. c. m. (750, 126) = $2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 630$

21. Un helicoptero vuela a 650 m. de altura y un submarino está 100 m. bajo el agua. ¿Qué altura les separa?



Solución:
Altura del helicóptero hasta el mar = 650 m.
Altura del mar hasta el submarino = 100 m.

¿Cuál es la altura total?

UNIR la altura desde el helicóptero hasta el mar y la altura desde el mar hasta el submarino = SUMAR las dos alturas:

650 + 100 = **750 m**

22. *Pitágoras* nació en el año 560 antes de Cristo y murio en el año 501 antes de Cristo. ¿Cuántos años vivió *Pitágoras*?

Pitágoras → hombre famoso de matemáticas

Solución
Antes de Cristo los años van al revés:
Después del año 2 antes de Cristo va el año 1 antes de Cristo
Después del año 1 antes de Cristo va el año 1 después de Cristo
Después del año 1 después de Cristo va el año 2 después de Cristo

año 2 antes de Cristo	pasa 1 año →	año 1 antes de Cristo	pasa 1 año →	año 1 después de Cristo	pasa 1 año →	año 2 después de Cristo

Ya sabes que son años antes de Cristo y después de Cristo, ahora empieza el problema.

Pitágoras nació en el año... → 580 antes de Cristo
Pitágoras murió en el año... →501 antes de Cristo
¿Cuántos años vivió? → ¿Cómo se hace?

Ver cuántos años hay desde que Pitágoras nace hasta que Pitágoras muere = DIFERENCIA de años desde que Pitágoras nace hasta que Pitágoras muere = RESTAR
580 - 501 = **79 años vivió Pitágoras**

23. ¿Cuántos años vivió una mujer que nació 20 años antes de Cristo y murió 57 años después de Cristo?

Solución

20 19 18 17.................................1 1 2 57
antes de Cristo después de Cristo

La mujer antes de Cristo vivió... ¿cuántos años?

20 19 18 17
.... 1

DIFERENCIA entre 20 y 1 año antes de Cristo = RESTAR 20 - 1 = 19 años

La mujer después de Cristo vivió... ¿cuántos años?

1 2 57
después de Cristo

DIFERENCIA entre 57 y 1 año después de Cristo = RESTAR 57 - 1 = 56 años

En total, la mujer vivió... ¿cuántos años?

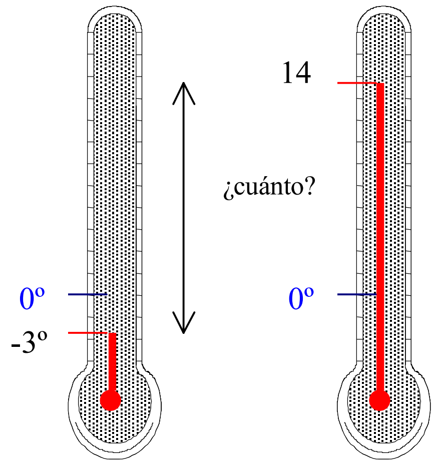
SUMAR los años que vivió antes de Cristo, los años después de Cristo y 1 año que pasa entre 1 año antes de Cristo y 1 después de Cristo = 19 + 56 + 1 = **76 años vivió la mujer**.

aumenta = sube

24. En Murcia un día de invierno a las 6 horas de la mañana hay una temperatura de -3º C y a las 12 horas del mediodía, una temperatura de 14º C ¿Cuánto ha subido la temperatura?

Solución
Temperatura a las 6 horas = -3º C
Temperatura a las 12 horas = 14º C

¿Cuánto *aumenta* la temperatura?



DIFERENCIA entre la temperatura a las 12 y temperatura a las 6 = RESTAR

14 - (-3) = **17º C**

Fábrica

25. En el año 1.996 una *fábrica* ganó 120.000 €, en 1.997 perdió 48.000 € y en 1.998 ganó 78.000 €. ¿Cuál es estado actual de la fábrica?

Solución
En el año 1.996 gana 120.000 €
En el año 1.997 pierde 48.000 €s
En el año 1.998 gana 78.000 €

Si la fábrica gana, entonces más dinero → SUMA
Si la fábrica pierde, entonces menos dinero → RESTA

¿Cuánto dinero tiene ahora la fábrica?
+ 120.000 – 48.000 + 78.000 = **150.000 € gana**

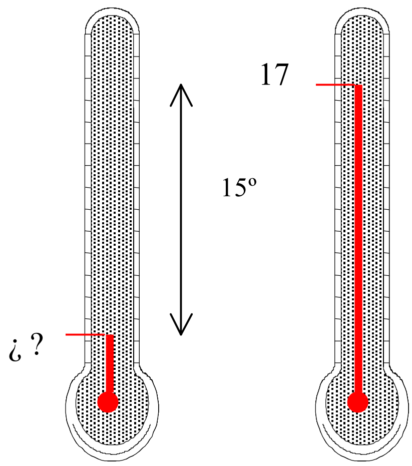
26. Dos hermanas van a comprar un regalo para su madre y tienen 39 €. Después de pagar les sobran 2 €. ¿Cuánto les costó el regalo?

Solución
Al principio tienen → 39 €
Compran el regalo
Ahora ¿cuánto dinero tienen? → 2 €
¿Cuánto cuesta el regalo?

DIFERENCIA entre el dinero al principio y dinero al final = RESTA
39 - 2 = **37 € cuesta el regalo**.

27. Entre las 8 horas de la mañana y las 6 horas de la tarde, la diferencia de temperatura es de 15º C. Si a las 6 horas de la tarde el termómetro marcaba 17º C ¿Qué temperatura había a las 8 horas de la mañana?

Solución



A las 6 de la tarde temperatura → 17º C
Yo sé que desde las 8 de la mañana hasta las 6 de la tarde la temperatura sube 15º C → A las 8 de la mañana hay MENOS temperatura

A las 8 de la mañana temperatura ¿cuál?

MENOS = RESTAR temperatura a las 6 de la tarde y cuánto sube la temperatura.

17 - 15 = **2º C a las 8 de la mañana**

28. Tres amigas ganan en la lotería 3.201 € y se lo reparten a partes iguales. ¿Cuánto le toca a cada una?

Solución
Tres amigas ganan 3.201 €
Cada una gana... ¿cuánto?

Recuerda que:
REPARTIR en partes iguales = DIVIDIR

3.201 : 3 = **1.067 € gana cada amiga**

29. En un paquete hay 15 cajas de rotuladores y cada caja tiene 12 rotuladores. ¿Cuántos rotuladores hay en el paquete?

Solución
1 paquete tiene dentro 15 cajas
1 caja tiene dentro 12 rotuladores

En total, ¿cuántos rotuladores hay dentro de una caja?

CONTAR rotuladores:

Una caja tiene 12 rotuladores, otra caja tiene 12 rotuladores más
Rotuladores ya $12 + 12 = 24$

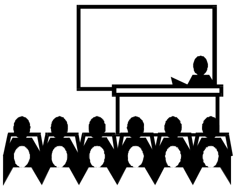
Otra caja tiene 12 rotuladores más $12 + 12 + 12 = 36$

Recuerda que:
Sumar muchas veces el mismo número = MULTIPLICAR

$12 + 12 + 12 = 12 \times 3 = 36$

Seguimos contando hasta 15 cajas. ¿Cuántos rotuladores hay ya?

Sumar 12 y 12 y ...., 15 veces = MULTIPLICAR 12 por 15
$12 \times 15 =$ **180 rotuladores**



2 filas con 6 *asientos* en cada fila

asientos = silla

30. En un cine hay 20 filas y 25 *asientos* en cada fila. ¿Cuántas personas pueden sentarse en el cine?

Solución
Filas de sillas → 20
Una fila → 25 asientos
Total asientos... ¿cuántos?

SUMAR los asientos de la primera fila y los asientos de la segunda fila y ..... = SUMAR 25 y 25 y .... 20 veces = MULTIPLICAR 20 por 25
$20 \times 25 =$ **500 personas pueden sentarse en el cine**

bono

31. Jorge para ir al instituto tiene que coger el autobús que le cuesta 1 € por viaje.

a) ¿Cuánto se gasta al mes en el autobús?
b) Si saca un *bono* de 20 viajes que le cuesta 18 €, ¿gastará más con el bono o menos?

Solución
a) Ejemplo: un mes tiene 4 semanas de clase
En un mes, tú no vas todos los días al instituto, sábado y domingo no vas, entonces, en una semana tú vas 5 días.
1 mes = 4 semanas tú vas $5 + 5 + 5 + 5 = 5 \times 4 = 20$ días.

1 viaje cuesta 1 €
20 viajes cuestan... ¿cuánto?

SUMAR 20 veces 1 = MULTIPLICAR 20×1 = **20 € gasta al mes en autobús.**

Recuerda que:
Sumar muchas veces el mismo número = MULTIPLICAR

b) Antes sin bono gastaba 20 €
Con bono gasto 18 €
El bono es más barato

32. Irene tiene 15 discos compactos (C. D.), Elena el triple que Irene y Marta el doble que Elena. ¿Cuántos discos tiene cada una? ¿Y las tres juntas?

C. D.

Solución

Tú debes aprender que:
triple = $\times 3$ doble = $\times 2$

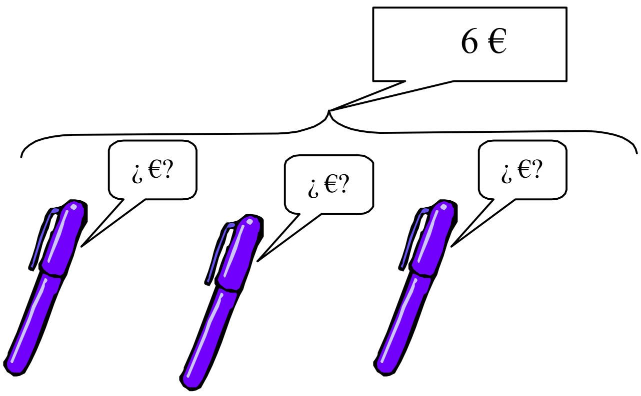
Irene $\rightarrow$15 discos
Elena ¿cuántos?
el TRIPLE que Irene = MULTIPLICAR por 3
$3 \times 15 = 45$ discos tiene Elena

Marta discos... ¿cuántos?
el DOBLE que Elena = MULTIPLICAR por 2
$2 \times 45 = 90$ discos tiene Marta

Irene, Elena y Marta juntas, ¿cuántos discos en total?
JUNTAR los discos de Irene, Elena y Marta = SUMAR los discos de Irene, Elena y Marta
15 + 45 + 90 = **150 discos**

33. Pedro compró 3 bolígrafos por 6 €, 3 libretas por 3€ y 6 gomas por 42 céntimos. ¿Cuánto vale un bolígrafo, una libreta y una goma?

Solución
3 bolígrafos cuestan 6 €
1 bolígrafo $\rightarrow$¿? €



Ponemos las monedas

hay 3 bolígrafos y todos al mismo precio, entonces ponemos 3 grupos de monedas iguales

entonces cada bolígrafo cuesta 2 €.

Recuerda que: Repartir en partes iguales = DIVIDIR

6 : 3 = **2 € cuesta cada bolígrafo**.

3 libretas cuestan 3 €
1 libreta → ¿? €
Repartir 3 en 3 partes iguales = DIVIDIR 3 entre 3

3 : 3 = **1 € cuesta cada libreta.**

6 gomas cuestan 42 céntimos
1 goma ¿cuánto cuesta?
Repartir 42 en 6 partes iguales = DIVIDIR 42 entre 6

42 : 6 = **7 céntimos cuesta cada goma**.

34. Juan tiene tres entradas para un partido de fútbol que le han costado 45 € las tres. Si vende dos entradas a 18 € cada una, ¿cuánto dinero gana?

Solución

Tres entradas valen 45 €
1 entrada ¿cuánto vale?
Repartir 45 en 3 partes iguales = DIVIDIR 45 entre 3
45 : 3 = 15 €

Juan compra una entrada por 15 € (da 15)
Juan vende una entrada por 18 € (le dan 18)
¿Cuánto gana?
DIFERENCIA
18 – 15 = 3 € gana con una entrada

Con 1 entrada gana 3 €
Con 2 entradas gana...
2 veces 3 € = MULTIPLICAR 2 por 3
2×3 = **6 € gana Juan**.

35. Un ciclista recorre en una hora 16 Km. ¿Cuántos kilómetros recorrerá en 4 horas si no cambia de velocidad?

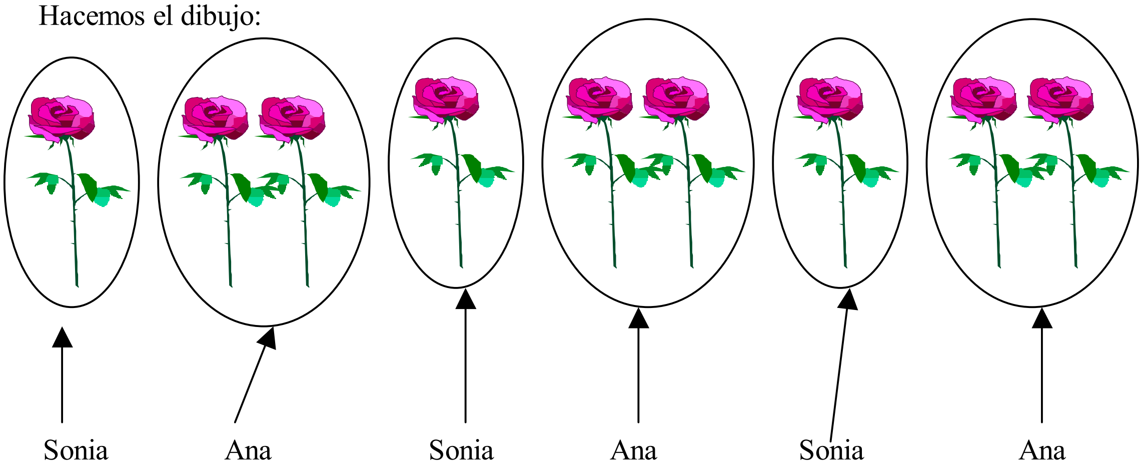
Solución

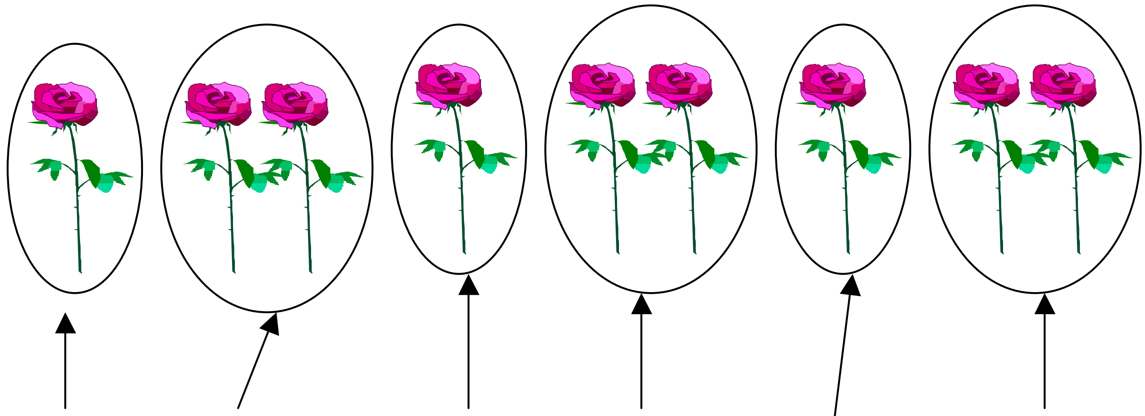
En 4 horas recorre... ¿?
SUMAR 16 y 16 y .... cuatro veces = MULTIPLICAR 16 por 4
16×4 = **64 Km recorre el ciclista.**

36. Se quiere repartir una docena de rosas entre Sonia y Ana, de modo que Ana tenga el doble de rosas que Sonia. ¿Con cuántas rosas se queda cada una?

Solución

12 rosas para 2 amigas: Sonia y Ana
Ejercicio dice que Ana tiene el doble que Sonia
¿Cómo se hace? Hay dos formas
Primera forma:
Hacemos el dibujo:





Cogemos una rosa para Sonia y 2 (doble) para Ana y seguir hasta el final
Ahora contamos: **Sonia 4 rosas y Ana 8 rosas**.

Otra forma:
Si hay muchas rosas es difícil hacer el dibujo, entonces repartimos las rosas en tres partes iguales, una parte para Sonia y 2 partes para Ana.

REPARTIR = DIVIDIR

12 : 3 = 4 rosas cada parte
1 parte = **4 rosas para Sonia**
2 partes = 2 · 4 = **8 rosas para Ana.**

37. En una caja hay 10 paquetes de rotuladores y cada paquete contiene 5 rotuladores. Si se reparten en una clase de 25 niños, ¿de cuántos rotuladores dispone cada niño?

Solución
Primero vamos a contar cuántos rotuladores tenemos:
1 caja tiene dentro 10 paquetes de rotuladores
1 paquete tiene dentro 5 rotuladores
¿Cuántos rotuladores hay en total?
CONTAR rotuladores en cada paquete y SUMAR = SUMAR 10 y 10 y ... 5 veces = MULTIPLICAR 5 por 10
$5 \times 10 = 50$ rotuladores en total

Ahora repartimos 50 rotuladores para 25 niños
1 niño → ¿cuántos rotuladores?

REPARTIR 50 rotuladores entre 25 niños = DIVIDIR 50 entre 25
50 : 25 = **2 rotuladores para cada niño**

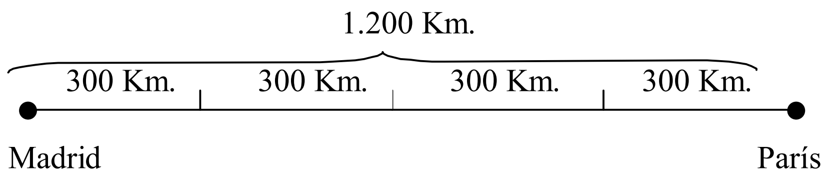
38. Un tren que viaja de Madrid a París va a 300 Km. Por hora. Si la distancia entre las dos ciudades es de 1.200 Km.

a) ¿Cuánto tardará el tren en ir de una ciudad a otra?
b) Si el tren hace 4 paradas de un cuarto de hora, y sale de Madrid a las 2 de la tarde, ¿a qué hora llegará a París?

Solución

a)

El tren, cada hora, recorre 300 Km.
Si partimos 1.200 en trozos de 300 Km. Tenemos que cada trozo lo hace en una hora.



¿Cuántos trozos hay?

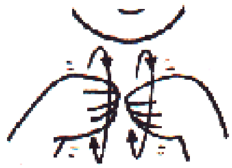
Tú debes aprender que:
PARTIR algo en trozos iguales = DIVIDIR

PARTIR 1.200 en grupos de 300 = DIVIDIR 1.200 entre 300
1.200 : 300 = 4 trozos
Cada trozo 1 hora. 4 **trozos tarda 4 horas**

b) Ahora hay 4 paradas de 1 cuarto de hora (15 minutos)
Todas JUNTAS ¿cuánto tiempo?
JUNTAR 15 y 15 y ... 4 veces = SUMAR 15 y 15 y ... 4 veces = MULTIPLICAR 4 por 15
$4 \times 15 = 60$ minutos = 1 hora
Total del viaje:
4 horas de viaje MÁS 1 hora de paradas
$4 + 1 = 5$ horas

El tren de Madrid sale a las 2, MÁS 5 horas de viaje, llega a París a las:
$2 + 5 =$ **7 de la tarde.**

PROBLEMAS PROPUESTOS


1. Di el opuesto de: -15, -7, 23, -4, -9, 6.

2. Representa sobre una recta los números: 5, 0, -3, -5, 4.

3. Ordena de menor a mayor los siguientes conjuntos de números:

a) –3, 6, 4, -7, -23
b) 5, -2, 0, 16, -9
c) –38, 27, 9, -36, 2

4. Ordena de mayor a menor los siguientes conjuntos de números:

a) –32, 4, 28,-17,-10.
b) 3, 0, -14, 9, -21.
c) 15, -13, -2, 4, 2.

5. Realiza las siguientes operaciones:

a) 4 + 3	b) -3 -9	c) - 4 -2
d) 2 + 6	e) - 6 - 5	f) + 5 + 4

6. Realiza las siguientes operaciones:

a) + 2 + 3 + 5	b) - 5 - 2 - 4	c) - 3 -1 - 2
d) 3 + 5 + 4	e) -8 - 2 - 3	f) + 6 + 7 + 2

7. Realiza las siguientes operaciones:

a) -5 + 2	b) 4 - 6	c) -3 + 8
d) 6 - 9	e) 4 -3	f) -16 + 11

8. Realiza las siguientes operaciones:

a) - 4 - 17	b) 6 - 28	c) -36 + 25
d) 42 - 38	e) 55 -19	f) -31 + 31

9. Realiza las siguientes operaciones:

a) - 23 - 17	b) 41-27	c) -24 + 45
d) 56 - 21	e) -32 - 14	f) -54 + 76

10. Realiza las siguientes operaciones:

a) -5 + 3 - 9 + 17 - 23 + 14
b) - 4 - 1 + 9 + 3 – 7 + 11
c) 25 - 43 + 32 - 14 - 79
d) 130 - 70 + 45 - 73

11. Realiza las siguientes operaciones:

a) -14 + 8 + 29 - 13 - 103 + 50
b) - 62 + 21 + 19 + 33 - 74 + 15
c) - 32 + 46 + 7 - 43 - 18 + 12
d) 23 - 40 + 41 - 125 + 18

12. Realiza las siguientes operaciones:

a) (-3) · (-5) b) (-2) · (6)
c) (-9) · 3 · (-1) · 2 d) (-5) · 4 · (-3) · 10
e) (-3) · (-2) · (-3) · (2) f) (-7) · 4 · 3 · (-1)

13. Realiza las siguientes operaciones:

a) 4 · (-2) · (-3) b) (-5) · 9 · (-2)
c) (-3) · 8 · (-2) · (-5) d) (-1) · 11 · (-7) · 2
e) (-10) · (-4) · (-3) · (-3) f) 3 · (-6) · (-4) · (-5)

14. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\frac{-18}{-3}$ b) $\frac{32}{4}$ c) $\frac{-56}{-7}$ d) $\frac{235}{5}$

15. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\frac{-72}{-9}$ b) $\frac{165}{-5}$ c) $\frac{-28}{4}$ d) $\frac{135}{3}$

16. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\frac{48}{-6}$ b) $\frac{-210}{-10}$ c) $\frac{136}{4}$ d) $\frac{-105}{7}$

17. Efectúa:

a) $(-3)^2$ b) 4^0 c) 5^3 d) $(-8)^2$ e) $(-1)^0$

18. Efectúa:

a) 6^2 b) $(-6)^0$ c) 2^3 d) $(-9)^2$ e) $(-5)^2$

19. Usando las propiedades de las potencias, simplifica y después calcula:

a) $2^4 \cdot 5^4$ b) $\frac{5^9}{5^7}$ c) $2^2 \cdot 2^2$

d) $\left(10^2\right)^3$ e) $\frac{6^7}{6^5}$ f) $\frac{1000^5}{100^5}$

20. Usando las propiedades de las potencias, simplifica y calcula:

a) $3^2 \cdot 2^2$ b) $\frac{3^7}{3^4}$ c) $\frac{9^3}{9}$

d) $\left(5^2\right)^2$ e) $\frac{4^3}{4^3}$ f) $\frac{100^2}{10^2}$

21. Calcula el valor de a:

a) a + (-2) = 0 b) $3 \cdot a = 6$ c) 8: (-a) = -4

d) 8 : (-a) = 4 e) (-3) + a = 5 f) (-a) : 3 = 4

22. Efectúa las siguientes operaciones de jerarquía:

a) $[(-4) \cdot (-3) + 50] : 2 =$

b) (-8) : 2 + (30 – 25) · 2 =

c) $3 \cdot (-2) + (-5) \cdot (-3) + (-4) \cdot (-2) =$

d) 32 – (10 – 5) + 10 · 2 =

23. Efectúa las siguientes operaciones de jerarquía:

a) [- 8 – 6 – (-4)] : 5 =

b) [16 – (-6) + (-8)] : [13 – (+3) + 4]=

c) $[17 - [30 - (10 + 12)]] \cdot [(-5) + (8 - 13)] =$

d) $3\,(5 - 8) - [3 \cdot (2 - 6) - (3 + 6) \cdot 2 - 1] =$

24. Descompón en factores, y simplifica aplicando las propiedades de las potencias:

a) $\frac{972 \cdot 175}{90} =$ b) $\frac{3267}{33} =$

c) $\frac{5^2 \cdot 3^2 \cdot 7}{5^2 \cdot 3 \cdot 7} =$ d) $\frac{25 \cdot 1000}{5 \cdot 10^4} =$

25. Efectúa las siguientes operaciones de jerarquía:

a) $-(-4) + (-6) \cdot 2 + (-1) \cdot (-18)$

b) $(3 - 5 \cdot 6 + 12) - 14$

c) $[(4 - 5)(6 - (-3))] : 3 - 2$

d) $\frac{[(6 - 9) \cdot 4 - (-4 + (-7))] \cdot 4}{2}$

e) $(24 - 6) : 6 - 3 \cdot [-(-9) - 2] : 7$

26. Efectúa las siguientes operaciones de jerarquía:

a) $\dfrac{(-5+3)-4+3\cdot(1-(-4))}{3}$

b) $[(-6-2)(7+(-5))]:8+7$

c) $(17-(-3)):4-10\,[(-3)-2]-7$

d) $(15-8)\cdot 6+(7+11):[-9+3]$

27. Halla:

a) $|6|$ b) $|-9|$ c) $|-(-(-5))|$ d) $|-(-11)|$

28. Halla:

a) $|-(-12)|$ b) $|+(-23)|$ c) $|-17|$ d) $|-(-(-35))|$

29. Usando las propiedades de las potencias, halla:

a) $\left[(5\cdot 10^2)^4\cdot(2\cdot 10)^4\right]/(5\cdot 10)^6$

b) $\dfrac{(3\cdot 10^2)^2}{9\cdot 100}$

c) $\dfrac{(7\cdot 2)^5\cdot 7^2}{7^5\cdot 2^4}$

d) $\dfrac{4^3\cdot 3^6}{(4\cdot 3)^2}$

e) $\dfrac{5^6\cdot 3^4\cdot 2}{5^5\cdot 10}$

f) $\dfrac{(3^2)^5}{3^7\cdot 3}$

30. Usando las propiedades de las potencias, halla:

a) $\dfrac{18\cdot 1000}{(3\cdot 10)^2}$

b) $\dfrac{3^2\cdot 10^3\cdot 7^5}{7^4\cdot 100\cdot 3}$

c) $\dfrac{2^7\cdot 5^3\cdot 7^5}{2^5\cdot 5\cdot 7^3}$

d) $\dfrac{(2^3)^3\cdot 3^9}{2^5\cdot(3^4)^2}$

31. Halla 3 múltiplos de cada uno de los siguientes números:
-9; 11; -7; 23.

32. Responde sí o no a cada una de las siguientes afirmaciones:

a) 357 es múltiplo de 2
b) 5 es divisor de 145
c) 420681 es múltiplo de 3
d) 670 divisible por 4
e) 3 y 5 son divisores de 945

33. De los siguientes números, di los que son divisibles por 2, 3 y por 5:

a) 930 b) 6454 c) 2166 d) 9135

34. Di si los siguientes números son divisibles por 2, 3, 5, 7 y por 11:

a) 605 b) 620 c) 2431 d) 798

35. De los siguientes números di los que son primos y los que son compuestos:

a) 72 b)2345 c) 43 d) 3249

36. Descompón en factores los siguientes números:

a) 625 b) 340 c) 525 d) 1296

37. Descompón en factores los siguientes números:

a) 726 b) 2025 c) 1040 d) 414

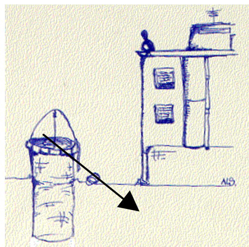
38. Halla el m. c. d. y m. c. m. de:

a) 68 y 54; b) 100 y 210;
c) 180 y 64 d) 525 y 1125.

39. Halla el m. c. d. y m. c. m. de:

a) 400 y 168; b) 27 y 540;
c) 128 y 375; d) 120, 90 y 24.

terraza



fondo

40. Teresa va a comprar una pelota que vale 5 €. Si paga con un billete de 10 €. ¿Cuánto dinero le sobra?

41. ¿Qué diferencia de altura hay entre el *fondo* de un pozo de 7 metros de profundidad y la *terraza* de una casa que está a 9 metros de altura?

recorridos = ya

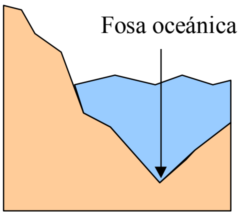
aumentado

42. La temperatura máxima en un día es de 25º C y la mínima es 10º C. ¿qué diferencia de temperatura hay?

43. Una familia sale de viaje de Murcia a Madrid que está a una distancia de 400 Km., cuando llevan *recorridos* 15 Km. se acuerdan de que se han dejado la ventana abierta y vuelven a casa. ¿Cuántos kilómetros habrán hecho cuando lleguen a Madrid?

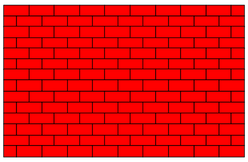
44. Una empresa de coches vendió, en el mes de Enero de 1999, 750 coches y en el mes de Julio del mismo año 925 coches. ¿Cuánto ha *aumentado* la venta de coches?

nombre de un volcán en Tenerife = *Teide*



nombre fosa = *fosa de Filipinas*

frutería = tienda de frutas



muro

45. En un juego, Luis gana 8 canicas, luego pierde 5 canicas, más tarde gana 10 canicas y luego pierde 7. ¿Ganará canicas o las perderá? ¿Cuántas?

46. ¿Qué diferencia de altura hay entre el *Teide* que está a 3.718 m. y la *fosa de Filipinas* que está a -10.540 m.?

47. Una pieza metálica está a 6º bajo cero. Se calienta hasta que alcanza la temperatura de 40º. ¿Cuál es la variación de temperatura?

48. María fue a una *frutería* y compró 4 kilos de patatas a 30 céntimos el kilo, 2 lechugas a 40 céntimos cada una y 2 kilos de uva a 1 € el kilo. Pagó con un billete de 5 €. ¿Cuánto dinero le sobró?

49. Antonio ha estado una semana enfermo y no ha podido asistir a clase. Cuando vuelve, le pide los apuntes a un amigo para hacer fotocopias. Si cada fotocopia cuesta 5 céntimos y hace 15 fotocopias. ¿Cuánto dinero se gasta?

50. Cuatro amigos quedan una tarde para ir al cine. La entrada vale 5 € y cada uno lleva 6 €. ¿Cuánto dinero le sobra a cada uno? ¿Y en total?

51. En un juego, Isabel tiene doble número de fichas que Manuel y éste, triple número de fichas que María. Si María tiene 10 fichas, ¿cuántas fichas tiene Manuel y cuántas tiene Isabel?

52. ¿Cuántas piezas habrá en un puzzle que tiene 7 filas y 10 columnas?

53. Halla un número de tres cifras tal que la cifra de las unidades sea doble que la de las centenas, y la cifra de las decenas sea triple que la de las unidades.

54. Dos automóviles A y B salen de un mismo lugar y a la misma hora: el automóvil A recorre 400 Km. en 5 horas y el B recorre 100 Km. en 2 horas. Suponiendo que los dos marchan durante 10 horas, calcula la distancia que los separa.

55. A las diez de la mañana se oyen dos campanas que tocan a la vez. Sabiendo que una toca cada 6 minutos y la otra cada 8 minutos. ¿A qué hora volverán a sonar al mismo tiempo?

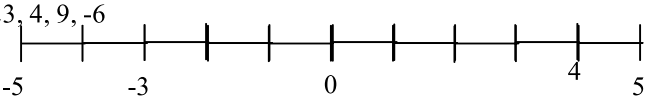
56. La edad en años, de una persona es múltiplo de 2, más 1; múltiplo de 7, más 6; y múltiplo de 10, menos 1. ¿Cuál es la edad del individuo?

57. Un albañil pensó en hacer un *muro* en 12 días; pero tardó 4 días más, por trabajar 2 horas menos cada día. ¿cuántas horas trabajó cada día?

Soluciones

1. 15, 7, -23, 4, 9, -6

2.



3. a) –23, -7, -3, 4, 6. b) –9, -2, 0, 5, 16. c) –38, -36, 2, 9, 27.

4. a) 28, 4, -10, -17, -32. b) 9, 3, 0, -14, -21. c) 15, 4, 2, -2, -13.

5. a) 7 b) –12 c) –6 d) 8 e) –11 f) 9

6. a) 10 b) –11 c) –6 d) 12 e) –13 f) 15

7. a) –3 b) –2 c) 5 d) –3 e) 1 f) –5

8. a) –21 b)-22 c) –11 d) 4 e) 36 f) 0

9. a) -40 b) 14 c) 21 d) 35 e) -46 f) 22

10. a) –3 b) 11 c) -79 d) 32

11. a) -43 b) -48 c) -28 d) –83

12. a) 15 b) -12 c) 54 d) 600 e) -36 f) 84

13. a) 24 b) 90 c) -240 d) 154 e) 360 f) –360

14. a) 6 b) 8 c) 8 d) 47

15. a) 8 b) –33 c) –7 d) 45

16. a) -8 b) 21 c) 34 d) –15

17. a) 9 b) 1 c) 125 d) 64 e) 1

18. a) 36 b) 1 c) 8 d) 81 e) 25

19. a) 10^4 b) 25 c) 16 d) 10^6 e) 36 f) 10^5

20. a) 36 b) 27 c) 81 d) $5^4 = 625$ e) 1 f) $10^2=100$

21. a) a = 2 b) a = 2 c) a = 2 d) a = -2 e) a = 8 f) a = -12

22. a) 31 b) 6 c) 17 d) 47

23. a) -2 b) 1 c) -90 d) 22

24. a) 1890 b) 99 c) 3 d) 5

25. a) 10 b) -29 c) -5 d) -2 e) 0

26. a) 3 b) 5 c) 48 d) 39

27. a) 6 b) 9 c) 5 d) 11

28. a) 12 b) 23 c) 17 d) 35

29. a) $6{,}4\cdot 10^5$ b) 10^2 c) 98 d) 324 e) 81 f) 9

30. a) 20 b) 210 c) 4900 d) 48

31. múltiplos de –9 → 9, 18, -27;
múltiplos de 11 → 22, -11, 33;
múltiplos de -7 → 7, 14, -21;
múltiplos de 23 → 46, -46, 69 .

32. a) No b) Sí c) Sí d) No e) Sí

33. a) Por 2, 3, 5. b) Por 2 c) Por 2, 3. d) Por 3, 5.

34. a) Por 5, 11. b) Por 2, 5. c) Por 11. d) Por 2, 3, 7.

35. a) Compuesto b) Compuesto c) Primo d) Compuesto

36. a) 5^5 b) $2^2\cdot 5\cdot 17$ c) $5^2\cdot 3\cdot 7$ d) $2^4\cdot 3^4$

37. a) $2\cdot 3\cdot 11^2$ b) $5^2\cdot 3^4$ c) $2^4\cdot 5\cdot 13$ d) $2\cdot 3^2\cdot 23$

38. a) m. c. d. = 2; m. c. m.= 1836 b) m. c. d= 10; m. c. m.= 2100
c) m. c. d.= 4; m. c. m.= 2880 d) m. c. d= 75; m. c. m.= 7875

39. a) m. c. d.= 8; m. c. m.= 8400 b) m. c. d= 27; m. c. m.= 540
c) m. c. d.= 1; m. c. m.= 48000 d) m. c. d= 6; m. c. m.= 360

40. 5 €.

41. 16 metros.

42. 15ºC.

43. 430 km.

44. 175 coches.

45. Ganará 6 canicas.

46. 14258 metros.

47. 46º C

48. 1 €.

49. 75 céntimos.

50. A cada uno le sobra 1 €. En total sobran 4 €.

51. Manuel: 30 fichas; Isabel: 60 fichas.

52. 70 piezas.
53. El número es 162.
54. La distancia que los separa es de 300 Km.
55. A las 10 horas 24 minutos.
56. La persona tiene 69 años.
57. 6 horas cada día.

TEMA III:
LOS NÚMEROS RACIONALES

Autoras:
Mª Trinidad Cámara Meseguer
Ana Belén Megías Martín

LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS

Mira esta receta:

Arroz de pesca

Ingredientes:
400 gramos de arroz
¼ kilo de mejillones
½ kilo de tomates
½ cebolla
Aceite
Sal

Cocer arroz con mucha agua y sal, ...

En esta receta hay números enteros: 400 gr. arroz, pero también hay otros números que nosotros no conocíamos hasta ahora: ¼, ½, esos números, ¿qué quieren decir?

Estos números se llaman fraccionarios y vamos a estudiarlos en este tema.

Los números fraccionarios no hablan de cosas enteras, quieren decir partes de una cosa. Entonces, ½ cebolla quiere decir media cebolla o una cebolla, la mitad.

Vamos a ver otros ejemplos de la vida normal (de todos los días) donde hay números fraccionarios:

Llego un cuarto de hora tarde (un cuarto = ¼)
La clase dura tres cuartos de hora (tres cuartos = ¾)
He estudiado la mitad del examen (la mitad = ½)
Quiero medio bocadillo de atún (medio = ½)

Pero un número de la forma a/b, ¿qué quiere decir?

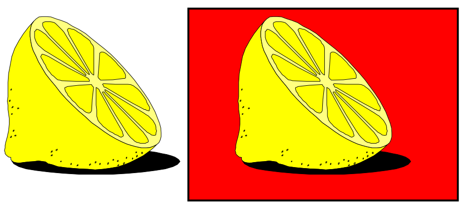
a/b es un número fraccionario = una fracción

Cuando escribimos un número de la forma a/b= $\frac{a}{b}$ quiere decir:

b = una cosa, ¿cuántas partes tiene?
a = ¿cuántas partes cogemos?

Un número a / b se dice "a partido por b". Algunos tienen un nombre especial. Después lo explicaremos. Ej: ½ se dice un medio o medio

Por ejemplo:
1/2 limón quiere decir: del limón hacemos 2 partes y cogemos 1



LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS

Observa la siguiente receta:

Arroz pesquero

<u>Ingredientes</u>:
400 gramos de arroz
¼ kilo de mejillones
½ kilo de tomates
½ cebolla
Aceite
Sal

Se cuece el arroz con bastante agua y sal, ...

En ella aparecen números enteros: 400 gramos de arroz, pero aparecen también otros números que no hemos visto hasta ahora: ¼; ½, ¿qué quieren decir estos números?

Estos números son **números fraccionarios** y son los que vamos a estudiar en este tema.

Los números fraccionarios representan no cosas enteras sino partes de una cosa. Así ½ cebolla es lo mismo que media cebolla o la mitad de una cebolla.

Vamos a ver otros ejemplos de la vida diaria en los que aparecen números fraccionarios:

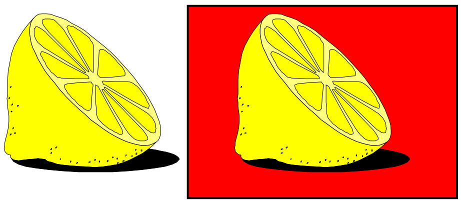
Llego un cuarto de hora tarde (un cuarto = ¼)
La clase dura tres cuartos de hora (tres cuartos = ¾)
Me he estudiado la mitad del examen (la mitad = ½)
Quiero medio bocadillo de atún (medio = ½)

¿Pero qué quiere decir un número de la forma a/b?

Siempre que escribimos un número en forma de fracción a/ b = $\frac{a}{b}$ significa:

b = número de partes en que dividimos algo.
a = número de partes que tomamos.

Por ejemplo:
1/2 limón quiere decir que partimos el limón en 2 partes y cogemos 1

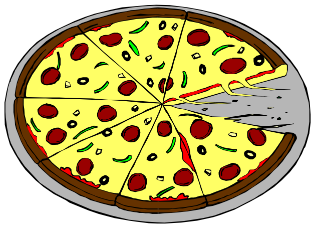


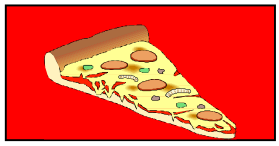
El número a/b se lee a partido por b. Algunos se leen de forma diferente como veremos a lo largo del tema

1 / 2 se lee un medio o medio

1/8 se dice un octavo

1 / 8 de pizza quiere decir: de una pizza hacemos 8 partes y cogemos 1





$a / b = \frac{a}{b}$

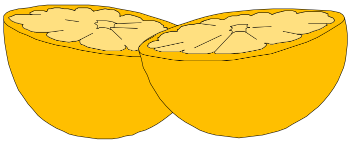
En la fracción a/b, el número a, se llama numerador y el número b se llama denominador.

a → numerador: las partes que cogemos
b → denominador: cuántas partes en total

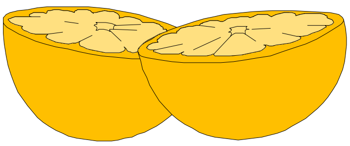
Si en una fracción, el numerador (número de arriba) es más grande que el denominador (número de abajo), eso quiere decir que esa fracción es más grande que 1.

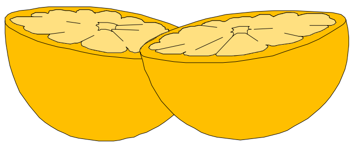
3 / 2 se dice tres medios

Por ejemplo, si yo digo: Pablo comió 3/2 de naranjas ¿qué quiero decir?. Cogemos 1 naranja y hacemos 2 partes (número de abajo: denominador).

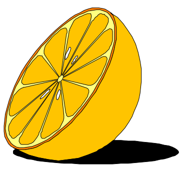


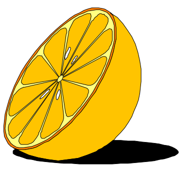
El numerador (nº de arriba) dice que Pablo come 3 partes, pero yo sólo tengo 2, ¿qué hacemos? Coger otra naranja y hacer otra vez 2 partes.

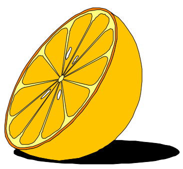




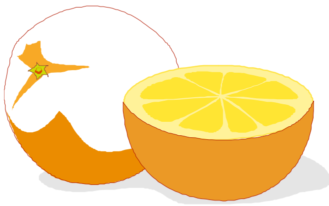
Ahora sí puedo coger 3 partes.





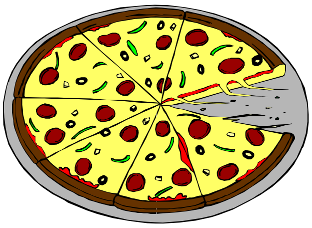


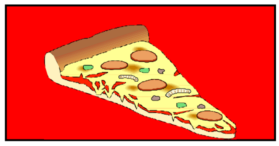
Entonces, 3/2 es igual que 1 naranja completa + media de otra naranja.



1/8 de pìzza quiere decir que dividimos una pizza en 8 partes y cogemos 1

1 / 8 se lee un octavo





En una fracción a/b, se llama numerador al número a y denominador al número b.

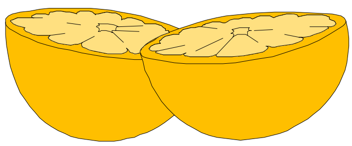
$a / b = \frac{a}{b}$

$\frac{a}{b}$ $\begin{array}{l} \rightarrow \text{numerador: partes que se toman} \\ \rightarrow \text{denominador: partes en que se divide la unidad} \end{array}$

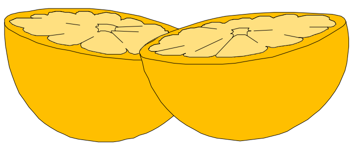
Si en una fracción el numerador es mayor que el denominador, nos indica que estamos hablando de números mayores que la unidad.

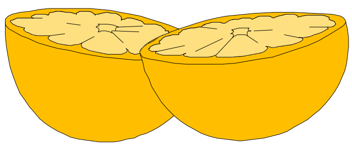
3 / 2 se lee tres medios

Por ejemplo, si digo que Pablito se comió 3/2 de naranjas, ¿qué quiero decir?. Cogemos 1 naranja y la dividimos en 2 partes como indica el denominador.

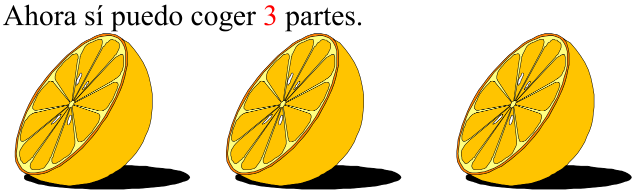


Pero el numerador indica que Pablito se comió 3 partes y sólo tengo 2 ¿ qué hacemos?. Cogemos una 2ª naranja y la partimos otra vez en 2 partes.

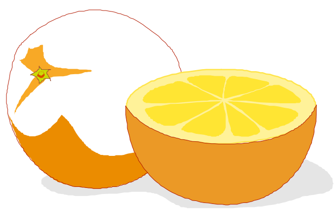




Ahora sí puedo coger 3 partes.



es decir 3/2 es lo mismo que una naranja completa y media de la otra.



Recuerda:

Z = números enteros

$\cup$ = unión

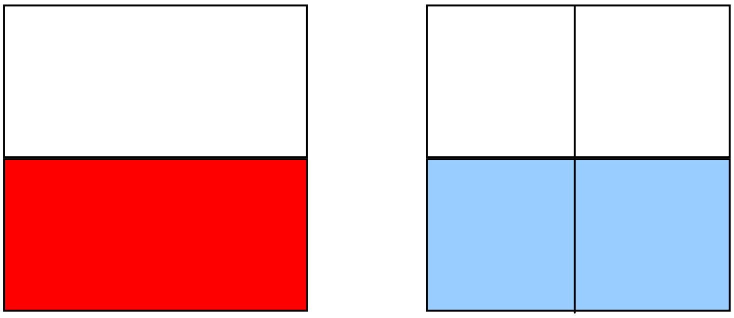
2/4 se dice dos cuartos

NÚMEROS RACIONALES

Los números racionales son todos los números enteros (Z) junto con las fracciones. Los números racionales se llaman Q.

$$Q = Z \cup \{ \text{ fracciones } \}$$

Las fracciones tienen una característica rara: una fracción se puede escribir de muchas formas. Ejemplo: 1/2 de cuadrado y 2/4 de cuadrado.



vemos que son lo mismo.

> Siempre:
> dos fracciones a/b y c/d son iguales cuando $a \cdot d = c \cdot b$

Así:

1/2 = 2/4 porque $1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$

Al revés, si tenemos una fracción y multiplicamos o dividimos arriba y abajo por el mismo número (el 0 no), tenemos otra fracción igual.

Por ejemplo:

1/2: si multiplicamos arriba y abajo por 2 → $\frac{1 \to \cdot 2}{2 \to \cdot 2} = \frac{2}{4}; \quad \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

3/6 se dice tres sextos

1/2: si multiplicamos arriba y abajo por 3 → $\frac{1 \to \cdot 3}{2 \to \cdot 3} = \frac{3}{6}; \quad \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

4/8 se dice cuatro octavos

4/8: si dividimos arriba y abajo por 2 → $\frac{4 \to :2}{8 \to :2} = \frac{2}{4}; \quad \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$

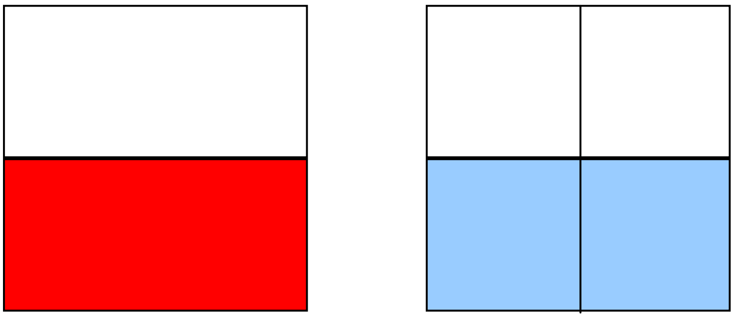
> **Simplificar** una fracción a/b ¿qué es? Quiere decir dividir arriba y abajo por el mismo número, hasta tener una fracción c/d, que no se puede dividir más, porque c y d son primos.
>
> Esa fracción c/d se le llama **fracción canónica o irreducible.**

LOS NÚMEROS RACIONALES.

Si juntamos los números enteros y las fracciones obtenemos los números racionales que se representan como Q.

$$Q = Z \cup \{ \text{ fracciones } \}$$

Una cosa curiosa que ocurre con las fracciones es que una misma fracción se puede escribir de muchas formas. Por ejemplo: marcamos 1/2 cuadrado y 2/4 del mismo cuadrado



vemos que son lo mismo.

En general: dos fracciones a/b y c/d son iguales si $a \cdot d = c \cdot b$

Así:

$1/2 = 2/4$ porque $1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$

Al revés, dada una fracción, si multiplicamos o dividimos numerador y denominador por un mismo número ($\neq 0$) obtenemos otra fracción igual a la dada.

Por ejemplo:

1/2 si multiplicamos numerador y denominador por 2 obtenemos 2/4 que es igual a 1/2.

1/2 si multiplicamos numerador y denominador por 3 obtenemos 3/6 que es igual a 1/2.

4/8 si dividimos numerador y denominador por 2 obtenemos 2/4 que es igual a 4/8.

Simplificar una fracción a/b significa dividir numerador y denominador por un mismo número hasta obtener una fracción c/d en la que c y d son primos entre sí y, por tanto, no se puede seguir dividiendo. A la fracción c/d se le llama **fracción canónica o irreducible.**

Recuerda:

Z = números enteros

$\cup$ = unión

2/4 se lee dos cuartos

3/6 se lee tres sextos

4/8 se lee cuatro octavos

$\frac{162}{135} = \frac{54}{45} = \frac{18}{15} = \frac{6}{5}$

se dice:
162 partido por 135 es igual a 54 partido por 45 es igual a 18 partido por 15 es igual a seis quintos.

$\frac{220}{770} = \frac{22}{77} = \frac{2}{7}$

se dice:
220 partido por 770 es igual a 22 partido por 77 es igual a dos séptimos

$\frac{1}{2} = 0'5$ se dice un medio es igual a cero coma cinco o cinco décimas.

Ejemplos:

a) $\frac{162}{135}$, ¿cómo se simplifica?

$$\frac{162 \to :3}{135 \to :3} = \frac{54}{45}$$

162: 2= 81, pero 135:2 no da exacto, entonces el 2 no vale, probamos el 3.

$$\frac{54 \to :3}{45 \to :3} = \frac{18}{15}$$

54: 2 = 27
45: 2 = no da exacto, probamos el 3

$$\frac{18 \to :3}{15 \to :3} = \frac{6}{5}$$

18:2 = 9
15: 2 = no da exacto, probamos el 3

$$\frac{162}{135} = \frac{54}{45} = \frac{18}{15} = \frac{6}{5}$$

El 6 se puede dividir por 2 y por 3, el 5 se puede dividir sólo por 5, entonces no hay números iguales para dividir; 6 y 5 son primos. La simplificación ha terminado, la fracción canónica o irreducible es $\frac{6}{5}$.

b) $\frac{220}{770}$, ¿cómo simplificar?

220 y 770 se pueden dividir por 10.

$$\frac{220 \to :10}{770 \to :10} = \frac{22}{77}$$

22 y 77 se pueden dividir por 11.

$$\frac{22 \to :11}{77 \to :11} = \frac{2}{7}$$

$$\frac{220}{770} = \frac{22}{77} = \frac{2}{7}$$

$\frac{2}{7}$ es la fracción irreducible.

EXPRESIÓN DECIMAL DE UNA FRACCIÓN

Ya hemos visto que la fracción es como partes de una cosa. Por el tema anterior, ya sabemos que partir es igual que dividir. Entonces, $\frac{a}{b}$ es lo mismo que a : b (a dividido entre b)

$\frac{1}{2}$ es igual que hacer la división de 1: 2 y coger el resultado

$$\begin{array}{r|l} 1 & 2 \\ \hline 0 & 0'5 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} = 0'5$$

Ejemplos:

a) Vamos a simplificar $\frac{162}{135}$.

162 y 135 son divisibles por 3, por tanto dividimos numerador y denominador por 3.

$$\frac{162}{135}=\frac{54}{45}$$

54 y 45 son divisibles por 3

$$\frac{162}{135}=\frac{54}{45}=\frac{18}{15}$$

18 y 15 son divisibles por 3

$$\frac{162}{135}=\frac{54}{45}=\frac{18}{15}=\frac{6}{5}$$

6 y 5 son primos entre sí, por tanto, no podemos seguir simplificando y la fracción canónica o irreducible es $\frac{6}{5}$.

$$\frac{162}{135}=\frac{54}{45}=\frac{18}{15}=\frac{6}{5}$$

se lee:
162 partido por 135 es igual a
54 partido por 45 es igual a
18 partido por 15 es igual a
seis quintos.

b) Vamos a simplificar $\frac{220}{770}$

220 y 770 se pueden dividir por 10.

$$\frac{220}{770}=\frac{22}{77}$$

22 y 77 se pueden dividir por 11.

$$\frac{220}{770}=\frac{22}{77}=\frac{2}{7}$$

que es la fracción irreducible.

$$\frac{220}{770}=\frac{22}{77}=\frac{2}{7}$$

se lee:
220 partido por 770 es igual a
22 partido por 77 es igual a
dos séptimos

EXPRESIÓN DECIMAL DE UNA FRACCIÓN.

Hemos visto que una fracción es equivalente a una partición y vimos en el tema anterior que partir o repartir algo era una operación ya conocida: la división. Por tanto, $\frac{a}{b}$ es lo mismo que a : b (a dividido entre b)

Así, $\frac{1}{2}$ es igual que el resultado de hacer la división de 1 entre 2.

$$\begin{array}{r|l} 1 & 2 \\ \hline 0 & 0'5 \end{array}$$

$$\frac{1}{2}=0'5$$

$\frac{1}{2}=0'5$ se lee un medio es igual a cero coma cinco o cinco décimas.

$\frac{3}{20} = 0'15$

se dice 3 partido por 20 es igual a cero coma quince o 15 centésimas

$\frac{3}{20} = 0'15$ porque

$$\begin{array}{r|l} 30 & 20 \\ \hline 100 & 0'15 \\ 0 & \end{array}$$

$\frac{1}{3} = 0'333......$ $\qquad$ $\frac{1}{6} = 0'1666......$

Cuando un número racional es una fracción, tú puedes escribirla en forma decimal, ¿cómo? con la división.

Cuando tú haces la división, pueden pasar tres cosas:

1. la forma decimal es finita (tiene fin)

   Ej: $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{20}$.

   Entonces, $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{20}$ dan un **número decimal**.

2. la forma decimal no tiene fin, pero los números detrás de la coma se repiten.

   Ej: $\frac{1}{3} = 0'3333\underbrace{....}$

   Quiere decir que sigue 3 3 3 3 3 3 sin parar.

   Eso se llama **expresión decimal periódica pura** y se escribe $\frac{1}{3} = 0'\widehat{3}$

$\frac{1}{3} = 0'\widehat{3}$ se dice un tercio es igual a cero coma tres período

3. la forma decimal no tiene fin y los números detrás de la coma, al principio no se repiten, y después sí.

   Ej: $\frac{1}{6} = 0'\,1\,\overline{6\,6}\,...$

   Sí se repite

   No se repite

   1/6 da una **expresión decimal periódica mixta** y se escribe $\frac{1}{6} = 0'1\widehat{6}$

$\frac{1}{6} = 0'1\widehat{6}$ se dice un sexto es igual a cero coma dieciséis, período en seis

También se puede hacer al revés, por ejemplo, yo tengo un número decimal, y lo quiero cambiar a fracción, que se llama **fracción generatríz** ¿cómo se hace? Depende de cómo sea la forma decimal.

<u>Número decimal</u>

arriba → número sin coma

abajo → 0, ¿cuántos? depende $\underbrace{....}_{\text{¿cuántos?}}$

$0'15 = \frac{15}{100} \xrightarrow{\textit{simplificar}} :5 = \frac{3}{20}$

2 $\quad$ 2

siempre

$2'312 = \frac{2312}{1000} = \frac{1156}{500} = \frac{578}{250} = \frac{289}{125}$

3 siempre 3

: 2

$\frac{3}{20} = 0'15$ ya que 30

$\frac{1}{3} = 0'333......$ $\frac{1}{6} = 0'1666......$

Siempre que tenemos un número racional en forma de fracción se puede expresar de forma decimal haciendo la división.

Al hacer la división pueden ocurrir tres cosas:

1. Que la expresión decimal sea finita, por ejemplo $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{20}$.

   Se dice que $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{20}$ dan como resultado un **número decimal**.

2. Que la expresión decimal sea infinita pero todo lo que hay detrás de la coma se repite, por ejemplo $\frac{1}{3} = 0'3333...$

   Se dice que 1/3 da como resultado una **expresión decimal periódica pura** y se escribe $\frac{1}{3} = 0'\overset{\frown}{3}$.

3. Que la expresión decimal sea infinita pero lo que hay detrás de la coma una parte no se repite y otra sí, por ejemplo $\frac{1}{6} = 0'1666...$

   Se dice que 1/6 da como resultado una **expresión decimal periódica mixta** y se escribe $\frac{1}{6} = 0'1\overset{\frown}{6}$

También es posible si tenemos un número decimal o una expresión decimal periódica pura o periódica mixta obtener la fracción a la que es igual, llamada **fracción generatriz**.

La fracción generatriz de un número decimal es la que tiene en el numerador el número sin coma y en el denominador un 1 seguido de tantos ceros como cifras tiene la parte decimal. Después simplificamos el resultado.

Ejemplos:

$0'15 = \frac{15}{100} \underset{\uparrow}{=} \frac{3}{20}$ dividimos por 5	$2'312 = \underbrace{\frac{2312}{1000} = \frac{1156}{500} = \frac{578}{250} = \frac{289}{125}}_{\text{dividimos por 2}}$

$\frac{3}{20} = 0'15$ se lee 3 partido por 20 es igual a cero coma 15 o 15 centésimas.

$\frac{1}{3} = 0'\overset{\frown}{3}$ se lee un tercio es igual a cero coma tres periodo.

$\frac{1}{6} = 0'1\overset{\frown}{6}$ se lee un sexto es igual a cero coma 16, periodo en seis

Expresión decimal periódica pura

Arriba → número sin coma ni periodo − número delante de la coma $\boxed{..}\ ,\overset{\frown}{...}$
Abajo → 9, ¿cuántos? depende $\underbrace{\overset{\frown}{....}}_{¿cuántos?}$

$3'\overset{\frown}{21}$ se dice tres coma 21 con periodo en el 21

$$0'\overset{\frown}{3} = \frac{03-0}{9 \leftarrow \text{siempre}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

03 = número sin comas ni periodo
0 = número delante de la coma

$$3'\overset{\frown}{21} = \frac{321-3}{99} = \frac{318}{99} = \frac{106}{33}$$

Expresión decimal periódica mixta

Arriba → número sin coma ni periodo - número hasta el periodo $\boxed{..'..}\ \overset{\frown}{......}$

Abajo → 9, ¿cuántos? ..'.... $\overset{\frown}{.........}$ manda; 0, ¿cuántos? ..'....... $\overset{\frown}{.....}$ manda

$0'1\overset{\frown}{6}$ se dice cero coma 16 con periodo en 6

$$0'1\overset{\frown}{6} = \frac{016-01}{90} = \frac{16-1}{90} = \frac{15}{90} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

016 = número sin comas ni periodo
01 = número hasta periodo

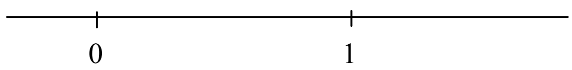
$3'1\overset{\frown}{23}$ se dice tres coma 123 con periodo en 23

$$3,1\overset{\frown}{23} = \frac{3123-31}{990} = \frac{3092}{990} = \frac{1546}{495}$$

REPRESENTACIÓN DE UN NÚMERO RACIONAL

Igual que los números enteros y naturales, los números racionales también se pueden dibujar en una recta, ¿cómo se hace?

Dibujamos la recta y ponemos el 0. Cogemos una parte como 1



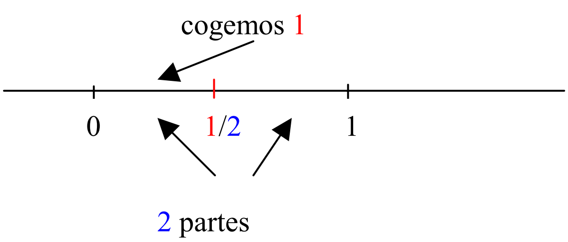
Hay varios casos:

CASO I: El número de arriba es más pequeño que el número de abajo

Cogemos de 0 hasta 1 y hacemos partes, ¿cuántas? el número de abajo manda, y cogemos ¿cuántas? el número de arriba manda

Ejemplos:

a) Para dibujar 1/2



La fracción generatriz de una expresión decimal periódica pura tiene:

Numerador = número sin coma – parte entera del número.
Denominador = tantos 9 como cifras tiene el periodo.
Después se simplifica.

Ejemplos:

$0'\overset{\frown}{3} = \dfrac{3-0}{9} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dividimos por 3}}}{\dfrac{3}{9}} = \dfrac{1}{3}$	$3'\overset{\frown}{21} = \dfrac{321-3}{99} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dividimos entre 3}}}{\dfrac{318}{99}} = \dfrac{106}{33}$

$3'\overset{\frown}{21}$ se lee tres coma 21 con periodo en el 21

La fracción generatriz de una expresión decimal periódica mixta tiene:

Numerador = número sin coma – parte entera y el anteperíodo.
Denominador = tantos 9 como cifras tiene el periodo seguido de tantos ceros como cifras tiene el anteperíodo.
Después se simplifica.

Ejemplos:

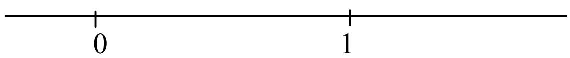
$0'1\overset{\frown}{6} = \dfrac{16-1}{90} = \underset{\substack{\uparrow \\ :3}}{\dfrac{15}{90}} = \underset{\substack{\uparrow \\ :5}}{\dfrac{5}{30}} = \dfrac{1}{6}$	$3'1\overset{\frown}{23} = \dfrac{3123-31}{990} = \underset{\substack{\uparrow \\ :2}}{\dfrac{3092}{990}} = \dfrac{1546}{495}$

$0'1\overset{\frown}{6}$ se lee cero coma 16 con periodo en 6

$3'1\overset{\frown}{23}$ se lee tres coma 123 con periodo en 23

REPRESENTACIÓN DE UN NÚMERO RACIONAL

Igual que representamos sobre una recta los números naturales y enteros, también podemos representar sobre una recta los números racionales. Para ello dibujamos una recta y sobre ella marcamos un punto como 0 y cogemos una medida como unidad.



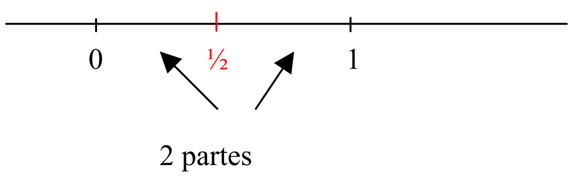
Para hacer la representación distinguiremos casos:

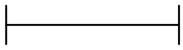
CASO I: El numerador es más pequeño que el denominador.

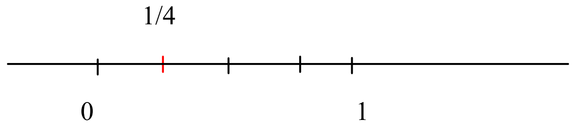
En este caso partimos el segmento de recta que va desde cero hasta 1 en tantas partes como indica el denominador y cogeremos tantas partes como indica el numerador.

Ejemplos:

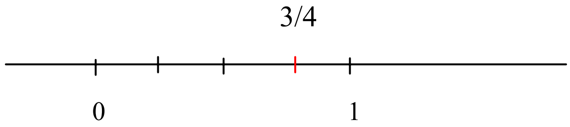
a) Para representar 1/2



$\frac{1}{4}$: dividimos el segmento  en 4 partes y cogemos 1.



$\frac{3}{4}$: dividimos el segmento en 4 partes y cogemos 3.



CASO II: número de arriba más grande que el número de abajo.

Hacemos la división y cogemos partes ¿cuántas? Cociente + $\frac{\text{resto}}{\text{denominador}}$

Ejemplos:

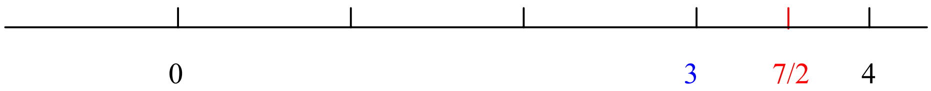
$\frac{7}{2} \longrightarrow$ Hacemos la división

$$\begin{array}{r|l} 7 & 2 \\ \hline 1 & 3 \end{array}$$

resto   cociente

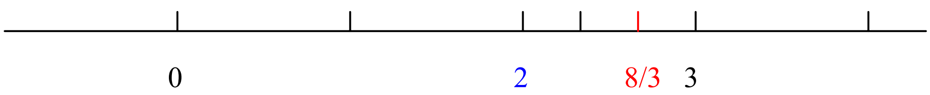
$$\frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2}$$

Cogemos 3 partes + $\frac{1}{2}$ de otro segmento (3 a 4)

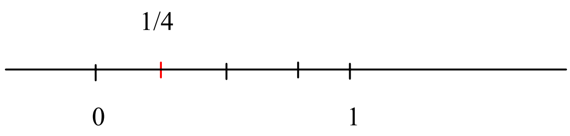


$$\begin{array}{r|l} 8 & 3 \\ \hline 2 & 2 \end{array}$$

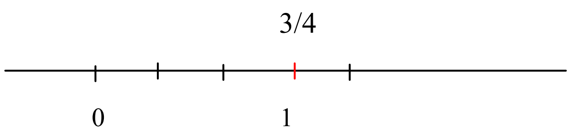
$$\frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3}$$



$\frac{1}{4}$: dividimos el segmento en 4 partes y cogemos 1.



$\frac{3}{4}$: dividimos el segmento en 4 partes y cogemos 3.

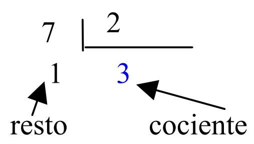


CASO II : Si el numerador es mayor que el denominador.

Se hace la división entera numerador entre denominador y se cogen tantas unidades completas como indica el cociente y de la unidad siguiente lo que indica la fracción: $\frac{\text{resto}}{\text{denominador}}$.

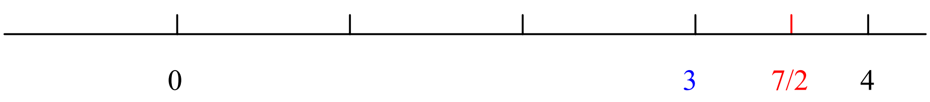
<u>Ejemplos</u>:

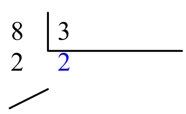
$\frac{7}{2}$: hacemos la división



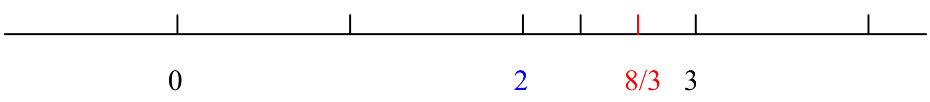
$$\frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2}$$

Cogemos 3 unidades y además de la siguiente unidad (segmento que va desde el 3 hasta el 4) cogemos $\frac{1}{2}$.

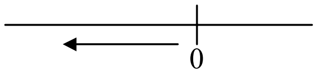




$$\frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3}$$

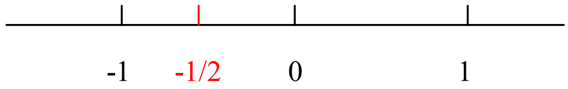


CASO III: si el número racional es negativo. Se hace igual que con los números positivos, pero cogemos las partes a la izquierda del 0.

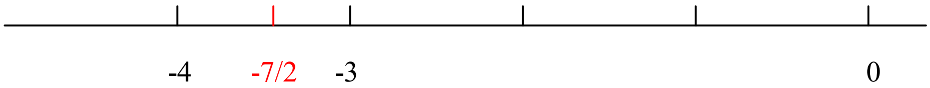


Ejemplos:

$\frac{-1}{2}$



$\frac{-7}{2} = -(3 + \frac{1}{2})$



PASO DE FRACCIONES A IGUAL DENOMINADOR

Para hacer algunas operaciones (ordenar, suma y resta) hacen falta fracciones con el mismo denominador (nº de abajo). ¿Cómo se hace?

Para pasar 2 fracciones $\frac{a_1}{b_1}$ y $\frac{a_2}{b_2}$ a igual denominador, hacemos los pasos:

1. Calcular el m. c. m. de los denominadores b_1 y b_2 . m. c. m. $(b_1, b_2) = M$. Ese número M es el denominador nuevo para las fracciones.

2. Dividir M entre b_1 y multiplicar por a_1.
   $(M : b_1) \times a_1$ = numerador nuevo de la 1ª fracción.

3. Dividir M entre b_2 y multiplicar por a_2.
   $(M : b_2) \times a_2$ = numerador nuevo de la 2ª fracción.

Ejemplo:

Para que $\frac{1}{4}$ y $\frac{5}{6}$ tengan igual denominador:

1. m. c. m. (4,6) = 12 (nuevo denominador)
2. (12 : 4) x 1 = 3 $\qquad \frac{1}{4} \rightarrow \frac{3}{12}$ = 3/12
3. (12 : 6) x 5 = 10 $\qquad \frac{5}{6} \rightarrow \frac{10}{12}$ = 10/12

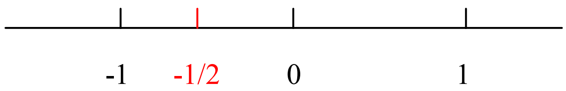
Podemos cambiar $\frac{1}{4}$ y $\frac{5}{6} \Rightarrow \frac{3}{12}$ y $\frac{10}{12}$

CASO III : Si el número racional es negativo.

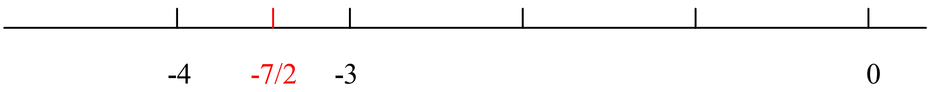
Se hace igual que si es positivo pero para la parte izquierda del número 0.

Ejemplos:

$\frac{-1}{2}$



$\frac{-7}{2} = -(3 + \frac{1}{2})$



REDUCCIÓN DE FRACCIONES A COMÚN DENOMINADOR

Para realizar ciertas operaciones que después explicaremos como: ordenación, suma y resta necesitamos que todas las fracciones que intervienen en dicha operación tengan el mismo denominador.

Para reducir dos fracciones $\frac{a_1}{b_1}$ y $\frac{a_2}{b_2}$ a común denominador se siguen los siguientes pasos:

1. Se calcula el m.c.m. de los denominadores b_1 y b_2: m.c.m.(b_1 , b_2) = M.
   Este número M será el nuevo denominador.

2. Dividimos M por b_1 y lo multiplicamos por a_1.
   $(M : b_1) \times a_1$ = nuevo numerador de la 1ª fracción.

3. Dividimos M por b_2 y lo multiplicamos por a_2.
   $(M : b_2) \times a_2$ = nuevo numerador de la 2ª fracción.

Ejemplo:

Vamos a reducir a común denominador $\frac{1}{4}$ y $\frac{5}{6}$.

1. m.c.m. (4, 6) = 12 (nuevo denominador)
2. (12 : 4) x 1 = 3 $\qquad \frac{1}{4} \rightarrow \frac{3}{12}$ = 3/12
3. (12 : 6) x 5 = 10 $\qquad \frac{5}{6} \rightarrow \frac{10}{12}$ = 10/12

Luego podemos sustituir las fracciones $\frac{1}{4}$ y $\frac{5}{6}$ por las fracciones $\frac{3}{12}$ y $\frac{10}{12}$.

Si por ejemplo no tengo 2 fracciones, sino que tengo más; da igual, hacemos lo mismo.
Ejemplo:

Para que $\frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{1}{6}$ y $\frac{3}{8}$ $\rightarrow$ tengan el mismo denominador

1º Hacemos el m. c. m. (3, 2, 6, 8) = 24

2º (24 : 3) x 1 = 8 $\Rightarrow$ $\frac{1}{3} \rightarrow \frac{8}{24}$

(24 : 2) x 3 = 36 $\Rightarrow$ $\frac{3}{2} \rightarrow \frac{36}{24}$

(24 : 6) x 1 = 4 $\Rightarrow$ $\frac{1}{6} \rightarrow \frac{4}{24}$

(24 : 8) x 3 = 9 $\Rightarrow$ $\frac{3}{8} \rightarrow \frac{9}{24}$

Equivalentes quiere decir que valen igual

Entonces, $\frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{1}{6}$ y $\frac{3}{8}$ son *equivalentes* a $\frac{8}{24}, \frac{36}{24}, \frac{4}{24}$ y $\frac{9}{24}$.

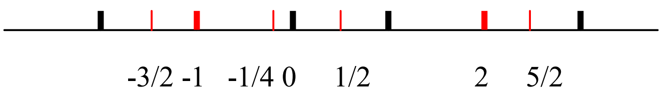
ORDENAR NÚMEROS RACIONALES

Para ordenar los números racionales, hay 3 formas:

1. Dibujar los números en la recta y después leer de izquierda a derecha ($\rightarrow$), que quiere decir desde más pequeño $\rightarrow$ hasta más grande.

Ejemplo:

Para ordenar $\frac{1}{2}$, 0, $\frac{-1}{4}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{-3}{2}$, -1, 2, se dibujan en la recta:



Eso (1) se dice:

menos tres medios menor que menos uno, menor que menos un cuarto, menor que cero, menor que un medio, menor que dos, menor que cinco medios.

Leer $\longrightarrow$

$\frac{-3}{2}$, después -1, después $\frac{-1}{4}$, después 0, después $\frac{1}{2}$, después 2, después $\frac{5}{2}$ o también se escribe:

$$\frac{-3}{2} < -1 < \frac{-1}{4} < 0 < \frac{1}{2} < 2 < \frac{5}{2} \quad (1)$$

Esta forma para ordenar, es muy larga, necesita mucho tiempo, y ahora se utiliza poco.

Si hay más de dos fracciones también se pueden reducir a común denominador siguiendo los mismos pasos.

Ejemplo:

Para reducir a común denominador $\frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{1}{6}$ y $\frac{3}{8}$

Primero hacemos el m. c. m. (3, 2, 6, 8) = 24 y después:

(24 : 3) x 1 = 8 $\quad \frac{1}{3} \rightarrow \frac{8}{24}$

(24 : 2) x 3 = 36 $\quad \frac{3}{2} \rightarrow \frac{36}{24}$

(24 : 6) x 1 = 4 $\quad \frac{1}{6} \rightarrow \frac{4}{24}$

(24 : 8) x 3 = 9 $\quad \frac{3}{8} \rightarrow \frac{9}{24}$

Luego $\frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{1}{6}$ y $\frac{3}{8}$ son equivalentes a $\frac{8}{24}, \frac{36}{24}, \frac{4}{24}$ y $\frac{9}{24}$.

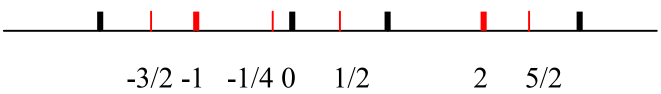
ORDENACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

Para ordenar los números racionales podemos hacerlo de tres formas.

1. Representando los números sobre la recta y después leyendo de izquierda a derecha (de menor a mayor).

Ejemplo:

Para ordenar $\frac{1}{2}$, 0, $\frac{-1}{4}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{-3}{2}$, -1, 2, los representamos sobre la recta:



entonces si leemos de izquierda a derecha tenemos:

$\frac{-3}{2}$, después -1, después $\frac{-1}{4}$, después 0, después $\frac{1}{2}$, después 2, después $\frac{5}{2}$, es decir:

$$\frac{-3}{2} < -1 < \frac{-1}{4} < 0 < \frac{1}{2} < 2 < \frac{5}{2} \quad (1)$$

La expresión (1) se lee:

menos tres medios menor que menos uno, menor que menos un cuarto, menor que cero, menor que un medio, menor que dos, menor que cinco medios.

Esta forma de ordenación es la más complicada y la que menos se usa.

2. Cambiar los números → a forma decimal (con ´) y ordenar

Ejemplo:

Para ordenar: $\frac{1}{2}$, 0’41, 0, 1’37, 1’371

1º Cambiar todos a decimal:

$\frac{1}{2}$ = 0’5; los otros números ya están en decimal: 0’41; 0, 1’37, 1’371

Para ordenar, tú puedes poner ceros al final si hace falta, para poder comparar más fácilmente. Ej.: 1’37 = 1’370.

Si ponemos ceros en los números, hasta tener 3 decimales, entonces:

0’500, 0’410, 0, 1’370, 1’371

Ahora, es más fácil: el más pequeño 0, después 0’410 después 0’500 = $\frac{1}{2}$ después 1’370 y después 1’371

$$0 < 0´41 < 0´5 = \frac{1}{2} < 1´370 = 1´37 < 1´371$$

que se dice:

0 menor que 0´41, menor que 0´5 (un medio), menor que 1´37, menor que 1,371

Esta forma, ¿cuándo se utiliza? Cuando me dan muchos números con decimales.

3. Cuando muchos números están en forma de fracción, ¿qué hacemos? Ponemos todos los números con el mismo denominador (el número de abajo)

Ejemplos:

a) $\frac{1}{3}$ o $\frac{1}{2}$, ¿cuál es mayor?

Primero ponemos las dos fracciones con el mismo denominador.
Hacemos el m. c. m. (2, 3) = 6.

Después cambiamos las fracciones a otras equivalentes (valen igual) con denominador 6.

$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ porque $(6: 3) \times 1 = 2$

$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ porque $(6: 2) \times 1 = 3$

Por último miramos los números de arriba (numerador), yo sé que 3 > 2, entonces $\frac{3}{6} > \frac{2}{6}$ y, también, $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

2. Pasamos los números a su expresión decimal y los ordenamos.

Ejemplo:

Para ordenar: $\frac{1}{2}$, 0’41, 0, 1’37, 1’371 primero los pasamos todos a expresión decimal y tenemos:

$$0'5;\ 0'41;\ 0,\ 1'37,\ 1'371$$

Para ordenar estos números podemos completar con ceros cualquier número, para que sea más fácil la comparación. Así 1’37 = 1’370.

En este caso, si completamos todos los números decimales con ceros hasta tener todos tres cifras decimales, tenemos:

$$0'500,\ 0'410,\ 0,\ 1'370,\ 1'371$$

Y ahora podemos ver que el menor es 0, después 0’410 después 0’500 = $\frac{1}{2}$ después 1’370 y después 1’371

$$0 < 0'41 < 0'5 = \frac{1}{2} < 1'370 = 1'37 < 1'371$$

que se lee:

0 menor que 0´41, menor que 0´5 (un medio), menor que 1´37, menor que 1,371

Usaremos esta forma de ordenación cuando casi todos los números que nos den estén en forma decimal.

3. Si los números están en forma de fracción, la manera más fácil para ordenarlos es expresar todos los números con el mismo denominador y ordenarlos mirando los numeradores.

Ejemplos:

a) Para saber quien es mayor $\frac{1}{3}$ ó $\frac{1}{2}$, seguimos los siguientes pasos:

Primero expresamos ambas fracciones con el mismo denominador, es decir, con denominador igual al m. c. m. (2, 3) = 6.

Después transformamos las fracciones dadas en otras equivalentes con denominador 6 tal y como hemos explicado en el apartado anterior. Así:

$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ pues $(6:3) \times 1 = 2$

$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ pues $(6:2) \times 1 = 3$

Finalmente, nos fijamos en los nuevos numeradores, como 3 > 2, tenemos que $\frac{3}{6} > \frac{2}{6}$ y, por tanto, $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

a) Ordenar $\frac{-1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{4}$, 0, 2, $\frac{7}{5}$

1º m. c. m. de los denominadores. Recuerda que $0 = \frac{0}{1}$ y $2 = \frac{2}{1}$, entonces el nuevo denominador es el m. c. m. (3, 6, 4, 1, 5) = 60.

2º Cambiar a otra fracción con denominador 60:

(60 : 3) x (-1) = -20	$\frac{-1}{3} \to \frac{-20}{60}$	(60 : 6) x 1 = 10	$\frac{1}{6} \to \frac{10}{60}$
(60 : 4) x 3 = 45	$\frac{3}{4} \to \frac{45}{60}$	(60 : 1) x 0 = 0	$0 \to \frac{0}{60}$
(60 : 1) x 2 = 120	$2 \to \frac{120}{60}$	(60 : 5) x 7 = 84	$\frac{7}{5} \to \frac{84}{60}$

3º Mirar los números de arriba:
el más pequeño es –20 ($\frac{-1}{3} \to \frac{-20}{60}$), después 0 ($0 \to \frac{0}{60}$), después 10 ($\frac{1}{6} \to \frac{10}{60}$), después 45 ($\frac{3}{4} \to \frac{45}{60}$),después 84 ($\frac{7}{5} \to \frac{84}{60}$),y después 120 ($2 \to \frac{120}{60}$).

Entonces: $\frac{-1}{3} < 0 < \frac{1}{6} < \frac{3}{4} < \frac{7}{5} < 2$

OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

<u>SUMA:</u>

Para sumar dos fracciones, hay 2 formas, depende:

CASO I: Cuando las fracciones tienen el denominador (número abajo) igual, utilizamos esta fórmula: $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$

<u>Ejemplos:</u>

a) $\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3$

b) $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3+2}{7} = \frac{5}{7}$

c) $\frac{1}{2} + \frac{7}{2} + \frac{11}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1+7+11+3}{2} = \frac{22}{2} = 11$

Para ordenar $\frac{-1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{4}$, 0, 2, $\frac{7}{5}$, primero hacemos el denominador común, para ello debes fijarte en que 0 = $\frac{0}{1}$ y 2 = $\frac{2}{1}$, luego el denominador común es el m. c. m. (3, 6, 4, 1, 5) = 60.

Después pasamos las fracciones a otras equivalentes con denominador 60:

(60 : 3) x (-1) = -20	$\frac{-1}{3} \to \frac{-20}{60}$	(60 : 6) x 1 = 10	$\frac{1}{6} \to \frac{10}{60}$
(60 : 4) x 3 = 45	$\frac{3}{4} \to \frac{45}{60}$	(60 : 1) x 0 = 0	$0 \to \frac{0}{60}$
(60 : 1) x 2 = 120	$2 \to \frac{120}{60}$	(60 : 5) x 7 = 84	$\frac{7}{5} \to \frac{84}{60}$

Finalmente, nos fijamos en los numeradores de las nuevas fracciones:

el menor es –20 ($\frac{-1}{3} \to \frac{-20}{60}$), después 0 ($0 \to \frac{0}{60}$), después 10 ($\frac{1}{6} \to \frac{10}{60}$), después 45 ($\frac{3}{4} \to \frac{45}{60}$), después 84 ($\frac{7}{5} \to \frac{84}{60}$) y, después 120 ($2 \to \frac{120}{60}$).

Luego: $\frac{-1}{3} < 0 < \frac{1}{6} < \frac{3}{4} < \frac{7}{5} < 2$

OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

SUMA:

Para sumar dos fracciones distinguiremos 2 casos.

CASO I: Si las fracciones tienen el mismo denominador, usaremos la fórmula:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

Ejemplos:

a) $\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3$

b) $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3+2}{7} = \frac{5}{7}$

c) $\frac{1}{2} + \frac{7}{2} + \frac{11}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1+7+11+3}{2} = \frac{22}{2} = 11$

CASO II: Cuando las fracciones tienen el denominador (número abajo) distinto, ponemos todas las fracciones con el mismo denominador, con el m.c. m. Igual que antes.

Ejemplos:

a) Para calcular $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$:

m. c. m. (2, 6) = 6

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{(6:2)\cdot 1}{6}+\frac{(6:6)\cdot 1}{6}=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}$$

Ahora usamos la misma fórmula de antes (caso I):

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3+1}{6}=\frac{4}{6}$$

Siempre, al final, simplificar.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3+1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

b) $\frac{3}{7}+\frac{1}{5}$

m. c. m. (7 , 5) = 35

$$\frac{3}{7}+\frac{1}{5}=\frac{(35:7)\cdot 3}{35}+\frac{(35:5)\cdot 1}{35}=\frac{15}{35}+\frac{7}{35}=\frac{15+7}{35}=\frac{22}{35}$$

c) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ m. c. m. (2, 3, 4) = 12

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=$$

$$\frac{(12:2)\cdot 1}{12}+\frac{(12:3)\cdot 1}{12}+\frac{(12:4)\cdot 1}{12}=\frac{6}{12}+\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{6+4+3}{12}=\frac{13}{12}$$

d) $\frac{3}{5}+\frac{7}{2}+\frac{11}{10}$ m. c. m. (5, 2, 10) = 10

$$\frac{3}{5}+\frac{7}{2}+\frac{11}{10}=$$

$$\frac{(10:5)\cdot 3}{10}+\frac{(10:2)\cdot 7}{10}+\frac{(10:10)\cdot 11}{10}=\frac{6}{10}+\frac{35}{10}+\frac{11}{10}=\frac{6+35+11}{10}=\frac{52}{10}=\frac{26}{5}$$

CASO II: Si las fracciones tienen distinto denominador, expresaremos todas las fracciones con el mismo denominador y después usaremos la fórmula del caso I.

Ejemplos:

a) Para calcular $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$, primero expresaremos todas las fracciones con el mismo denominador, es decir, hallaremos el m. c. m. de los denominadores:

m. c. m. (2, 6) = 6

y transformaremos todas las fracciones en otras equivalentes con denominador 6.

Así: $$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}$$

Ahora usaremos la fórmula del caso I:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3+1}{6}=\frac{4}{6}$$

Siempre tras acabar una operación, simplificaremos el resultado.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3+1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

b) $\frac{3}{7}+\frac{1}{5}$

m. c. m. (7 , 5) = 35

$$\frac{3}{7}+\frac{1}{5}=\frac{15}{35}+\frac{7}{35}=\frac{15+7}{35}=\frac{22}{35}$$

c) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$

m. c. m. (2, 3, 4) = 12

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{6}{12}+\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{6+4+3}{12}=\frac{13}{12}$$

d) $\frac{3}{5}+\frac{7}{2}+\frac{11}{10}$

m. c. m. (5, 2, 10) = 10

$$\frac{3}{5}+\frac{7}{2}+\frac{11}{10}=\frac{6}{10}+\frac{35}{10}+\frac{11}{10}=\frac{6+35+11}{10}=\frac{52}{10}=\frac{26}{5}$$

RESTA:
La resta se hace igual que la suma.

Ejemplo:

a) $\frac{7}{3}-\frac{2}{3}$, tienen el denominador igual, entonces directo, se restan los números de arriba

$$\frac{7}{3}-\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$$

b) $\frac{1}{2}-\frac{1}{5}$ → tienen el denominador diferente; 1º hacer m. c. m.

m. c. m. (2, 5) = 10.

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{(10:2)\cdot 1}{10}-\frac{(10:5)\cdot 1}{10}=\frac{5}{10}-\frac{2}{10}=\frac{5-2}{10}=\frac{3}{10}$$

c) $\frac{3}{5}-\frac{7}{2}-\frac{1}{4}$ m. c. m. (5, 2, 4) = 20

$$\frac{3}{5}-\frac{7}{2}-\frac{1}{4}=\frac{(20:5)\cdot 3}{20}-\frac{(20:2)\cdot 7}{20}-\frac{(20:4)\cdot 1}{20}=\frac{12}{20}-\frac{70}{20}-\frac{5}{20}=$$

$$\frac{12-70-5}{20}=\frac{-63}{20}$$

MULTIPLICACIÓN

Hay una fórmula:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a.c}{b.d}$$

Ejemplos:

a) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 5}=\frac{3}{10}$

b) $\frac{3}{7}\cdot\frac{8}{11}=\frac{3\cdot 8}{7\cdot 11}=\frac{24}{77}$

Cuando hay muchas fracciones, se hace igual

Ejemplos:

a) $\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1\cdot 3\cdot 1}{3\cdot 5\cdot 6}=\frac{3}{90}=\frac{1}{30}$

Antes de hacer ese paso, si puedes, simplifica: $\frac{1\cdot\cancel{3}\cdot 1}{\cancel{3}\cdot 5\cdot 6}=\frac{1\cdot 1}{5\cdot 6}=\frac{1}{30}$

RESTA:
Para restar dos fracciones procederemos de la misma forma que para sumarlas.

Ejemplos:

a) Para hacer la resta $\frac{7}{3}-\frac{2}{3}$, como tienen igual denominador, restaremos los numeradores y dejaremos el mismo denominador

$$\frac{7}{3}-\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$$

b) Para realizar la resta $\frac{1}{2}-\frac{1}{5}$, como los denominadores son distintos, primero hallaremos el denominador común.

m. c. m. (2, 5) = 10.

Ahora convertiremos las fracciones en otras equivalentes con denominador 10 y procederemos como en el caso anterior.

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{5}{10}-\frac{2}{10}=\frac{5-2}{10}=\frac{3}{10}$$

c) $\frac{3}{5}-\frac{7}{2}-\frac{1}{4}$

m. c. m. (5, 2, 4) = 20

$$\frac{3}{5}-\frac{7}{2}-\frac{1}{4}=\frac{12}{20}-\frac{70}{20}-\frac{5}{20}=\frac{12-70-5}{20}=\frac{-63}{20}$$

MULTIPLICACIÓN
Para multiplicar dos fracciones usaremos la siguiente fórmula:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Ejemplos:

a) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 5}=\frac{3}{10}$ b) $\frac{3}{7}\cdot\frac{8}{11}=\frac{3\cdot 8}{7\cdot 11}=\frac{24}{77}$

Si queremos multiplicar varias fracciones, multiplicamos sus numeradores y pondremos el resultado en el numerador de la fracción resultante y multiplicaremos los denominadores y pondremos el resultado en el denominador de la fracción resultante.

Ejemplos:

a) $\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1\cdot 3\cdot 1}{3\cdot 5\cdot 6}=\frac{3}{90}=\frac{1}{30}$

Antes de hacer los productos en la expresión $\frac{1\cdot 3\cdot 1}{3\cdot 5\cdot 6}$ si podemos es bueno simplificar. Así aquí podemos eliminar un 3 del numerador con un 3 del denominador $\frac{1\cdot 3\cdot 1}{3\cdot 5\cdot 6}=\frac{1\cdot 1}{5\cdot 6}=\frac{1}{30}$

b) $\frac{-2}{3}\cdot\frac{-1}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{(-2)\cdot(-1)\cdot 3}{3\cdot 4\cdot 2}=\frac{2\cdot 3}{3\cdot 4\cdot 2}=\frac{1}{4}$

DIVISIÓN

Para dividir hay una fórmula:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Ejemplos:

a) $\frac{2}{3}:\frac{7}{5}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 7}=\frac{10}{21}$

b) $\frac{1}{5}:\frac{3}{5}=\frac{1\cdot 5}{5\cdot 3}=\frac{1}{3}$

Cuando hay muchas fracciones, se divide paso a paso.

Ejemplos:

a) $\frac{1}{2}:\frac{2}{3}:\frac{5}{2}:\frac{1}{3}=\underbrace{\left(\frac{1}{2}:\frac{2}{3}\right)}_{\frac{3}{4}}:\frac{5}{2}:\frac{1}{3}=\frac{3}{4}:\frac{5}{2}:\frac{1}{3}=\underbrace{\left(\frac{3}{4}:\frac{5}{2}\right)}_{\frac{6}{20}}:\frac{1}{3}=\frac{6}{20}:\frac{1}{3}=\frac{18}{20}=\frac{9}{10}$

b) $\frac{-1}{2}:\frac{3}{5}:\frac{-1}{3}=\left(\frac{-1}{2}:\frac{3}{5}\right):\frac{-1}{3}=\frac{-5}{6}:\frac{-1}{3}=\frac{-15}{-6}\underset{\uparrow}{=}\frac{15}{6}=\frac{5}{2}$

pues - : - = +

POTENCIAS

Para elevar (↑) a un número, hay tres casos:

CASO I : El exponente es un número entero positivo.

Recuerda

$\left(\frac{a}{b}\right)^{n}$ ← exponente

base

Hay una fórmula: $\left(\frac{a}{b}\right)^{n}=\frac{a^{n}}{b^{n}}$

Ejemplos:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3}=\frac{2^{3}}{3^{3}}=\frac{8}{27}$

b) $\left(\frac{-1}{5}\right)^{2}=\frac{(-1)^{2}}{5^{2}}=\frac{1}{25}$

CASO II: El exponente es 0. Tú debes aprender que cualquier número levado (↑) a 0 = 1.

Ejemplos:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{0}=1$ b) $\left(\frac{-3}{4}\right)^{0}=1$ c) $\left(\frac{-1}{7}\right)^{0}=1$

b) $\frac{-2}{3}\cdot\frac{-1}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{(-2)\cdot(-1)\cdot 3}{3\cdot 4\cdot 2}=\frac{2\cdot 3}{3\cdot 4\cdot 2}=\frac{1}{4}$

DIVISIÓN

Para dividir 2 fracciones usaremos la siguiente fórmula:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Ejemplos:

a) $\frac{2}{3}:\frac{7}{5}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 7}=\frac{10}{21}$

b) $\frac{1}{5}:\frac{3}{5}=\frac{1\cdot 5}{5\cdot 3}=\frac{1}{3}$

Si queremos dividir varias fracciones, dividiremos primero las 2 primeras. Después dividiremos el resultado por la 3ª y así sucesivamente.

Ejemplos:

a) $\frac{1}{2}:\frac{2}{3}:\frac{5}{2}:\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{2}:\frac{2}{3}\right):\frac{5}{2}:\frac{1}{3}=\frac{3}{4}:\frac{5}{2}:\frac{1}{3}=\left(\frac{3}{4}:\frac{5}{2}\right):\frac{1}{3}=\frac{6}{20}:\frac{1}{3}=\frac{18}{20}=\frac{9}{10}$

b) $\frac{-1}{2}:\frac{3}{5}:\frac{-1}{3}=\left(\frac{-1}{2}:\frac{3}{5}\right):\frac{-1}{3}=\frac{-5}{6}:\frac{-1}{3}=\frac{-15}{-6}=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}$

pues - : - = +

POTENCIAS

Para elevar una fracción a un número distinguiremos 3 casos.

CASO I : Cuando el exponente es un número entero positivo.

En este caso usaremos la fórmula: $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$

Ejemplos:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{2^3}{3^3}=\frac{8}{27}$

b) $\left(\frac{-1}{5}\right)^2=\frac{(-1)^2}{5^2}=\frac{1}{25}$

CASO II: Cuando el exponente es 0. En este caso debes saber que cualquier número elevado a 0 siempre es 1.

Ejemplos:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$

b) $\left(\frac{-3}{4}\right)^0=1$

c) $\left(\frac{-1}{7}\right)^0=1$

CASO III: El exponente es un número entero negativo.
Hay dos fórmulas:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{n} \qquad ó \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

<u>Ejemplos</u>:

a) $2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8}$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3} = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8}$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{1}\right)^{2} = \frac{2^2}{1^2} = \frac{4}{1} = 4$

Cuando el exponente es un número entero (positivo o negativo), las potencias tienen las mismas propiedades que con exponente natural (sólo positivo).

1.- $a^{n} \cdot a^{m} = a^{n+m}$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2+(-1)} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1} = \frac{2}{3}$$

2.- $a^{n} \cdot b^{n} = (a \cdot b)^{n}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3} = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\right]^{3} = \left[\frac{2}{6}\right]^{3} = \left[\frac{1}{3}\right]^{3} = \frac{1}{27}$$

3.- $a^{n} : a^{m} = a^{n-m}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3} : \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3-(-2)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{5} = \frac{1}{32}$$

4.- $a^{n} : b^{n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{n}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2} : \left(\frac{3}{2}\right)^{2} = \left[\frac{1}{2} : \frac{3}{2}\right]^{2} = \left[\frac{2}{6}\right]^{2} = \left[\frac{1}{3}\right]^{2} = \frac{1}{9}$$

5.- $\left(a^{n}\right)^{m} = a^{n \cdot m}$

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\right]^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2 \cdot (-3)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = \left(\frac{2}{1}\right)^{6} = \frac{64}{1} = 64$$

CASO III: Cuando el exponente es un número entero negativo.
En este caso usaremos las fórmulas:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{n} \qquad \text{ó} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

<u>Ejemplos</u>:

a) $$2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8}$$

b) $$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3} = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8}$$

c) $$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{1}\right)^{2} = \frac{2^2}{1^2} = \frac{4}{1} = 4$$

Las propiedades de las potencias cuando el exponente es un número entero son las mismas que las que estudiamos para exponente natural.

1.- $a^{n} \cdot a^{m} = a^{n+m}$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2+(-1)} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1} = \frac{2}{3}$$

2.- $a^{n} \cdot b^{n} = (a \cdot b)^{n}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3} = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\right]^{3} = \left[\frac{2}{6}\right]^{3} = \left[\frac{1}{3}\right]^{3} = \frac{1}{27}$$

3.- $a^{n} : a^{m} = a^{n-m}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3} : \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3-(-2)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{5} = \frac{1}{32}$$

4.- $a^{n} : b^{n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{n}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2} : \left(\frac{3}{2}\right)^{2} = \left[\frac{1}{2} : \frac{3}{2}\right]^{2} = \left[\frac{2}{6}\right]^{2} = \left[\frac{1}{3}\right]^{2} = \frac{1}{9}$$

5.- $\left(a^{n}\right)^{m} = a^{n \cdot m}$

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\right]^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2\cdot(-3)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = \left(\frac{2}{1}\right)^{6} = \frac{64}{1} = 64$$

JERARQUÍA DE OPERACIONES

Cuando hay mezcla de sumas, restas, multiplicación, división y potencias, recuerda que hay un orden para hacerlas. En el tema anterior ya lo hemos explicado:

1º potencias
2º multiplicaciones y divisiones
3º sumas y restas

Si hay ( ) o [ ], hacerlos primero
Si [( )] o (( )), hacer el dentro primero. $\overbrace{[\ (1^{\circ})\ ]}^{2^{\circ}}$

Ejemplo:

$$\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdot 4^2\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right):\frac{3}{2}$$

1º paréntesis. [ ] y ( )

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdot 4^2 \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$

Para hacer $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdot 4^2$, hacer 1º la potencia

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdot 4^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdot 16$$

después la multiplicación

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdot 16=\frac{1}{3}-\frac{16}{4}=\frac{1}{3}-4$$

y por último la resta

$$\frac{1}{3}-4=\frac{1}{3}-\frac{12}{3}=\frac{1-12}{3}=\frac{-11}{3}$$

Para $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ se hace todo junto, porque la suma y la resta mandan igual.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{6}{12}+\frac{4}{12}-\frac{3}{12}=\frac{6+4-3}{12}=\frac{7}{12}$$

Entonces:

$$\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdot 4^2\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right):\frac{3}{2}=\frac{-11}{3}-\left(\frac{7}{12}\right):\frac{3}{2}$$

Aquí, hay resta y división, primero la división:

$$\frac{-11}{3}-\left(\frac{7}{12}\right):\frac{3}{2}=\frac{-11}{3}-\frac{14}{36}=$$

falta restar:

$$\frac{-11}{3}-\frac{14}{36}=\frac{-132}{36}-\frac{14}{36}=\frac{-146}{36}=\frac{-73}{18}$$

JERARQUÍA DE OPERACIONES

Si tienes que realizar una operación en la que aparecen sumas, restas, productos, divisiones y potencias recuerda que el orden para hacerlas es el mismo que vimos en el tema anterior:

1º potencias
2º multiplicaciones y divisiones
3º sumas y restas

Este orden se puede modificar usando paréntesis y corchetes que tienen la máxima preferencia.

Si hay varios paréntesis o corchetes tendrán preferencia los más internos.

Ejemplo:

Vamos a calcular: $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdot 4^2\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right):\frac{3}{2}$

Primero haremos las operaciones que hay entre paréntesis.

$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdot 4^2$ y $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

Para hacer $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdot 4^2$ haremos primero la potencia

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdot 4^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdot 16$$

después el producto

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdot 16=\frac{1}{3}-\frac{16}{4}=\frac{1}{3}-4$$

y por último la resta

$$\frac{1}{3}-4=\frac{1}{3}-\frac{12}{3}=\frac{1-12}{3}=\frac{-11}{3}$$

Para hacer $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ lo haremos todo a la vez pues la suma y la resta tienen la misma preferencia.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{6}{12}+\frac{4}{12}-\frac{3}{12}=\frac{6+4-3}{12}=\frac{7}{12}$$

Si volvemos al principio tenemos:

$$\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdot 4^2\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right):\frac{3}{2}=\frac{-11}{3}-\left(\frac{7}{12}\right):\frac{3}{2}$$

Ahora haremos la división y finalmente la resta:

$$\frac{-11}{3}-\left(\frac{7}{12}\right):\frac{3}{2}=\frac{-11}{3}-\frac{14}{36}=\frac{-132}{36}-\frac{14}{36}=\frac{-146}{36}=\frac{-73}{18}$$

APLICACIONES : PORCENTAJES

10% se dice 10 por ciento

Muchas veces tú ves frases como por ejemplo:

- "Este jersey está rebajado un 10 %" (jersey, 10% de rebaja)
- "El precio del coche 1.500.000 más el 16 % de I.V.A." (precio del coche 1.500.000 + 16 % por impuestos)
- "Han suspendido matemáticas el 40 % de los alumnos" (del total de alumnos, el 40 % suspendieron matemáticas)

¿10 %, 16 %, 40 %, qué quiere decir?

El tanto por ciento (%) es una fracción con denominador (número abajo) 100 y numerador (arriba) el número que nos dan.

$10\% = \frac{10}{100}$; $16\% = \frac{16}{100}$ y $30\% = \frac{30}{100}$

Ejemplos:

a) El 15% de 1500 es igual que $\frac{15}{100}$ de 1500.

Recuerda: el $\frac{15}{100}$ de algo es hacer 100 partes y coger 15, entonces $\frac{15}{100}$ de 1500 es 1500 : 100 y multiplicar por 15.

$$15\% \text{ de } 1500 = \frac{15}{100} \text{ de } 1500 =$$
$$\frac{1500}{100} \cdot 15 = 15 \cdot 15 = 225$$

Ahora vamos a hacer los ejemplos del principio (arriba).

Rebaja = descuento = restar = -

b) un jersey cuesta 6.000 ptas., pero tiene una rebaja del 10 %. Quiere decir 6.000 – 10 % de 6.000.

$10\% \text{ de } 6.000 = \frac{6.000}{100} \cdot 10 = 60 \cdot 10 = 600$ ptas.

$\underset{\text{Precio jersey}}{6.000} - \underset{\text{rebaja}}{600} = 5.400$ ptas.

c) Un coche vale 1.500.000 más el 16% de IVA quiere decir que el precio total = 1.500.000 + el 16% de 1.500.000.

$16\% \text{ de } 1.500.000 = \frac{1.500.000}{100} \cdot 16 = 240.000$

Precio total = 1.500.000 + 240.000 = 1.740.000 ptas.

d) En una clase hay 30 alumnos; 40 % alumnos suspenden matemáticas. ¿cuántos?

$40\% \text{ de } 30 = \frac{40}{100} \cdot 30 = 12$ alumnos suspenden matemáticas.

APLICACIONES : PORCENTAJES

Es fácil que veas frases como:

- Este jersey está rebajado un 10%.
- El coche cuesta 1.500.000 más el 16% de IVA.
- Han suspendido matemáticas el 40% de los alumnos.

10% se lee diez por ciento

¿Qué quiere decir 10%, 16%, 40%?

El tanto por ciento (%) no es más que una fracción en la que el denominador siempre es 100 y el numerador es el número que nos dan.

Así $10\% = \frac{10}{100}$; $16\% = \frac{16}{100}$ y $30\% = \frac{30}{100}$

Ejemplos:

a) El 15% de 1500 es igual que $\frac{15}{100}$ de 1500.

Recuerda que $\frac{15}{100}$ de algo quería decir dividir en 100 partes y coger 15, por tanto $\frac{15}{100}$ de 1500 quiere decir que dividimos 1500 entre 100 y lo multiplicamos por 15.

Luego 15% de 1500 es igual $\frac{15}{100}$ de 1500, es decir:

$$\frac{1500}{100} \cdot 15 = 15 \cdot 15 = 225$$

Vamos ahora a resolver los ejemplos del principio.

b) Si un jersey que cuesta 6.000 ptas. está rebajado el 10% quiere decir que al precio 6.000 ptas. hay que restarle (rebajarle) el 10% de 6.000.

10% de 6.000 = $\frac{6.000}{100} \cdot 10 = 60 \cdot 10 = 600$ ptas.

Luego ahora el precio del jersey es de 6.000 – 600 = 5.400 ptas.

c) Si un coche cuesta 1.500.000 más el 16% de IVA quiere decir que el coche costará 1.500.000 más el 16% de 1.500.000.

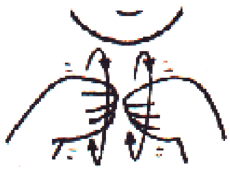
16% de 1.500.000 = $\frac{1.500.000}{100} \cdot 16 = 240.000$

Luego el coche cuesta 1.500.000 + 240.000 = 1.740.000 ptas.

d) Si en una clase de 30 alumnos suspenden matemáticas el 40%, quiere decir que los alumnos suspensos en matemáticas son:

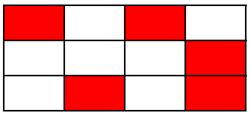
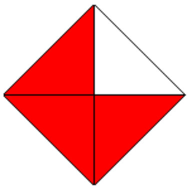
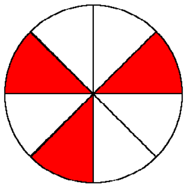
40% de 30 es $\frac{40}{100} \cdot 30$ = 12 alumnos.

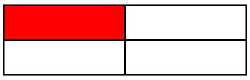
PROBLEMAS RESUELTOS

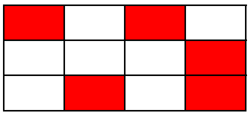
coloreada = pintada

1. Escribe al lado de cada dibujo la parte que está *coloreada*:

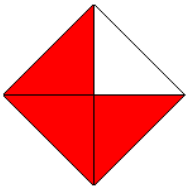






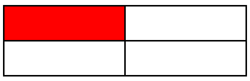
Solución



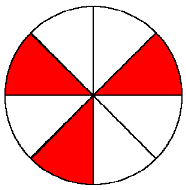
En total hay 12 partes, de color hay 5, entonces el color es: $\frac{5}{12}$



En total hay 4 partes, de color hay 3, entonces el color es: $\frac{3}{4}$

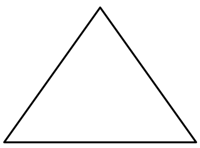
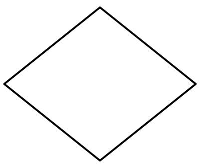
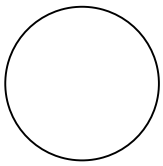


En total hay 4 partes, de color hay 1, entonces el color es: $\frac{1}{4}$

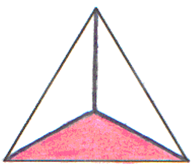
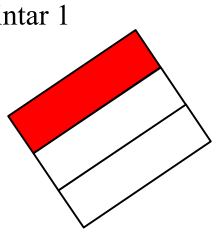
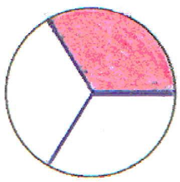


En total hay 8 partes, de color hay 3, entonces el color es: $\frac{3}{8}$

2. Colorea en cada figura 1/3 parte.

Solución Hacer 3 partes y pintar 1

3. ¿Cómo se leen las siguientes fracciones?.

$$\frac{7}{6}\ ;\quad \frac{9}{13};\ \frac{1}{7};\ \frac{21}{15}$$

Solución

$\frac{7}{6}$ → siete sextos o siete partido por seis

$\frac{9}{13}$ → nueve treceavos o nueve partido por trece

$\frac{1}{7}$ → un séptimo o uno partido por siete

$\frac{21}{15}$ → veintiún quinceavos o veintiuno partido por quince

Recuerda que:

dos fracciones a/b y c/d son equivalentes si $a \cdot d = c \cdot b$

4. Escribe tres *fracciones equivalentes* a cada una de las siguientes:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{20}{36}$

Solución

a) Para hallar fracciones equivalentes a $\frac{1}{3}$, se multiplica o divide numerador y denominador por el número que tú quieras (no 0). Recuerda: el mismo número para arriba (numerador) y para abajo (denominador).

$$\frac{1}{3} = \frac{1\cdot 2}{3\cdot 2} = \frac{2}{6}$$
$$\frac{1}{3} = \frac{1\cdot 3}{3\cdot 3} = \frac{3}{9}$$
$$\frac{1}{3} = \frac{1\cdot 6}{3\cdot 6} = \frac{6}{18}$$

b) $\frac{20}{36} = \frac{20\cdot 2}{36\cdot 2} = \frac{40}{72}$

$$\frac{20}{36} = \frac{20:2}{36:2} = \frac{10}{18}$$
$$\frac{20}{36} = \frac{20:4}{36:4} = \frac{5}{9}$$

Recuerda:

Para comprobar si dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes, mirar si **a·d** es igual a **b·c**

5. De las fracciones siguientes dí cuales son equivalentes a 1/5

$$\frac{3}{15}\ ;\ \frac{27}{10}\ ;\ \frac{4}{20}\ ;\ \frac{2}{15}\ ;\ \frac{15}{3}$$

Solución

¿ $\frac{1}{5}$ es equivalente a $\frac{3}{15}$? $\frac{1\cdot}{5\cdot}\ \frac{3}{15}$ → $1\cdot 15 = 5 \cdot 3$ ¿si o no? SI, entonces $\frac{1}{5} = \frac{3}{15}$

¿$\frac{1}{5}$ es equivalente a $\frac{27}{10}$? $\frac{1\cdot}{5\cdot}\ \frac{27}{10} \rightarrow 1\cdot 10 = 5\cdot 27$ ¿si o no?

NO: $10 \neq 135$, entonces $\frac{1}{5} \neq \frac{27}{10}$

¿$\frac{1}{5}$ es equivalente a $\frac{4}{20}$? $\frac{1\cdot}{5\cdot}\ \frac{4}{20} \rightarrow 1\cdot 20 = 5\cdot 4$ ¿si o no? SI,

entonces $\frac{1}{5} = \frac{4}{20}$

¿$\frac{1}{5}$ es equivalente a $\frac{2}{15}$? $\frac{1\cdot}{5\cdot}\ \frac{2}{15} \rightarrow 1\cdot 15 = 5\cdot 2$ ¿si o no?

NO: $15 \neq 10$ entonces $\frac{1}{5} \neq \frac{2}{15}$

¿$\frac{1}{5}$ es equivalente a $\frac{15}{3}$? $\frac{1\cdot}{5\cdot}\ \frac{15}{3} \rightarrow 1\cdot 3 = 5\cdot 15$ ¿si o no?

NO: $3 \neq 75$ entonces $\frac{1}{5} \neq \frac{15}{3}$

6. Calcula la fracción irreducible (simplificada) de:

a) $\frac{5}{25}$; *b*) $\frac{100}{200}$; *c*) $\frac{360}{60}$; *d*) $\frac{900}{135}$; *e*) $\frac{93}{27}$

Solución

Para encontrar la fracción irreducible (simplificada), dividimos el numerador y el denominador por el mismo número hasta que no puede dividirse más.

a) $\frac{5 \rightarrow :5}{25 \rightarrow :5} = \frac{1}{5}$

b) $\frac{100 \rightarrow :100}{200 \rightarrow :100} = \frac{1}{2}$

c) $\frac{360 \rightarrow :10}{60 \rightarrow :10} = \frac{36 \rightarrow :2}{6 \rightarrow :2} = \frac{18 \rightarrow :3}{3 \rightarrow :3} = \frac{6}{1} = 6$

d) $\frac{900 \rightarrow :3}{135 \rightarrow :3} = \frac{300 \rightarrow :3}{45 \rightarrow :3} = \frac{100 \rightarrow :5}{15 \rightarrow :5} = \frac{20}{3}$

e) $\frac{93 \rightarrow :3}{27 \rightarrow :3} = \frac{31}{9}$

7. Expresa en forma decimal las siguientes fracciones:

a) $\frac{3}{7}$; $b)\ \frac{2}{5}$; $c)\ \frac{7}{8}$; $d)\ \frac{11}{3}$

Solución

a)

30	7
20	0,4285714....
60	↑
40	empiezan a repetirse números
50	
10	
30	
....	

$$\frac{3}{7} = 0,\overset{\frown}{428571}$$

b)

20	5
0	0,4

$$\frac{2}{5} = 0{,}4$$

c) $\frac{7}{8} = 0,875$

70	8
60	0,875
40	
0	

d) $\frac{11}{3} = 3,\widehat{6}$

11	3
20	3,66...
20	↑
.....	empiezan a repetirse números

8. Escribe en forma de fracción:

a) 0,021 b) $2,\widehat{3}$ c) $13,\overset{\frown}{23}$

Solución

a) $0{,}021 = \frac{21}{1000}$

b) $2,\widehat{3} = \frac{23-2}{9} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$

c) $13,\overset{\frown}{23} = \frac{1323-13}{99} = \frac{1310}{99}$

9. Escribe como se leen los siguientes números decimales.
a) 0,78 b) 56,89 c) 3,456 d) 56,890

Solución

a) 0,78 → setenta y ocho centésimas o cero coma setenta y ocho

unidades	décimas	centésimas
0,	7	8

b) 56,89 → cincuenta seis unidades, ochenta y nueve centésimas o cincuenta seis coma ochenta y nueve

unidades	décimas	centésimas
56,	8	9

c) 3,456 → tres unidades, cuatrocientas cincuenta y seis milésimas o tres coma cuatrocientas cincuenta y seis

unidades	décimas	centésimas	milésimas
3,	4	5	6

d) 56,890 → cincuenta y seis unidades, ochocientas noventa milésimas o cincuenta y seis coma ochocientas noventa

unidades	décimas	centésimas	milésimas
56,	8	9	0

10. Escribe con cifras los números siguientes.
a) 5 unidades y 153 milésimas.
b) 8 unidades y 6 diezmilésimas.
c) 7 coma mil cuarenta periódico puro.
d) Veinte coma cuatrocientos trece periódico mixto en el trece.

Solución

	Unidades	,	décimas	centésimas	milésimas	diezmilésimas
a)	5	,	1	5	3	
b)	8	,	0	0	0	6

a) 5,153

b) 8,0006

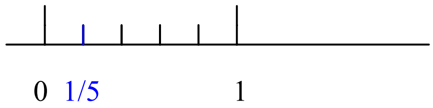
c) periódico puro quiere decir que detrás de la coma todo es periodo ($\frown$)
→$7,\overset{\frown}{1040}$

d) periódico mixto quiere decir que el periodo es sólo en el número que dice (aquí sólo en 13) → $20,4\overset{\frown}{13}$

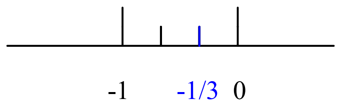
11. Representa en la recta los siguientes números fraccionarios.
$\frac{1}{5}$; $-\frac{1}{3}$; $\frac{3}{2}$; $-\frac{15}{7}$

Solución

$\frac{1}{5}$, número de arriba más pequeño, número de abajo más grande, entonces de 0 hasta 1 hacemos 5 partes y cogemos 1:



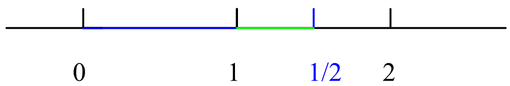
$-\frac{1}{3}$, número de arriba más pequeño, número de abajo más grande, y la fracción es negativa, entonces de 0 hasta -1 hacemos 3 partes y cogemos 1:



$\frac{3}{2}$, número de arriba más grande, número de abajo más pequeño, entonces dividimos 3 entre 2:

$$\begin{array}{l|l} 3 & 2 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$$

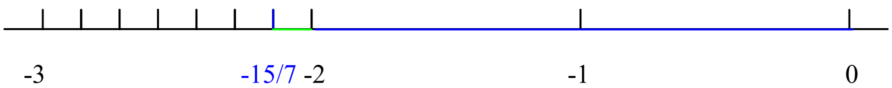
Ahora cogemos 1 unidad completa y desde 1 hasta 2 hacemos 2 partes y cogemos 1:



$-\frac{15}{7}$ número de arriba más grande, número de abajo más pequeño, entonces dividimos 15 entre 7:

$$\begin{array}{l|l} 15 & 7 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$$

Como el número es negativo, cogemos -2 unidades completas y desde -2 hasta -3 hacemos 7 partes y cogemos 1.



12. Reduce a común denominador las siguientes fracciones.

a) $\frac{3}{5}$ y $\frac{2}{6}$; b) $\frac{2}{4}, \frac{5}{12}$ y $\frac{7}{6}$; c) $\frac{8}{15}, \frac{3}{5}, \frac{6}{10}$ y $\frac{11}{7}$

Solución

a) $\frac{3}{5}$ y $\frac{2}{6}$

$$\left.\begin{array}{l} 5 = 5 \\ 6 = 2 \cdot 3 \end{array}\right\} \quad \text{Entonces m. c. m. } (5, 6) = 5 \cdot 2 \cdot 3 = 30$$

30: $\longrightarrow \frac{3}{5\times}$ $(30 : 5) \cdot 3 = 6 \cdot 3 = 18$

30: $\longrightarrow \frac{2}{6\times}$ $(30 : 6) \cdot 2 = 5 \cdot 2 = 10$

$$\frac{3}{5} \text{ y } \frac{2}{6} \rightarrow \frac{18}{30} \text{ y } \frac{10}{30}$$

b) $\frac{2}{4}, \frac{5}{12}$ y $\frac{7}{6}$

$$\left.\begin{array}{l} 4 = 2^2 \\ 12 = 2^2 \cdot 3 \\ 6 = 2 \cdot 3 \end{array}\right\} \quad \text{m. c. m. } (4, 12, 6) = 2^2 \cdot 3 = 12$$

$$\left.\begin{array}{l} (12 : 4) \cdot 2 = 3 \cdot 2 = 6 \\ (12 : 12) \cdot 5 = 1 \cdot 5 = 5 \\ (12 : 6) \cdot 7 = 2 \cdot 7 = 14 \end{array}\right\} \quad \frac{2}{4}, \frac{5}{12} \text{ y } \frac{7}{6} \rightarrow \frac{6}{12}, \frac{5}{12} \text{ y } \frac{14}{12}$$

c) $\frac{8}{15}, \frac{3}{5}, \frac{6}{10}$ y $\frac{11}{7}$

$$\left.\begin{array}{l} 15 = 3 \cdot 5 \\ 5 = 5 \\ 10 = 2 \cdot 5 \\ 7 = 7 \end{array}\right\} \quad \text{m. c. m. } (15, 5, 10, 7) = 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7 = 210$$

$$\left.\begin{array}{l} (210 : 15) \cdot 8 = 112 \\ (210 : 5) \cdot 3 = 126 \\ (210 : 10) \cdot 6 = 126 \\ (210 : 7) \cdot 11 = 330 \end{array}\right\} \quad \frac{8}{15}, \frac{3}{5}, \frac{6}{10} \text{ y } \frac{11}{7} \rightarrow \frac{112}{210}, \frac{126}{210}, \frac{126}{210} \text{ y } \frac{330}{126}$$

13. Ordena de *mayor a menor* las siguientes fracciones, reduciéndolas *previamente* a común denominador.

$$\frac{3}{7}; \quad \frac{6}{21}; \quad \frac{12}{28}; \quad \frac{3}{8}$$

mayor a menor = más grande hasta más pequeño

Previamente = antes

Solución

Todo son fracciones, entonces para ordenar, primero reducimos a común denominador:

$$\left.\begin{array}{l} 7 = 7 \\ 21 = 3 \cdot 7 \\ 28 = 2^2 \cdot 7 \\ 8 = 2^3 \end{array}\right\} \quad \text{m. c. m. } (7, 21, 28, 8) = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 168$$

$(168 : 7) \cdot 3 = \mathbf{72} \;\rightarrow\; \frac{3}{7} = \frac{\mathbf{72}}{168}$

$(168 : 21) \cdot 6 = \mathbf{48} \rightarrow\; \frac{6}{21} = \frac{\mathbf{48}}{168}$

$(168 : 28) \cdot 12 = \mathbf{72} \;\rightarrow\; \frac{12}{28} = \frac{\mathbf{72}}{168}$

$(168 : 8) \cdot 3 = \mathbf{63} \rightarrow\; \frac{3}{8} = \frac{\mathbf{63}}{168}$

48 es menor que **63** menor que **72** igual a **72** quiere decir que:

$$\frac{6}{21}\left(=\frac{\mathbf{48}}{168}\right) < \frac{3}{8}\left(=\frac{\mathbf{63}}{168}\right) < \frac{3}{7}\left(=\frac{\mathbf{72}}{168}\right) = \frac{12}{28}\left(=\frac{\mathbf{72}}{168}\right)$$

14. Ordena de menor a mayor los siguientes números decimales.
0,71 ; 0,772; 0,7661; 0,76 ; 0,7

Solución

Los números en forma decimal, para ordenarlos, primero llenamos con ceros (0). El número con más decimales es 0,7661, tiene 4 decimales, entonces ponemos 0 para tener todos los números igual (4 decimales).

$0{,}71 \rightarrow 0{,}7100$
$0{,}772 \rightarrow 0{,}7720$
$0{,}7661 \rightarrow 0{,}7661$
$0{,}76 \rightarrow 0{,}7600$
$0{,}7 \rightarrow 0{,}7000$

Entonces: $0{,}7000 < 0{,}7100 < 0{,}7600 < 0{,}7661 < 0{,}7720$
es decir: $0{,}7 < 0{,}71 < 0{,}76 < 0{,}7661 < 0{,}772$

15. Realiza las siguientes sumas y restas de fracciones simplificando el resultado.

a) $\frac{12}{15} - \frac{3}{4} + \frac{1}{5}$ b) $\frac{13}{12} - \frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{2} + 1 + \frac{2}{3}$ d) $\frac{4}{11} - \frac{1}{22} + \frac{3}{7}$

Solución

a) $\frac{12}{15} - \frac{3}{4} + \frac{1}{5}$

el número de abajo es distinto, primero hacemos el mínimo común múltiplo:

$$\left.\begin{array}{l} 15 = 3 \cdot 5 \\ 4 = 2^2 \\ 5 = 5 \end{array}\right\} \qquad \text{m. c. m. } (15, 4, 5) = 60$$

$$\frac{12}{15} - \frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{48}{60} - \frac{45}{60} + \frac{12}{60} = \frac{48 - 45 + 12}{60} = \frac{15}{60} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

Siempre al final, simplificar.

b) $\frac{13}{12}-\frac{2}{3}$

tienen distinto denominador, primero hacemos el m. c. m.:

$$\left.\begin{array}{l}12 = 2^2 \cdot 3\\ 3 = 3\end{array}\right\}\ \text{m. c. m. } (12, 3) = 12$$

$$\frac{13}{12}-\frac{2}{3} = \frac{13}{12}-\frac{8}{12}=\frac{13-8}{12}=\frac{5}{12}$$

c) $\frac{1}{2}+1+\frac{2}{3} = \frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{2}{3}$

tienen distinto denominador, primero hacemos el m. c. m.:

$$\left.\begin{array}{l}2 = 2\\ 1 = 1\\ 3 = 3\end{array}\right\}\ \text{m. c. m. } (2, 1, 3) = 6$$

$$\frac{1}{2}+1+\frac{2}{3} = \frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{2}{3} = \frac{3}{6}+\frac{6}{6}+\frac{4}{6}=\frac{3+6+4}{6}=\frac{13}{6}$$

d) $\frac{4}{11}-\frac{1}{22}+\frac{3}{7}$

tienen distinto denominador, primero hacemos el m. c. m.:

$$\left.\begin{array}{l}11 = 11\\ 22 = 11 \cdot 2\\ 7 = 7\end{array}\right\}\ \text{m. c. m. } (11, 22, 7) = 154$$

$$\frac{4}{11}-\frac{1}{22}+\frac{3}{7} = \frac{56}{154}-\frac{7}{154}+\frac{66}{154} = \frac{56-7+66}{154}=\frac{115}{154}$$

16. Realiza los siguientes productos de fracciones simplificando cuando sea posible.

a) $\frac{7}{5}\cdot\frac{5}{2}$ b) $\frac{7}{3}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{6}{3}$ c) $\frac{4}{6}\cdot 3$ d) $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5}\cdot 28$

Solución

a) $\frac{7}{5}\cdot\frac{5}{2} = \frac{7\cdot 5}{5\cdot 2}=\frac{35}{10}=\frac{7}{2}$

b) $\frac{7}{3}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{6}{3} = \frac{7\cdot 3\cdot 6}{3\cdot 9\cdot 3}=\frac{126}{81}=\frac{42}{27}=\frac{14}{9}$

c) $\frac{4}{6}\cdot 3 = \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{1}=\frac{4\cdot 3}{6\cdot 1}=\frac{12}{6}=2$

d) $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5}\cdot 28 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{28}{1}=\frac{1\cdot 1\cdot 1\cdot 28}{4\cdot 7\cdot 5\cdot 1}=\frac{28}{140}=\frac{14}{70}=\frac{7}{35}=\frac{1}{5}$

Recuerda:
si abajo no hay número, poner el 1

Ejemplo:
$4 = \frac{4}{1}$

$27 = \frac{27}{1}$

17. Realiza las siguientes divisiones de fracciones simplificando cuando sea posible.

a) $\frac{3}{5}:\frac{1}{5}$ $\quad$ $b)\ \frac{3}{2}:\frac{3}{4}$ $\quad$ $c)\ \frac{7}{5}:\frac{14}{5}$ $\quad$ $d)\ \frac{4}{9}:5$ $\quad$ $e)\ 7:\frac{31}{3}$

Solución

a) $\frac{3}{5}:\frac{1}{5} = \frac{3\cdot 5}{5\cdot 1}=\frac{15}{5}=3$

b) $\frac{3}{2}:\frac{3}{4} = \frac{3\cdot 4}{2\cdot 3}=\frac{12}{6}=2$

c) $\frac{7}{5}:\frac{14}{5} = \frac{7\cdot 5}{5\cdot 14}=\frac{35}{70}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$

d) $\frac{4}{9}:5 = \frac{4}{9}:\frac{5}{1} = \frac{4\cdot 1}{9\cdot 5}=\frac{4}{45}$

e) $7:\frac{31}{3} = \frac{7}{1}:\frac{31}{3} = \frac{7\cdot 3}{1\cdot 31}=\frac{21}{31}$

18. Realiza las siguientes operaciones con fracciones.

a) $\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{3}$ $\quad$ $b)\ \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$ $\quad$ $c)\ \frac{3}{4}-\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{7}{2}+\frac{5}{6}\right)$

Solución

a) $\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{3} \underset{\uparrow \atop 1^{o}(\ )}{=} \frac{1}{2}+\left(\frac{3\cdot 1}{4\cdot 5}\right)-\frac{1}{3} = \frac{1}{2}+\frac{3}{20}-\frac{1}{3} \underset{\uparrow \atop 2^{o}\text{m.c.m.}}{=}$

$\frac{30}{60}+\frac{9}{60}-\frac{20}{60}= \ = \frac{30+9-20}{60}=\frac{19}{60}$

b) $\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} \underset{\uparrow \atop 1^{o}\text{ productos}}{=} \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{6}+\frac{1}{6}=\frac{16}{6}=\frac{8}{3}$

c) $\frac{3}{4}-\frac{2}{5}\cdot\underbrace{\left(\frac{7}{2}+\frac{5}{6}\right)}_{\text{m. c. m.}} = \frac{3}{4}-\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{21}{6}+\frac{5}{6}\right) = \frac{3}{4}-\frac{2}{5}\cdot\underbrace{\left(\frac{26}{6}\right)}_{\text{simplificar}} = \underbrace{\frac{3}{4}-\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{13}{3}\right)}_{\text{multiplicar}}$

$= \underbrace{\frac{3}{4}-\frac{26}{15}}_{\text{m. c. m.}} = \frac{45}{60}-\frac{104}{60}=\frac{45-104}{60}=\frac{-59}{60}$

19. Realiza las siguientes operaciones con números decimales.

a) 0,00312 + 0,134 - 1,67 b) 2,31 · 5,42

c) 1,03 · 0,08 d) 420,75 : 5,1

Solución

a) 0,00312 + 0,134 - 1,67 = 0,13712 –1,67 = -1,53288

$$\begin{array}{rr} & 0,\ 00312 \\ + & 0,\ 13400 \\ \hline & 0,\ 13712 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 1,\ 67000 \\ - & 0,\ 13712 \\ \hline & 1,\ 53288 \end{array}$$

b) 2,31 · 5,42 = 12,5202

1º multiplicamos 231 · 542 (= 125202) y en el resultado cogemos 4 decimales

$$(2,\underline{31} + 5,\underline{42})$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$2 + 2$$

c) 1,03 · 0,08 = 0,0824

Multiplicamos 103 · 8 (= 824) y en el resultado cogemos 4 cifras decimales

$$(1,\underline{03} + 0,\underline{08}).$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$2 + 2$$

Como 824 sólo tiene 3 cifras, añadimos ceros a la izquierda 0824 y ponemos la coma y un cero delante 0,0824

d) 420,75 : 5,1

Para hacer la división con decimales, llenamos los dos números con 0 a la izquierda hasta tener los mismos decimales. Después quitamos las comas y hacemos la división normal.

$$\begin{array}{r|l} 42075 & 510 \\ \cline{2-2} 1275 & 82,5 \\ 2550 & \\ 0 & \end{array}$$

20. Realiza las siguientes operaciones con potencias de 10.

a) 51,5 : 100 b) $31,02 \cdot 10^{-1}$ c) $12,1 : 10^{-2}$

Solución

Recuerda que:
Para multiplicar por un 1 y al lado 0 movemos la coma a la derecha (→) , ¿cuántos lugares?, depende 0 hay.
Para dividir por un 1 al lado 0 mover la coma a la izquierda (←) , lugares ¿cuántos?, depende 0 hay.

a) $51,5 : 1\underline{00} = 0,\overset{\leftarrow}{\underset{2}{5}}15$

$$\downarrow$$

$$2$$

Recuerda que:

$$10^{-1} = \frac{1}{10}$$

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2}$$

cambiar signo

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^{2}$$

dar la vuelta

b) $31{,}02 \cdot 10^{-1} = 31{,}02 \cdot \frac{1}{10^1} = 31{,}02 \cdot \frac{1}{10} = \frac{31{,}02}{10} = 31{,}02 : \underset{1}{10} =$

$3{,}\underset{1}{1}02$

c) $12{,}1 : 10^{-2} = 12{,}1 : \frac{1}{10^2} = \frac{12{,}1}{1} : \frac{1}{10^2} = \frac{12{,}1 \cdot 10^2}{1 \cdot 1} =$

$12{,}1 \cdot 10^2 = 12{,}1 \cdot \underset{2}{100} = 12\underset{2}{10}$ (Si faltan números poner 0)

21. Efectúa las siguientes potencias.

a) $\left(\frac{-2}{3}\right)^2$ b) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$ c) $\left(\frac{1}{10}\right)^5$

Solución

a) $\left(\frac{-2}{3}\right)^2 = \frac{(-2)^2}{3^2} = \frac{(-2)\cdot(-2)}{3\cdot 3} = \frac{4}{9}$

b) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5^2}{3^2} = \frac{5\cdot 5}{3\cdot 3} = \frac{25}{9}$

c) $\left(\frac{1}{10}\right)^5 = \frac{1}{10^5} = \frac{1}{100.000}$

22. Efectúa las siguientes operaciones con potencias utilizando las propiedades de las mismas.

a) $\left(\frac{-5}{4}\right)^5 : \left(\frac{-5}{4}\right)^2$ b) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right]^5$

c) $\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{2}\right)^3$ d) $\left(\frac{5}{6}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{-1}$

Solución

a) $\left(\frac{-5}{4}\right)^5 : \left(\frac{-5}{4}\right)^2$

Es una división, tienen la misma base pero distinto exponente ⇒ se copia la base y se restan los exponentes

$$\left(\frac{-5}{4}\right)^5 : \left(\frac{-5}{4}\right)^2 = \left(\frac{-5}{4}\right)^{5-2} = \left(\frac{-5}{4}\right)^3 = \frac{(-5)\cdot(-5)\cdot(-5)}{4\cdot 4\cdot 4} = \frac{-125}{64}$$

b) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right]^{5}$

Dos exponentes $\Rightarrow$ multiplicar exponentes

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right]^{5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = \left(\frac{2}{1}\right)^{5} = 2^5 = 32$$

c) $$\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{2}\right)^{3} = \left(\frac{12}{10}\right)^{3} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{simplificar}}}{=} \left(\frac{6}{5}\right)^{3} = \frac{6^3}{5^3} = \frac{216}{125}$$

d) $\left(\frac{5}{6}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{-1}$

Es una multiplicación con la misma base, pero distinto exponente $\Rightarrow$ se copia la base y se suman los exponentes

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{-1} = \left(\frac{5}{6}\right)^{-2+(-1)} = \left(\frac{5}{6}\right)^{-3} = \left(\frac{6}{5}\right)^{3} = \frac{6^3}{5^3} = \frac{216}{125}$$

23. Realiza las siguientes operaciones.

a) 4/5 de 1.000; b)3/4 de 1.400;

c) 1/3 de 33.000; d)7/2 de 13.000

Solución

a) 4/5 de 1.000 $\rightarrow$ 4/5 · 1000 = $\frac{4}{5}\cdot 1000 = \frac{4000}{5} = 800$

b) 3/4 de 1.400 $\rightarrow$ 3/4 · 1.400 = $\frac{3}{4}\cdot 1400 = \frac{4200}{4} = 1050$

c) 1/3 de 33.000 $\rightarrow$ 1/3 · 33.000 = $\frac{1}{3}\cdot 33000 = \frac{33000}{3} = 11.000$

d) 7/2 de 13.000 $\rightarrow$ 7/2 · 13.000 = $\frac{7}{2}\cdot 13000 = \frac{91000}{2} = 45.500$

24. Un número mixto es un número racional mayor que uno, que se puede expresar como un entero más un número racional menor que uno.

Ejemplo: $\frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4}$ Expresa de la misma forma:

a) $\frac{5}{2}$, b) $\frac{18}{5}$ c) $\frac{37}{5}$

Solución

Ejemplo: Para expresar un número racional ($\frac{7}{4}$) mayor que 1 como mixto hacemos la división 7 entre 4 y entonces $\frac{7}{4} = \text{cociente} + \frac{\text{resto}}{\text{divisor}}$

$$\begin{array}{r|l} 7 & 4 \quad \leftarrow \text{divisor} \\ \hline \text{resto} \rightarrow 3 & 1 \end{array}$$

$a)\ \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{r|l} 5 & 2 \quad \leftarrow \text{divisor} \\ \hline \text{resto} \rightarrow 1 & 2 \end{array}$$

b) $\frac{18}{5} = 3 + \frac{3}{5}$

$$\begin{array}{r|l} 18 & 5 \quad \leftarrow \text{divisor} \\ \hline \text{resto} \rightarrow 3 & 3 \end{array}$$

c) $\frac{37}{5} = 7 + \frac{2}{5}$

$$\begin{array}{r|l} 37 & 5 \quad \leftarrow \text{divisor} \\ \hline \text{resto} \rightarrow 2 & 7 \end{array}$$

25. Halla:

a) El doble de 9.000
b) La mitad de 9.000
c) La cuarta parte de 9.000
d) Las dos quintas partes de 9.000
e) El triple de 9.000
f) La tercera parte de 9.000

Solución

En el tema anterior y en este ya has aprendido:

DOBLE = MULTIPLICAR POR 2 = $2\times$

MITAD = DIVIDIR POR 2 = $\frac{1}{2}\times$

CUARTA PARTE = DIVIDIR POR 4 = $\frac{1}{4}\times$

DOS QUINTAS PARTES = MULTIPLICAR POR 2, DIVIDIR POR 5 = $\frac{2}{5}\times$

TRIPLE = MULTIPLICAR POR 3 = $3\times$

TERCERA PARTE = DIVIDIR POR 3 = $\frac{1}{3}\times$

Entonces la solución es:

a) $2 \times 9.000 = 18.000$

b) $\frac{1}{2} \times 9.000 = 4.500$

c) $\frac{1}{4} \times 9.000 = 2.250$

d) $\frac{2}{5} \times 9.000 = 3600$

e) $3 \times 9.000 = 27.000$

f) $\frac{1}{3} \times 9.000 = 3.000$

26. Halla:

a) El doble de $\frac{7}{3}$

b) La mitad de $\frac{7}{3}$

c) La cuarta parte de $\frac{7}{3}$

d) Las dos quintas partes de $\frac{7}{3}$

e) El triple de $\frac{7}{3}$

f) La tercera parte de $\frac{7}{3}$

Solución

Igual que en el ejercicio *anterior*, pero ahora el número es distinto, es una fracción:

anterior = antes

a) $2 \times \frac{7}{3} = \frac{14}{3}$

b) $\frac{1}{2} \times \frac{7}{3} = \frac{7}{6}$ o $\frac{7}{3} : 2 = \frac{7}{3} : \frac{2}{1} = \frac{7}{6}$

b) $\frac{1}{4} \times \frac{7}{3} = \frac{7}{12}$ o $\frac{7}{3} : 4 = \frac{7}{3} : \frac{4}{1} = \frac{7}{12}$

d) $\frac{2}{5} \times \frac{7}{3} = \frac{14}{15}$

e) $3 \times \frac{7}{3} = \frac{21}{3} = 7$

g) $\frac{1}{3} \times \frac{7}{3} = \frac{7}{9}$ o $\frac{7}{3} : 3 = \frac{7}{3} : \frac{3}{1} = \frac{7}{9}$

27. Expresa en gramos:

a) Tres cuartos de kilo.
b) Medio kilo.
c) Un kilo y medio.
d) Un cuarto y mitad.

Solución

Tú sabes que: 1 KILO = 1000 GRAMOS

a) **Tres cuartos** de kilo = $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} \times 1.000$ gramos

$$\frac{3}{4}\cdot 1000 = \frac{3000}{4} = 750 \text{ gramos}$$

b) **medio** kilo = **La mitad** de un kilo = $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \times 1.000$ gramos

$$\frac{1}{2}\cdot 1000 = \frac{1000}{2} = 500 \text{ gramos}$$

c) Un kilo y medio = Un kilo y medio kilo = 1000 gramos + 500 gramos = 1.500 gramos

d)Un cuarto y mitad quiere decir:
un cuarto de kilo y *mitad* de **un cuarto** de kilo =

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\times 1000 + \frac{1}{2}\times\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\times 1000 = \frac{1000}{4} + \frac{1000}{8} = 250 + 125 = 375 \text{ gramos}$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\times 1000 =$$

$$\frac{1}{8}\times 1000 = \frac{1000}{8}$$

28. Si un kilo cuesta 4 €. ¿Cuánto cuestan:

a) Tres cuartos de kilo.
b) Medio kilo.
c) Un kilo y medio.
d) Un cuarto y mitad.

Recuerda que
€ = euros

Solución

1 kilo ¿cuántos gramos tiene? → 1000 gramos, entonces podemos calcular:
tres cuartos de kilo ¿cuántos gramos?
medio kilo ¿cuántos gramos? ....

Ahora, 1 kilo € → 4 € podemos calcular:
tres cuartos de kilo → ¿euros?
medio kilo → ¿euros?.....

¿Cómo? Igual, pero cambiamos 1000 gramos por 4 euros

a) **Tres cuartos** de kilo → ¿euros?

$$\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\times 4 \in$$

$\frac{3}{4} \cdot 4 = \frac{12}{4} = 3$ euros.

b) **medio** kilo → ¿euros? = **La mitad** de un kilo → ¿euros?

$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \times 4$ euros

$\frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{4}{2} = 2$ euros

Un kilo y medio → ¿euros? = 4 euros + 2 euros = 6 euros

d)Un cuarto y mitad → ¿euros? quiere decir:

un cuarto de kilo y *mitad* de **un cuarto** de kilo → ¿euros? =

$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \times 4 + \frac{1}{2} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \times 4 = \frac{4}{4} + \frac{4}{8} = 1 + 0'5 = 1'5$ euros o 1 euro y 50 céntimos

$\frac{1}{2} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \times 4 =$

$\frac{1}{8} \times 4 = \frac{4}{8}$

29. Expresa en fracción de kilo:

a) 250 gramos
b) 300 gramos
c) 500 gramos
d) 800 gramos

Solución

Ahora el problema es al revés. Sabemos los gramos y queremos saber la fracción (medio, tres cuartos,...)

Tú sabes que en una fracción:

NUMERADOR = ¿Cuántas partes cogemos?
DENOMINADOR = ¿Cuántas partes hacemos de una cosa?

$$\frac{\text{NUMERADOR}}{\text{DENOMINADOR}}$$

1 kilo = 1000 gramos, es decir, 1 kilo = 1000 partes iguales llamadas gramos.

a) 250 gramos como fracción de 1 kilo quiere decir que 1 kilo tiene 1000 gr. y nosotros cogemos 250 gr.:

$\frac{250}{1000} = \frac{25}{100} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ (Un cuarto de kilo)

b) 300 gramos → $\frac{300}{1000} = \frac{3}{10}$ (tres décimos de kilo)

c) 500 gramos → $\frac{500}{1000} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ (medio kilo)

d) 800 gramos → $\frac{800}{1000} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ (cuatro quintos de kilo) *porcentaje* = %

30. Expresa como *porcentaje* de kilo:

e) 250 gramos
f) 300 gramos
g) 500 gramos
h) 800 gramos

Solución

Recuerda % = ¿cuántas unidades coges de 100 partes?

a) 250 gramos de un kilo quiere decir coger 250 gramos de 1000 gramos que tiene un kilo $\rightarrow \frac{250}{1000}$

Para hacer % necesito un 100 abajo (denominador).

Para pasar de 1000 a 100 dividimos por 10 pero, entonces arriba, también dividimos por 10

$$\frac{250}{1000} = \frac{250:10}{1000:10} = \frac{25}{100}$$

250 gramos de un kilo = 25% de un kilo

b) 300 gramos de un kilo $\rightarrow \frac{300}{1000}$

Para hacer % yo necesito abajo (denominador) un 100.

Para pasar de 1000 a 100 dividimos por 10 pero, entonces arriba, también dividimos por 10

$$\frac{300}{1000} = \frac{30}{100}$$

300 gramos de un kilo = 30% de un kilo

31. Expresa en centímetros:
¾ de metro.
½ de metro.
3/5 de 2 metros.
4/10 de 7 metros.

Solución

Recuerda 1 metro = 100 cm.

a) $\mathbf{\frac{3}{4}}$ de metro $= \mathbf{\frac{3}{4}} \times 100 = \frac{300}{4} = 75$ cm.

b) $\mathbf{\frac{1}{2}}$ de metro $= \mathbf{\frac{1}{2}} \times 100 = \frac{100}{2} = 50$ cm.

c) $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$ de 2 metros = $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}} \times 200 = \frac{600}{5} = 120$ cm.

d) $\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{10}}$ de 7 metros = $\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{10}} \times 700 = \frac{2800}{10} = 280$ cm.

32. Expresa como fracción de metro:
a) 30 cm.
b) 45 cm.

Solución

1 metro = 100 cm. Esto quiere decir que 1 metro se puede dividir en 100 partes y cada parte es un cm.

a) 30 cm. en un metro es coger 30 partes de 100: $\frac{30}{100} = \frac{3}{10}$

b) 45 cm. en un metro es coger 45 partes de 100: $\frac{45}{100} = \frac{9}{20}$

porcentaje = %

33. Expresa las cantidades del ejercicio anterior como *porcentaje* de metro.

Solución

Recuerda % = ¿cuántas unidades coges de 100 partes?

a) 1 metro tiene un total de 100 partes (cm.), 30 cm. quiere decir coger 30 partes. Abajo necesito 100 ¡ya está! Entonces directamente, 30 cm. = 30% de un metro.

b) 45 cm = 45 % de un metro.

34. ¿ Cuántas pesetas son:
a) 2/3 de 600 ptas.
b) 4/5 de 300 ptas.?

Solución

e) $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$ de 600 ptas. = $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \times 600 = \frac{1200}{3} = 400$ pesetas.

f) $\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}$ de 300 ptas. = $\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}} \times 300 = \frac{1200}{5} = 240$ pesetas.

35. ¿Cuántos minutos son:
a) Un cuarto de hora
b) Media hora?

Solución

Recuerda:
1 hora = 60 minutos

a) **Un cuarto** de hora = **Un cuarto** de 60 minutos $= \mathbf{\frac{1}{4}} \times 60 = \frac{60}{4} = 15$ minutos

b) **Media** hora **= Mitad** de hora $= \mathbf{\frac{1}{2}} \times 60 = \frac{60}{2} = 30$ minutos

36. Supongamos que cada euro cuesta 166 ptas. Calcula el precio en pesetas de:

a) 1 centavo de euro.
b) 3 centavos de euro.

Solución

Tú debes saber que:
1 centavo $= \frac{1}{100} = 0{,}01$
euro = 166 pesetas

a) **Un centavo** de euro $= \mathbf{\frac{1}{100}} \times 166 = \frac{166}{100} = 1{,}66$ pesetas

b) **Tres centavo** de euro $= \mathbf{\frac{3}{100}} \times 166 = \frac{498}{100} = 4{,}98$ pesetas

37. ¿Qué pesa más ¾ de kilo o medio kilo?

Solución

$\frac{3}{4}$ o $\frac{1}{2}$, ¿cuál es más grande?

Hacemos m. c. m. (4 y 2) = 4

$$\left.\begin{array}{l} \frac{3}{4} \rightarrow \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \rightarrow \frac{2}{4} \end{array}\right\} \rightarrow \text{mayor } \frac{3}{4}$$

Tres cuartos de kilo pesan más.

38. ¿Cuánto es el doble de la tercera parte de 12?

Solución

doble de **la tercera parte** de 12, ¿Cuánto es?

$$2 \times \mathbf{\frac{1}{3}} \times 12 = \frac{24}{3} = 8$$

39. ¿Qué es mayor, la mitad de la tercera parte o la mitad de las dos terceras partes?

Solución
La mitad de la tercera parte o la mitad de las dos terceras partes, ¿cuál es mayor?

La mitad de la tercera parte = $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

La mitad de las dos terceras partes = $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{6}$

Es mayor la mitad de las dos terceras partes.

Añadir = sumar

40. ¿ Cuánto hemos de *añadir* a 3/5 de kilo para obtener 1 kilo?

Solución
$\frac{3}{5}$ de kilo es hacer 5 partes de un kilo y coger 3, quedan 2 (5 – 3) trozos de 5.

Tenemos que añadir $\frac{2}{5}$.

41. La tercera parte de los alumnos de una clase, se fueron de excursión a la montaña, y el resto a la playa. ¿Qué fracción de alumnos se fueron a la playa?

Solución

A la montaña van $\frac{1}{3}$ de alumnos.

A la playa van el resto (los demás)

Resto, ¿cuánto? $\frac{1}{3}$ de los alumnos quiere decir del total de los alumnos hacer 3 partes y coger 1, quedan 2 (3 – 1) partes de 3.

Entonces a la playa van $\frac{2}{3}$ de alumnos.

transcurrido

42. a) ¿Qué fracción del día ha *transcurrido* a las 6 de la mañana?
b) ¿ Y a las 6 de la tarde?

Solución
Un día = 24 horas. El día empieza por la noche a las 00 h.

a) Desde las 00 h. hasta las 6:00 h. han pasado 6 horas de 24 en total

$$\frac{6}{24} = \frac{1}{4} \text{ de día}$$

b) A las seis de la tarde han pasado 12 + 6 = 18 horas de 24

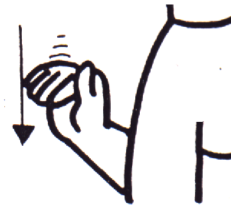
$$\frac{18}{24} = \frac{3}{4} \text{ de día}$$

43. Si han transcurrido las $\frac{2}{3}$ del día ¿ Qué hora es?

Solución

1 día = 24 horas

$\frac{2}{3}$ de día $= \frac{2}{3}$ 24 = 16 horas = 4 de la tarde.



Descuento

Rebaja = descuento

44. En unos grandes almacenes están *rebajados* todos los artículos un 20%. Indica el precio final de cada uno de los siguientes artículos:

a) Una falda de 36´14 euros.
b) Una cámara de fotos de 70´3 euros
c) Un juego de 30´12 euros.

Solución

a) falda →36´14 €

Rebajar un 20% quiere decir:

Precio nuevo de la falda = precio – rebaja

rebaja = 20 % de precio = 20 % de 36´14 = $\frac{20}{100} \cdot 36'14 = \frac{722'8}{100} = 7'228$ €

Pero en euros sólo debe haber 2 cifras decimales (obligación → detrás de la ´ sólo dos cifras). Ahora, en la solución hay 3 cifras 7´<u>228</u> (3 cifras→ el <u>2</u>, el <u>2</u> y el <u>8</u>)

Para dejar 2 cifras hacemos *el redondeo a dos cifras*.

Pero ¿cómo hacemos *el redondeo a dos cifras*?

Miramos la tercera cifra decimal 7´228

Si es 5 o mayor → sumamos 1 a la segunda cifra decimal
→ dejamos sólo 2 cifras decimales.

Si es menor que 5 → dejamos sólo 2 cifras decimales.

En este problema la tercera cifra decimal es 8 > 5 → 7´228

$\downarrow + 1$

7´23 €

28´91 € se dice 28 coma 91 euros o 28 euros 91 céntimos

rebaja = 7´23 €⇒ la falda *vale* = precio – rebaja = 36´14 – 7´23 = 28´91 €

b) Cámara de fotos →70´3 €

vale = cuesta

Ahora la cámara de fotos *vale* = precio – rebaja

rebaja = 20 % de precio = 20 % de 70´3 = $\frac{20}{100} \cdot 70'3 = \frac{1406}{100} = 14'06$ €

Ya tiene dos cifras decimales, no hace falta redondeo.

56´24 € se dice 56 coma 24 euros o 56 euros 24 céntimos

La cámara de fotos *vale* = precio – rebaja = 70´3 – 14´06 = 56´24 €

c) juego →30´12 €

Precio nuevo del juego = precio – rebaja

rebaja = 20 % de precio = 20 % de $30'12 = \frac{20}{100} \cdot 30'12 = \frac{602'4}{100} = 6'024$ €

Pero en euros sólo debe haber 2 cifras decimales (obligación → detrás de la ´ sólo dos cifras). Para dejar 2 cifras hacemos *el redondeo a dos cifras*.

La tercera cifra decimal es 4 < 5 entonces directamente dejamos sólo 2 cifras decimales → 6´02 €

rebaja = 6´02 € ⇒ el juego vale = precio – rebaja = 30´12 – 6´02 = 24´1 €

24´1 se dice 24 coma 1 euro o 24 euros 10 céntimos

45. Si en una camisa de 19´5 euros. nos hacen un *descuento* de 1/5 del precio ¿ Qué nos *costará* al final?

Costará = precio

Recuerda:

DESCONTAR → RESTAR

Solución

Una camisa, su precio es 19´5 €

El descuento es $\frac{1}{5}$ de 19´5

Descuento, ¿cuánto?

$\frac{1}{5}$ de $19'5 = \frac{1}{5} \cdot 19'5 = 3'9$ €

Ahora la camisa cuesta........ ¿cuánto?

Precio – descuento = 19´5 – 3´9 = 15´6 €

15´6 € se dice 15 coma 6 euros o 15 euros 60 céntimos.

46. Si nos hacen un descuento de 1/10 del precio de una camisa y nos cobran 30´12 € ¿ Cuál era el precio de la camisa?

Solución

Precio de la camisa .... ¿?

Me descuentan $\frac{1}{10}$ quiere decir:

el precio de la camisa lo dividimos en 10 partes, descuentan 1 y pagamos 9.

9 partes = 30´12 €.

Si partimos 30´12 en 9 partes = DIVIDIMOS 30´12 entre 9

30´12 : 9 = 3´3466 € →redondeo 3´35 €

1 parte son 3´35 €

Precio camisa = 1 parte descuento + 9 partes se pagan = 3´35 + 30´12 = 33´47 € costaba la camisa

33´47 € se dice 33 coma 47 euros o 33 euros 47 céntimos.

47. Unos pantalones marcan 42´17 €, nos hacen un descuento del 20% y al precio resultante le añaden el 10% de IVA, ¿ qué precio final tendrán los pantalones?

Solución

Pantalones = 42´17 €

DESCONTAR 20%

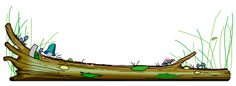
Ahora los pantalones valen = 42´17 – descuento

descuento = 20% de $42'17 = \frac{20}{100} \cdot 42'17 = 8'434$ → (redondeo) 8´43 €

Ahora los pantalones valen precio = 42´17 – 8´43 = 33´74 €

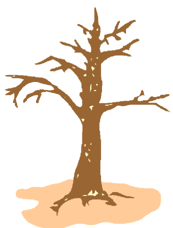
AÑADIR
→ SUMAR

Ciclón



Árbol arrancado de cuajo

árbol destruido



árbol dañado

Árbol sano

Abrigo

AÑADIR IVA 10%
Precio de los pantalones = 33´74 + IVA

IVA = 10% de 33´74 = $\frac{10}{100} \cdot 33'74 = 3'374$ (redondeo) = 3´37 €

Pantalones precio = 33´74 + 3´37 = 37´11 €

48. Un bosque tenía 168 árboles. Al pasar un *ciclón* produjo los siguientes efectos:

- 2/7 del total fueron *arrancados de cuajo*.
- 1/12 del total quedaron *destruidos*.
- 1/6 de total quedaron *dañados*.

¿ Cuántos quedaron *sanos*?

Solución
Un bosque, tiene→ 168 árboles

Árboles arrancados, ¿cuántos? → $\frac{2}{7}$ de 168 = $\frac{2}{7} \cdot 168 = 48$

Árboles destruidos, ¿cuántos? → $\frac{1}{12}$ de 168 = $\frac{1}{12} \cdot 168 = 14$

Árboles dañados, ¿cuántos? → $\frac{1}{6}$ de 168 = $\frac{1}{6}$ de 168 = 28

Árboles sanos, ... ¿cuántos?

RESTAR: Número de árboles – (árboles arrancados + árboles destruidos + árboles dañados) = 168 – (48 + 14 + 28) = 78 árboles sanos.

49. Una persona sale de su casa con 120´4 € Se gasta un 60% de lo que lleva en un *abrigo*; un 50% de lo que le queda en unos pantalones; y un 50% de lo que le queda en una camisa. ¿ Cuánto dinero le queda?

Solución
Tiene → 120´4 €

Compra un abrigo y gasta → 60% de dinero = $\frac{60}{100} \cdot 120'4 = 72'24$

Dinero que tiene ahora = dinero al principio – gasto del abrigo = 120´4 – 72´24 = 48´16 €

Compra un pantalón y gasta → 50% del dinero que queda = $\frac{50}{100} \cdot 48'16 =$ 24´08

Dinero que tiene ahora = dinero que quedaba – gasto del pantalón = 48´16 – 24´08 = 24´08 €

Compra una camisa y gasta → 50% del dinero que queda = $\frac{50}{100} \cdot 24'08 =$ 12´04

Dinero que tiene ahora = dinero que quedaba – gasto de la camisa = 24´08 – 12´04 = **12´04 €**

Al final sobran 12´04 €

50. Una persona va a comprar un coche que cuesta 15.060 € La forma de pagarlo es la siguiente: debe pagar 600 € al contado, en ese día; dentro de una semana debe pagar 3/8 de lo que falta, también al contado. El resto debe pagarlo en 30 meses, sin intereses. ¿Cuánto deberá pagar cada mes?

Solución

Precio del coche → 15.060 €
Al principio paga → 600 €
Falta pagar:
RESTAR el precio menos lo pagado ya : 15.060 - 600 = 14.460 €

Después de una semana ¿cuánto paga?

$\frac{3}{8}$ de 14.460 = $\frac{3}{8} \cdot 14.460 = 5.422'5$ €

Ahora falta pagar 14.460 – 5.422´5 = 9.037´5 €

En 30 meses debe pagar 9.037´5 €, cada mes ¿cuánto paga?
REPARTIR 9.037´5 entre 30 meses = DIVIDIR 9.037´5 entre 30
9.037´5 : 30 = 301´25 €

Cada mes paga 301´25 €

51. Una familia se come una tarta de la siguiente manera: el padre se come los 4/15 del total; la madre y el hijo mayor comen lo mismo que el padre; el hijo mediano se come los 2/3 de lo que *queda* y el resto se lo come el hijo menor. ¿ Qué parte de la tarta le corresponde al hijo menor?.

Solución

El padre come → $\frac{4}{15}$ de la tarta

La madre y el hijo mayor comen → $\frac{4}{15}$ de la tarta

queda = sobra

El hijo mediano come $\frac{2}{3}$ de lo que *queda*.

Queda .... ¿cuánto?

Entre el padre, la madre y el hijo mayor comen:

$\frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{8}{15}$ (8 partes de 15)

Quedan 7 partes de 15 = $\frac{7}{15}$

El hijo mediano come $\frac{2}{3}$ de $\frac{7}{15} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{15} = \frac{14}{45}$

Entre el padre, la madre, el hijo mayor y el hijo mediano comen:

$$\frac{4}{15} + \frac{4}{15} + \frac{14}{45} = \frac{12+12+14}{45} = \frac{38}{45}$$

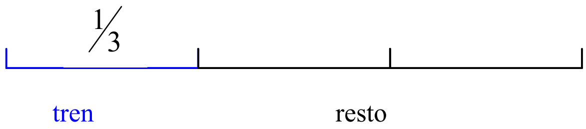
(38 partes de 45), quedan 7 (45 - 38) partes de 45

El hijo menor come 7 partes de 45 = $\dfrac{7}{45}$

52. Un recorrido lo hemos hecho de la siguiente manera: 1/3 del total en tren; 15/16 del resto en autobús; y el resto lo hemos hecho andando. ¿Qué parte del camino hemos recorrido andando?

Solución

En tren vamos $\dfrac{1}{3}$



Quedan $\dfrac{2}{3}$

En autobús vamos $\dfrac{15}{16}$ del resto = $\dfrac{15}{16}$ de $\dfrac{2}{3} = \dfrac{15}{16} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{30}{48} = \dfrac{15}{24} = \mathbf{\dfrac{5}{8}}$

Tren + autobús, en total recorremos:

$\dfrac{1}{3} + \mathbf{\dfrac{5}{8}} = \dfrac{8}{24} + \dfrac{15}{24} = \dfrac{23}{24}$

(23 partes de 24), queda 1 parte de 24.

Andando recorre $\dfrac{1}{24}$

destruir = romper

53. Una tormenta ha *destruido* 5 de cada 11 árboles de una huerta y en otra huerta ha *destruido* 8 de cada 17 árboles. ¿ Cuál ha sido la huerta más dañada?

Solución

En una huerta, árboles dañados hay $\dfrac{5}{11}$

En otra huerta, árboles dañados hay $\dfrac{8}{17}$

Más arboles dañados hay... ¿dónde? = ¿MAYOR $\dfrac{5}{11}$ o $\dfrac{8}{17}$?

m. c. m. (11, 17) = 187

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{5}{11} = \dfrac{85}{187} \\[2ex] \dfrac{8}{17} = \dfrac{88}{187} \end{array}\right\} \underbrace{\dfrac{88}{187}}_{2^{a}\text{ huerta}} > \underbrace{\dfrac{85}{187}}_{1^{a}\text{ huerta}} \quad \rightarrow \quad \dfrac{8}{17} > \dfrac{5}{11}$$

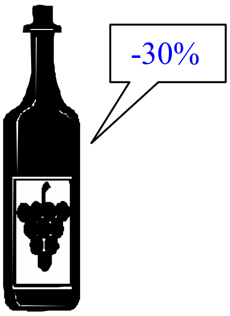
En la segunda huerta hay más árboles dañados.

54. Una botella de vino cuesta en el supermercado A y en el supermercado B lo mismo, 3´1 €. En el supermercado A está en oferta haciendo un descuento del 30%; en el supermercado B también lo tienen en oferta pagando dos botellas por cada tres que te lleves. Si vamos a comprar 6 botellas de vino, ¿en qué tienda nos sale más económico?

Solución

En el supermercado A, una botella de vino ahora cuesta ¿cuánto?

$3'1 - 30\% \text{ de } 3'1 = 3'1 - \dfrac{30}{100} \cdot 3'1 = 3'1 - 0'93 = 2'17$ €



En el supermercado A, 6 botellas cuestan ¿cuánto?

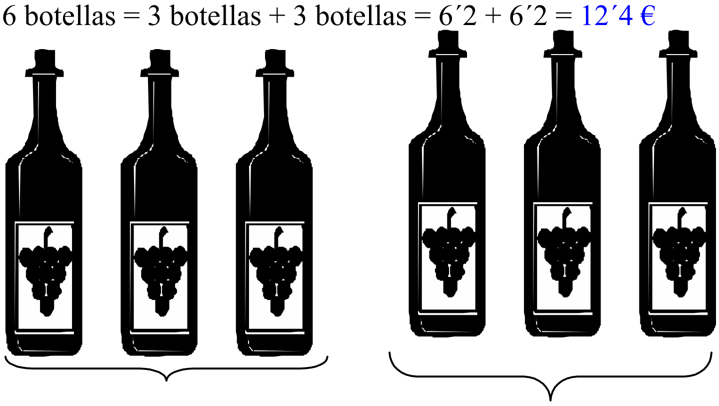
SUMAR 6 veces 2´17 = MULTIPLICAR 6 por 2´17 = $6 \cdot 2'17 = 13'02$ €

En el supermercado B

3 botellas de vino valen = dos $\rightarrow 3'1 + 3''1 = 6'2$ €

6 botellas cuestan ¿cuánto?

6 botellas = 3 botellas + 3 botellas = $6'2 + 6'2 = 12'4$ €



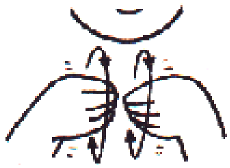
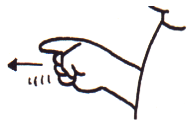
6´2 + 6´2

En el supermercado A, 6 botellas $\rightarrow$ 13´02 €

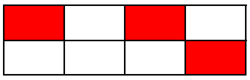
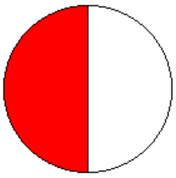
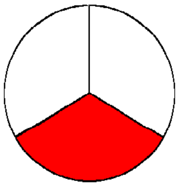
En el supermercado B, 6 botellas $\rightarrow$ 12´4 €

Mejor el supermercado B

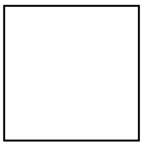
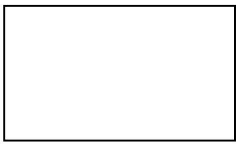
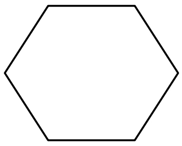
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Escribe al lado de cada figura la parte que está coloreada:

2. Colorea en cada figura 1/3 parte.

3. ¿Cómo se leen las siguientes fracciones?

$\frac{3}{4}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{8}{3}$;

4. Escribe tres fracciones equivalentes a cada una de las siguientes:

a) $\frac{4}{5}$; b) $\frac{8}{16}$; c) $\frac{5}{2}$

5. De las fracciones siguientes indica cuales son equivalentes a 1/3

$\frac{3}{9}$; $\frac{27}{9}$; $\frac{4}{12}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{15}{27}$

6. Calcula la fracción irreducible (simplificada) de:

a) $\frac{15}{25}$; b) $\frac{10}{20}$; c) $\frac{36}{60}$; d) $\frac{90}{135}$; e) $\frac{9}{27}$

7. Expresa en forma decimal las siguientes fracciones.

a) $\frac{3}{5}$; b) $\frac{2}{3}$; c) $\frac{7}{3}$; d) $\frac{11}{2}$; e) $\frac{36}{11}$

8. Escribe en forma de fracción:

a) 0,017 b) $1{,}1\widehat{2}$ c) $21{,}\widehat{3}$ d) 3,14 e) $4{,}05\widehat{1}$

9. Escribe como se leen los siguientes números decimales.

a) 0,32 b) 41,1 c) 3,512 d) 7,536

10. Escribe con cifras los números siguientes.

a) 3 unidades y 15 centésimas.
b) 48 unidades y 6 milésimas.
c) 25 unidades y 35 diezmilésimas
d) Uno coma dieciocho periódico puro.
e) Cero coma trescientos quince periódico mixto en el cinco.
f) Treinta y tres coma sesenta y dos periódico mixto en el dos.

11. Representa en la recta los siguientes números fraccionarios.

$\frac{1}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{-3}{4}$; $\frac{-2}{7}$; $\frac{10}{3}$; $\frac{-15}{4}$

común denominador = igual denominador

12. Reduce a *común denominador* las siguientes fracciones.

a) $\frac{3}{4} y \frac{2}{10}$; b) $\frac{2}{3}, \frac{5}{6} y \frac{7}{2}$; c) $\frac{8}{3}, \frac{3}{8}, \frac{6}{4} y \frac{11}{6}$

13. Ordena de mayor a menor las siguientes fracciones, reduciéndolas previamente a *común denominador*.

$\frac{3}{5}$; $\frac{2}{15}$; $\frac{12}{40}$; $\frac{3}{8}$

14. Ordena de menor a mayor los siguientes números decimales.

0,6 ; 0,66; 0,661; 0,16 ; 0,166

15. Realiza las siguientes sumas y restas de fracciones simplificando el resultado.

a) $\frac{3}{5}+\frac{1}{2}$ *b)* $\frac{3}{5}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$ *c)* $\frac{4}{13}+\frac{3}{5}+7$ *d)* $\frac{4}{3}+\frac{3}{8}-\frac{7}{3}$

16. Realiza los siguientes productos de fracciones simplificando *cuando sea posible*.

a) $\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{4}$ *b)* $\frac{7}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}$ *c)* $\frac{4}{7}\cdot 3$ *d)* $\frac{11}{13}\cdot\frac{1}{4}$ *e)* $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot 12$

cuando sea posible = si se puede

17. Realiza las siguientes divisiones de fracciones simplificando *cuando sea posible*.

a) $\frac{3}{5}:\frac{1}{2}$ *b)* $\frac{3}{2}:\frac{2}{3}$ *c)* $\frac{4}{5}:\frac{12}{5}$ *d)* $\frac{3}{4}:6$ *e)* $\frac{7}{2}:\frac{2}{5}$ *f)* $4:\frac{31}{13}$

18. Realiza las siguientes operaciones con fracciones.

a) $\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)$ b) $\frac{3}{5}:\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}$ *c)* $\frac{4}{7}:\frac{3}{5}+\frac{4}{3}-\frac{2}{5}$

d) $\left[\frac{3}{5}\left(\frac{2}{3}+1\right)+\frac{5}{2}\right]:\frac{2}{5}$ *e)* $\frac{4}{9}-\frac{3}{5}:\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\right)$

19. Realiza las siguientes operaciones con fracciones

a) $\frac{3}{5}-\left(\frac{6}{9}\cdot\frac{7}{8}\right)=$ b) $\left(\frac{2}{5}+\frac{6}{7}\right):\frac{11}{3}=$ c) $\frac{7}{4}:\left(\frac{3}{4}+\frac{4}{5}\right)=$

d) $\left(\frac{6}{9}+\frac{4}{7}\right)\cdot\left(\frac{9}{4}-\frac{1}{5}\right)=$ e) $\left[\left(\frac{2}{5}+3\right)-\left(\frac{2}{5}-1\right)\cdot 3\right]\cdot\left(\frac{3}{10}+2\right)=$

20. Realiza las siguientes operaciones con números decimales, sin usar la calculadora:

a) 23,15 + 5,6 b) 0,0032 + 0,1 + 1,041
c) 3,2102 – 2,101 d) 12,3 · 5,4
e) 435,24 + 815,3 –320,41 f) 1,3 · 3,08
g) 42,126 : 5,1 h) 21,3 : 7,2

21. Realiza las siguientes operaciones con potencias de 10.

a) $4{,}56 \cdot 10^3$ b) $0{,}513 \cdot 10^4$ c) 435 : 1000
d) $31{,}4 : 10^2$ e) $1{,}41 \cdot 10$ f) $0{,}005 \cdot 1000$

22. Efectúa las siguientes potencias.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 ; \quad \left(\frac{-3}{2}\right)^3 ; \quad \left(\frac{3}{5}\right)^{-1} ; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^4 ; \quad \left(\frac{1}{5}\right)^0$$

23. Efectúa las siguientes operaciones con potencias aplicando las propiedades de las mismas.

a) $\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^3$ *b*) $\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]^3$

c) $\left(\frac{7}{2}\right)^2 : \left(\frac{2}{7}\right)^{-1}$ *d*) $\left(\frac{6}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)$

24. Realiza las siguientes operaciones con potencias y aplica las propiedades de las potencias

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 =$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 =$

c) $\left(\frac{3}{5}\right)^6 : \left(\frac{3}{5}\right)^5 =$ d) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^5 =$

25. Realiza las siguientes operaciones con potencias, donde el exponente es un número entero negativo

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} - \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} =$ b) $\left(2 \cdot \frac{3}{4} - 1 \cdot \frac{2}{3}\right)^{-2} =$

26. ¿ Qué números hay que escribir en los lugares vacíos para que sean ciertas las igualdades?

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^3 : \left(\frac{1}{5}\right)^4 = \left(\frac{1}{5}\right)$ b) $\left(-\frac{2}{7}\right)^4 \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) = \left(-\frac{2}{7}\right)^7$

c) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 : \left(\frac{2}{5}\right)^{-4} = \left(\frac{2}{5}\right)$ d) $\left(-\frac{2}{7}\right)^4 \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) = \left(-\frac{2}{7}\right)^{-5}$

27. Realiza las siguientes operaciones:

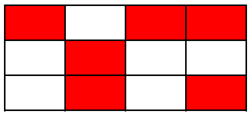
a) $\frac{1}{2}-\frac{5}{6}:\frac{10}{2}+\frac{5}{12}:\left(\frac{5}{4}\right)^{-1}=$ b) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2}+\frac{3}{4}\cdot 3^{-1}=$

c) $\left(\left(\frac{-1}{4}\right)^{-1}\right)^{4}=$ d) $\left(\left(\frac{1}{5}\right)^{3}\right)^{\frac{2}{3}}=$

28. Realiza las siguientes operaciones.
a) 5 % de 8.500; b) 25 % de 16.000;
c)15 % de 102.500; d) 7 % de 34.000

29. A una cantidad se aplicó el 2 % de descuento. La cantidad que se pagó fue 3.920 ptas. ¿Cuál es la cantidad total?.

30. Expresa qué porcentaje de la superficie de la figura representa la zona coloreada.



31. Un número mixto es un número racional mayor que uno, que se puede expresar como un entero más un número racional menor que uno.

Ejemplo: $\frac{5}{4}=1+\frac{1}{4}$ Expresa de la misma forma:

$\frac{14}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{8}{5}$

32. Halla:
a) El doble de 2.700
b) La mitad de 2.700
c) La cuarta parte de 2.700
d) Las dos quintas partes de 2.700
e) El triple de 2.700
f) La tercera parte de 2.700

33. Halla:

a) El doble de $\frac{8}{5}$ b) Las dos quintas partes de $\frac{8}{5}$

c)La mitad de $\frac{8}{5}$ d) El triple de $\frac{8}{5}$

e)La cuarta parte de $\frac{8}{5}$ f) La tercera parte de $\frac{8}{5}$

34. Expresa en gramos:
a) Un cuarto de kilo.
b) Dos kilos y cuarto.
c) Tres kilos y medio.

35. Si un kilo cuesta 2´41 €. ¿Cuánto cuesta:
a) Un cuarto de kilo.
b) Dos kilos y cuarto.
c) Tres kilos y medio.

36. Expresa en fracción de kilo:
a) 250 gramos
b) 300 gramos
c) 500 gramos
d) 800 gramos

37. Expresa como porcentaje de kilo:
a) 250 gramos
b) 300 gramos
c) 500 gramos
d) 800 gramos

38. Expresa en centímetros:
a) 1/4 de metro.
b) 2/5 de metro.
c) 3/5 de 5 metros.
d) 7/8 de 4 metros.

39. Expresa como fracción de metro:
a) 80 cm.
b) 75 cm.

40. Expresa las cantidades del ejercicio anterior como porcentaje de metro.

41. ¿Cuántos minutos son:
a) Tres cuartos de hora
b) Una hora y cuarto?

42. Supongamos que cada euro cuesta 166 ptas. Calcula el precio en pesetas de:
a) 50 centavos de euro.
b) 2 décimos de euro.

43. ¿ Qué pesa más 3/10 de kilo o 200 gramos?

44. a) ¿ Cuánto tenemos que añadir a 3/4 de kilo para obtener 1 kilo?
b)¿ Y a ¼ de kilo?

45. De mi casa al instituto hay dos kilómetros y he andado 500 metros, ¿qué fracción de recorrido me falta para llegar al instituto?

46. Carlos y Luis son dos hermanos. Carlos tiene 1/6 de la edad de la madre y Luis 1/7 de la edad de la madre. ¿Quién es mayor, Carlos o Luis?

47. Si en Tele 5 la cuarta parte de su programación son películas y en C+ la sexta parte. ¿En qué canal hay más películas?

48. Si en una camisa de 18 € nos hacen un descuento de 1/3 parte del precio ¿ Qué nos costará al final?

49. Si en unos pantalones que marcan 39´16 € nos hacen un descuento del 15% ¿ cuánto tendremos que pagar por ellos?

50. Un libro en 1996 costaba 24´1 €. En 1997 subió un 10%; en 1998 subió un 15%; y en 1999 bajó un 20%. ¿ Qué cuesta dicho libro en 1999?

51. Los ingresos mensuales de una familia son de 903´6 € Emplean los 4/15 en pagar el piso, los 2/15 en pagar el coche, 7/15 en comida y 1/15 en pagar los recibos.
a)¿ Cuánto dinero se emplea en cada gasto?
b) ¿ Cuánto dinero sobra?

52. Una persona sale de su casa con 150´6 €. Gasta las 3/5 partes del total en ropa; 1/3 del resto en libros; la cuarta parte de lo que queda se lo gasta en una merienda. ¿ Con cuánto dinero vuelve a casa?

53. Una receta de cocina nos dice que para hacer una determinada tarta necesitamos harina, aceite, azúcar, chocolate y mermelada. Del peso total de la tarta, los ingredientes se distribuyen de la siguiente manera: 2/5 del total de harina, 3/11 del total de aceite, 1/10 de azúcar, 1/5 de chocolate y el resto de mermelada. Si queremos hacer una tarta de 1.100 gramos ¿ qué cantidad de cada ingrediente debemos emplear?

54. Una familia se come una tarta de 1500 gr. de la siguiente manera: el padre se come los 4/15 del total; la madre y el hijo mayor comen lo mismo que el padre; el hijo mediano se come los 2/3 de lo que queda y el resto se lo come el hijo menor. ¿ Cuánto ha comido cada miembro de la familia?.

55. Un recorrido de 120 km. lo hemos hecho de la siguiente manera: 1/3 del total en tren; 15/16 del resto en autobús; y el resto lo hemos hecho andando. ¿ Cuánto hemos recorrido andando?.

56. Un producto cuesta en dos tiendas A y B la misma cantidad. En la tienda A lo tienen en oferta haciendo un descuento del 30% ; en la tienda B también lo tienen en oferta pagando dos de cada tres que te lleves. Si vamos a comprar 6 ¿en qué tienda nos sale más económico?

57. Un tren salió de una estación A. En la siguiente estación, B, se bajaron la novena parte de los que iban en el tren y subieron 20 pasajeros. Al salir de B el tren llevaba 420 pasajeros. ¿Cuántos pasajeros llevaba el tren al salir de la estación A?

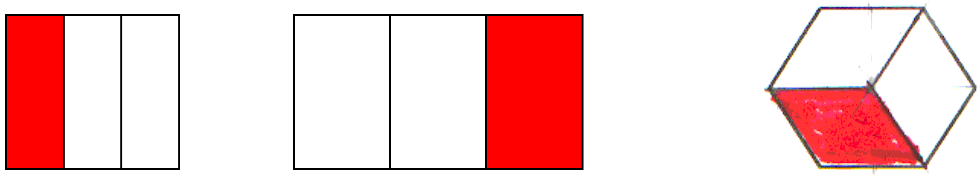
58. Al repartir una ganancia obtenida por 10 personas, ha recibido uno de ellos 1/5 del total; otro 1/6 del resto, y los otros ocho recibieron cada uno 63´25 €. ¿Cuál ha sido la ganancia y la parte que ha recibido cada uno?

59. Un trabajador tiene que hacer 23/3 m^3 de una obra. Ha empezado a las 7 de la mañana y hace 5/9 m^3 cada hora. Sabiendo que ha descansado una hora y cuarto ¿ A qué hora terminará?

Soluciones

1. 3 / 8 , 1 / 2 , 1 / 3.

2.



3. Tres cuartos; un medio; cuatro quintos; ocho tercios.

4. a) 8 / 10 , 12 / 15 , 16 / 20 .
b) 1 / 2 , 2 / 4 , 16 / 32.
c) 10 / 4 , 15 / 6 , 20 / 8.

5. Son equivalentes a 1 / 3 : 3 / 9 y 4 / 12 .

6. a) 3 / 5 b) 1 / 2 c) 3 / 5 d) 2 / 3 e) 1 / 3

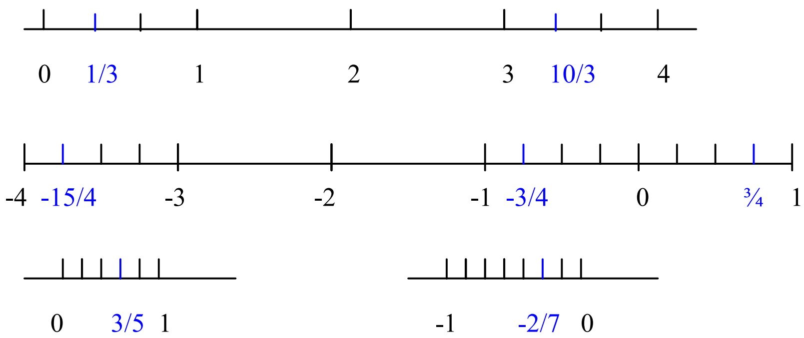
7. a) 0,6 b) $0,\widehat{6}$ c) $2,\widehat{3}$ d) 5,5 e) $3,\widehat{27}$

8. a) $\dfrac{17}{1000}$ b) $\dfrac{101}{90}$ c) $\dfrac{64}{3}$ d) $\dfrac{157}{50}$ e) $\dfrac{1823}{450}$

9. a) Cero unidades y treinta y dos centésimas.
b) Cuarenta y una unidades y una décima.
c) Tres unidades y quinientas doce milésimas.
d) Siete unidades y quinientas treinta y seis milésimas.

10. a) 3,15 b) 48,006 c) 25,0035 d) $4,\widehat{18}$ e) $0,31\widehat{5}$ f) $33,6\widehat{2}$

11.



12. $\dfrac{15}{20}\ y\ \dfrac{4}{20}$ b) $\dfrac{4}{6},\ \dfrac{5}{6}\ y\ \dfrac{21}{6}$ c) $\dfrac{64}{24},\ \dfrac{9}{24},\ \dfrac{36}{24}\ y\ \dfrac{44}{24}$

13. $\dfrac{3}{5} > \dfrac{3}{8} > \dfrac{12}{40} > \dfrac{2}{15}$

14. 0,16 < 0,166 < 0,6 < 0,66 < 0,661.

15. a) $\dfrac{11}{10}$ b) $\dfrac{37}{20}$ c) $\dfrac{514}{65}$ d) $\dfrac{-5}{8}$

16. a) 3 / 4 b) 7 / 8 c) 12 / 7 d) 11 / 52 e) 1 / 5

17. a) 6 / 5 b) 9 / 4 c) 1 / 3 d) 1 / 8 e) 35 / 4 f) 52 / 31

18. a) 1 / 15 b) 9 / 40 c) 66 / 35 d) 35 / 4 e) 32 / 315

19. a) $\dfrac{1}{60}$ b) $\dfrac{132}{385}$ c) $\dfrac{35}{31}$ d) $\dfrac{533}{210}$ e) $\dfrac{299}{25}$

20. a) 28,75 b) 1,1442 c) 1,1092 d) 66,42 e) 930,13
f) 4,004 g) 8,26 h) $2,958\widehat{3}$

21. a) 4560 b) 5130 c) 0,435 d) 0,314 e) 14,1 f) 5

22. 9 / 16, -27 / 8, 5 / 3, 1 / 16, 1

23. a) $\left(\frac{2}{5}\right)^4 = 16 / 625$ b) $\left(\frac{3}{2}\right)^6 = 729 / 64$ c) $\left(\frac{7}{2}\right)^1 = 7/2$ d) $\left(\frac{3}{2}\right)^4 = 81 / 16$

24. a) $\frac{1}{75}$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^8 = \frac{256}{6561}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$

25. a) $\frac{737}{36}$ b) $\frac{36}{25}$

26. .- a) - 1 b) 3 c) 7 d) – 9

27. a) $\frac{41}{48}$ b) 0 c) 256 d) $\frac{1}{25}$

28. a) 425 b) 4.000 c) 15.375 d) 2.380

29. 4.000 pesetas.

30. 50 %.

31. $4+\frac{2}{3}$, $1+\frac{1}{2}$, $1+\frac{2}{3}$, $1+\frac{1}{3}$, $1+\frac{3}{5}$

32. a) 5.400 b) 1.350 c) 675 d) 1.080 e) 8.100 f) 900

33. a) 16 / 5 b) 16 / 25 c) 4 / 5 d) 24 / 5 e) 2 / 5 f) 8 / 15

34. a) 250 gramos. b) 2.250 gramos. c) 3.500 gramos.

35. a) 100 pesetas. b) 900 pesetas. c) 1.400 pesetas.

36. a) $\frac{1}{4}$ de kilo. b) $\frac{3}{10}$ de kilo. c) $\frac{1}{2}$ de kilo. d) $\frac{4}{5}$ de kilo.

37. a) 25 % b) 30 % c) 50 % d) 80 %

38. a) 25 centímetros. b) 40 centímetros. c) 300 centímetros. d)350 centímetros.

39. a) $\frac{4}{5}$ de metro. b) $\frac{3}{4}$ de metro.

40. a) 80 % b) 75 %

41. a) 45 minutos. b) 75 minutos.

42. a) 83 pesetas. b) 33,2 pesetas.

43. $\frac{3}{10}$ de kilo.

44. a) $\frac{1}{4}$ de kilo. b) $\frac{3}{4}$ de kilo.

45. Me faltan las 3 / 4 partes del recorrido para llegar a mi casa.

46. El mayor es Carlos.

47. En Tele 5.

48. El coste final es de 12 €.

49. Pagaremos 33´29 €.

50. El coste del libro es de 24´37 €.

51. a) Piso ---------240´96 €; coche -------120´48 €; comida -------421´68 €; Recibos ------60´24 €
b) Sobran 60´24 €.

52. Vuelve a casa con 30´12 €.

53. Harina ----------- 440 gramos. Aceite ----------- 300 gramos.
Azúcar ---------- 110 gramos. Chocolate ------- 220 gramos.
Mermelada ----- 30 gramos.

54. Padre ----------------400 gramos. Madre ------------------- 400 gramos.
Hijo mayor --------400 gramos. Hijo mediano -------------200 gramos.
Hijo menor ------------------------- 100 gramos.

55. Hemos recorrido andando 5 km.

56. En la tienda B.

57. En la estación A, el tren llevaba 450 pasajeros.

58. Ganancia total: 759 €. El primero recibió 151´8 € y el segundo recibió 101´2.

59. Terminará a las 22 h. y 3 minutos.

TEMA IV
LOS NÚMEROS IRRACIONALES

Autores:
Antonio Ruíz Luján
Josefa Orenes Díaz

NÚMEROS IRRACIONALES

Los números racionales ya los hemos estudiado y sabemos que su forma decimal es: el número decimal exacto, periódico puro o periódico mixto. Hay otros números cuya forma decimal es infinita (no tienen fin) y no periódica (los números detrás de la coma no se repiten). Esos números no se pueden escribir en forma de fracción (a/b). Se llaman números irracionales.

Números **Irracionales** su signo es **I**:

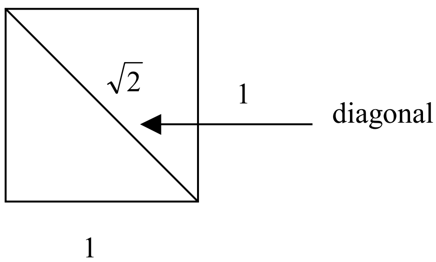
I = {Números cuya forma decimal es infinita (no termina) y no se repiten los números detrás de la coma}

Ejemplos:

a) 2´010010001…

b) 42´728394105116127…

c) Un cuadrado, con lado entero (un número sin decimal, sin coma) entonces la diagonal mide un número irracional. Ejemplo un cuadrado con lado = 1, usamos el *teorema de Pitágoras*, y la diagonal mide $\sqrt{2}$



$\sqrt{2}$ es irracional, ¿cómo lo sabemos? Irracional quiere decir que no es igual a una fracción.

Ejemplo: Si $\sqrt{2} = \frac{c}{d}$; simplificamos $\frac{c}{d}$ hasta que no podamos más $\rightarrow \frac{a}{b}$

$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, a y b son enteros, y *primos entre sí*.

Entonces pasamos b arriba → $b \cdot \sqrt{2} = a$

y elevando al cuadrado $\uparrow^2$ → $b^2 \cdot (\cancel{\sqrt{}}2)^{\cancel{2}} = a^2$ → $b^2 \cdot 2 = a^2$

Entonces a^2 es un número (da igual cuál), pero par, porque: $a^2 = 2 \cdot b^2$
Si a^2 es par entonces a es par, lo que quiere decir que a es igual a 2 · otro número (da igual cuál), por ejemplo t → $a = 2 \cdot t$

$a^2 = 2 \cdot b^2 \rightarrow (2 \cdot t)^2 = 2 \cdot b^2 \rightarrow 4 \cdot t^2 = 2 \cdot b^2 \rightarrow \frac{4}{2} \cdot t^2 = b^2 \rightarrow 2 \cdot t^2 = b^2$

Entonces b^2 es par (porque $b^2 = 2 \cdot t^2$) → Entonces b es par.

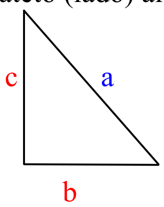
Eso es imposible, porque yo antes he dicho que a y b son primos entre sí, no pueden ser los dos par.

d) El número π (3`141592...), el número áureo φ ($\frac{1+\sqrt{5}}{2}$), etc. son también irracionales.

$\sqrt{2}$ se dice: raíz cuadrada de 2 o raíz de 2

Recuerda:
Teorema de Pitágoras. Es una fórmula que dice:

En un triángulo rectángulo la hipotenusa al cuadrado = cateto (lado) al cuadrado + otro cateto (lado) al cuadrado



$a^2 = b^2 + c^2$
a se llama hipotenusa
b y c se llaman catetos
Primos entre sí: dos números son primos entre sí ¿cuándo? Descomponemos; si no hay factores iguales, son primos entre sí

Número par: si número es igual a 2 · otro número.

SIEMPRE si nº $\uparrow$ 2 es par entonces nº es par.

NÚMEROS IRRACIONALES

Hemos estudiado los números racionales y hemos visto que al hallar su expresión decimal esta era: un número decimal exacto, periódico puro o periódico mixto. Pero existen otros números que su expresión decimal es infinita y no periódica, estos números no se pueden expresar como fracción, son los números Irracionales.

Los números **Irracionales** se representan como **I**:

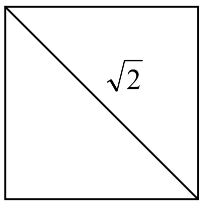
I = {Números cuya expresión decimal es infinita y no periódica}

Ejemplos:

a) 2´010010001…

b) 42´728394105116127…

c) También la medida de la diagonal de cualquier cuadrado de lado entero es irracional. Así, si consideramos, por ejemplo, el cuadrado de lado 1, su diagonal medirá, usando el teorema de Pitágoras, $\sqrt{2}$



Para demostrar que $\sqrt{2}$ es irracional, veamos que no es igual a una fracción y, por tanto, que su expresión decimal es infinita no periódica.

Supongamos que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ con a, b $\in$ Z, *primos entre sí*.

Entonces $b \cdot \sqrt{2} = a$ y elevando al cuadrado: $b^2 . 2 = a^2$**,** con lo que a^2 es par, por tanto a es par y lo podemos expresar como $2 \cdot t$ con $t \in N$

Sustituyendo en la formula anterior

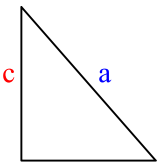
$b^2 . 2 = (2t)^2 \Rightarrow b^2 . 2 = 4t^2 \Rightarrow b^2 = 2t^2$

Entonces b es par, pero esto nos lleva a una contradicción ya que a y b eran primos entre sí.

d) También es irracional el número π (3`141592...), el número áureo ϕ ($\frac{1+\sqrt{5}}{2}$), etc.

Recuerda:
Teorema de Pitágoras:

En un triángulo rectángulo la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



$a^2 = b^2 + c^2$

Recuerda:

dos números son primos entre sí, si al descomponerlos en factores primos, no tienen ningún factor en común.

RADICALES

Tú has visto antes números con $\sqrt{\ }$, son importantes porque hay muchos dentro de los irracionales. Los números con $\sqrt{\ }$ se llaman radicales.

$$\boxed{\sqrt[n]{a}=b \text{ quiere decir que } b^n = a}$$

índice de la raíz (si =2 no poner)

$$\sqrt[n]{a}=b$$

raíz

radical radicando

Ejemplos:

a) $\sqrt[3]{8}=2$ porque $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

b) $\sqrt[4]{81}=\pm 3$ porque $3^4 = 81$ y también $(-3)^4 = 81$

c) $\sqrt[12]{4096}=\pm 2$ porque $2^{12} = 4096$ y también $(-2)^{12} = 4096$.

Después explicamos: si queremos simplificar $\sqrt{\ }$ ¿cómo se hace?, pero primero vamos a ver algunas propiedades (características) de las raíces:

1. Si n es par y el *radicando* es +, hay 2 soluciones.

$$\boxed{\text{n par, a positivo} \rightarrow \sqrt[n]{a}=\pm b}$$

Ejemplo:
$\sqrt[6]{64}=\pm 2$

2. Si n es par y el *radicando* es -, no hay solución

$$\boxed{\text{n par, a negativo} \rightarrow \sqrt[n]{a} \text{ no existe}}$$

Ejemplo:
$\sqrt{-13}$ no existe.

3. Si n es impar, el número dentro de la $\sqrt{\ }$ da igual, hay una solución:
   si el número dentro de la $\sqrt{\ }$ es +, la solución es +
   si el número dentro de la $\sqrt{\ }$ es -, la solución es -

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{n impar, a positivo} \rightarrow \sqrt[n]{a}=+b \\ \text{n impar, a negativo} \rightarrow \sqrt[n]{a}=-b\end{array}}$$

Ejemplos:
a) $\sqrt[3]{216}=6$ b) $\sqrt[3]{-216}=-6$

$\sqrt[n]{a}=b$ se dice:
raíz n-ésima de **a** es igual a **b**

Depende n se dice:

$\sqrt{\ }$ raíz cuadrada
$\sqrt[3]{\ }$ raíz cúbica
$\sqrt[4]{\ }$ raíz cuarta
$\sqrt[5]{\ }$ raíz quinta
....

$\sqrt[3]{8}=2$ se lee:
la raíz cúbica de 8 es 2

$\sqrt[4]{81}=\pm 3$ se lee:
la raíz cuarta de 81 es más menos 3

$\sqrt[12]{4096}=\pm 2$ se lee:
la raíz doceava de 4096 es más menos 2

radicando = el número dentro de la $\sqrt{\ }$

RADICALES

Como hemos visto antes es fácil encontrarnos con números como $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, etc. Estos números son la parte más importante de los números Irracionales y reciben el nombre de radicales

Diremos que $\sqrt[n]{a} = b$ si $b^n = a$

En $\sqrt[n]{a} = b$
- **n** es un número natural y se llama índice de la raíz, si n es 2 no se pone.
- $\sqrt{\ }$ se llama radical
- **a** se llama radicando
- **b** se llama raíz

Ejemplos:

a) $\sqrt[3]{8} = 2$ pues $2^3 = 8$

b) $\sqrt[4]{81} = \pm 3$ pues $3^4 = 81$ y también $(-3)^4 = 81$

c) $\sqrt[12]{4096} = \pm 2$ pues $2^{12} = 4096$ y también $(-2)^{12} = 4096$.

Después veremos como simplificar raíces y en algunos casos llegaremos a calcularlas, pero antes vamos a estudiar algunas propiedades de las raíces:

4. Si n es par y el radicando es positivo entonces hay dos soluciones

n par, a positivo $\rightarrow \sqrt[n]{a} = \pm b$

Ejemplo:

$\sqrt[6]{64} = \pm 2$

5. Si n es par y el radicando es negativo la raíz $\sqrt[n]{a}$ no existe.

n par, a negativo $\rightarrow \sqrt[n]{a}$ no existe

Ejemplo:

$\sqrt{-13}$ no existe.

6. Si n es impar hay una solución tanto si el radicando es positivo como si es negativo. Si el radicando es positivo la raíz será positiva y si el radicando es negativo, la raíz será negativa.

n impar, a positivo $\rightarrow \sqrt[n]{a} = +b$

n impar, a negativo $\rightarrow \sqrt[n]{a} = -b$

Ejemplos:

b) $\sqrt[3]{216} = 6$ b) $\sqrt[3]{-216} = -6$

$\sqrt[n]{a} = b$ se lee:
raíz n-ésima de a es igual a b

Según el valor de n se lee:

$\sqrt{\ }$ raíz cuadrada
$\sqrt[3]{\ }$ raíz cúbica
$\sqrt[4]{\ }$ raíz cuarta
$\sqrt[5]{\ }$ raíz quinta
....

Antes, hemos visto que había fracciones equivalentes (valen igual). Igual, aquí también hay radicales ($\sqrt{\ }$) equivalentes.

RADICALES EQUIVALENTES:

dos radicales son equivalentes cuando tienen las mismas raíces

Ejemplo:

$\sqrt{4}$ es equivalente a $\sqrt[4]{16}$ porque la solución es igual

$\sqrt{4} = \pm 2$ $\qquad$ $\sqrt[4]{16} = \pm 2$

índice

exponente

$\sqrt[n]{a^m}$

Recuerda que:
Si no hay índice → índice = 2

Si no hay exponente → exponente = 1

$\sqrt{2 \cdot 3^5} = \sqrt[2]{2^1 \cdot 3^5}$

Tú puedes encontrar otros equivalentes, ¿cómo? Multiplicando el índice y el exponente por un mismo número.

Ejemplo:

a) $\sqrt[3]{10^2} = \sqrt[3\cdot 3]{10^{2\cdot 3}} = \sqrt[9]{10^6}$

b) $\sqrt{2 \cdot 3^5} = \sqrt[2\cdot 5]{2^{1\cdot 5} \cdot 3^{5\cdot 5}} = \sqrt[10]{2^5 \cdot 3^{25}}$

REPRESENTACIÓN DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES

De la mayoría de números irracionales no se puede hacer un dibujo perfecto, pero se puede hacer un dibujo aproximado, más o menos. Algunos números irracionales, por ejemplo las $\sqrt{\ }$, se pueden dibujar con regla y compás, con el teorema de Pitágoras + otro teorema:

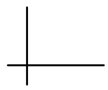
TEOREMA: El número natural que tú quieras se puede escribir =
número $\uparrow^2$ + número $\uparrow^2$ + número $\uparrow^2$ ... (máximo cuatro veces)

Ejemplos:

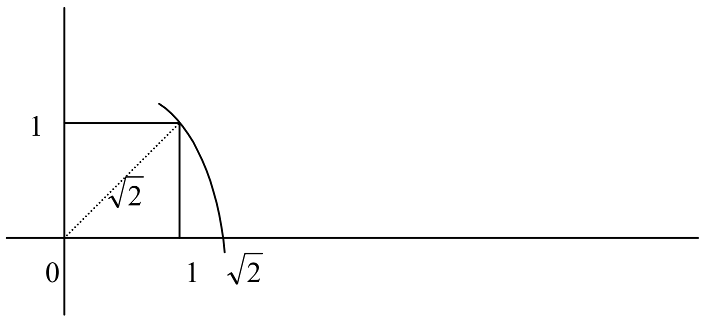
a) Dibujar $\sqrt{2}$. Primero ponemos 2 = número $\uparrow^2$ + número $\uparrow^2$ ¿cuál?

$$2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow \sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1^2}$$

Con el teorema de Pitágoras, si dibujamos un cuadrado de lado 1 → diagonal = $\sqrt{2}$ (antes ya lo hemos visto).

Dibujamos un cuadrado de lado 1 en los ejes 

Con el compás, pinchar en 0, tocar • y bajar hasta el eje X.



Igual que al trabajar con fracciones había fracciones equivalentes, también en el caso de las raíces existen radicales equivalentes.

RADICALES EQUIVALENTES:

Diremos que dos radicales son equivalentes si tienen las mismas raíces

Ejemplo:

$\sqrt{4}$ es equivalente a $\sqrt[4]{16}$ pues los dos radicales tienen como solución ± 2.

Nosotros podemos obtener radicales equivalentes multiplicando el índice y el exponente de una raíz por un mismo número.

Ejemplo:

c) $\sqrt[3]{10^2} = \sqrt[9]{10^6}$ pues hemos multiplicado el índice y el exponente de la primera raíz por 3.

d) $\sqrt{2 \cdot 3^5} = \sqrt[10]{2^5 \cdot 3^{25}}$ pues hemos multiplicado el índice y todos los exponentes de la primera raíz por 5.

REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS IRRACIONALES:

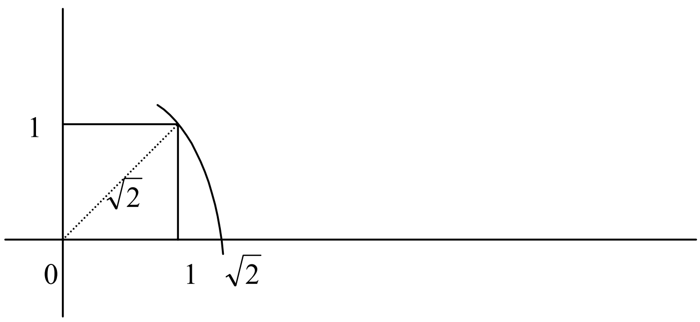
La mayor parte de los números Irracionales no pueden representarse de forma exacta, solo de manera aproximada por defecto o por exceso. Pero algunos números Irracionales como las raíces cuadradas si que se pueden representar mediante regla y compás, para ello utilizaremos el teorema de Pitágoras y el siguiente teorema:

TEOREMA: Todo número natural se expresa, como máximo, como suma de cuatro cuadrados de números Naturales.

Ejemplos:

a) Vamos a representar $\sqrt{2}$. Primero descomponemos el 2 como suma de cuadrados: $2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow \sqrt{2}=\sqrt{1^2+1^2}$

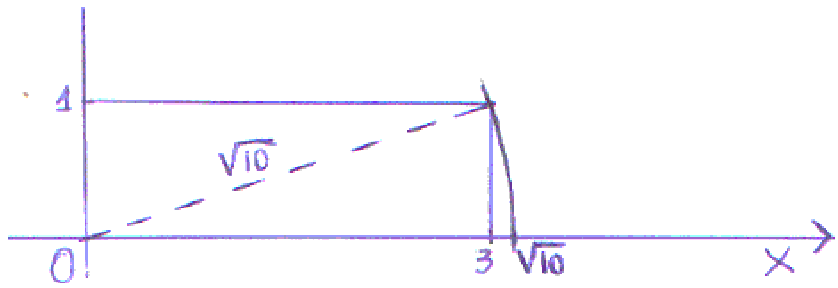
Usando el Teorema de Pitágoras, si sobre unos ejes dibujamos un cuadrado de lado 1, su diagonal medirá $\sqrt{2}$ y con un compás podremos trasladar esta medida sobre el eje OX



b) Para dibujar $\sqrt{11}$, primero ponemos 11 como suma de números al cuadrado:

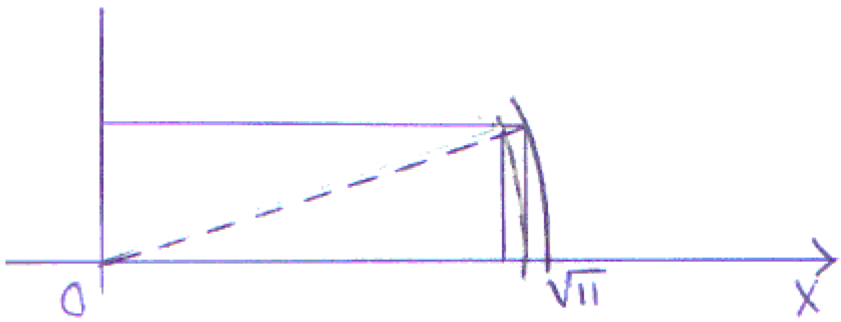
$$11 = 3^2 + 1^2 + 1^2 \Rightarrow \quad \sqrt{11} = \sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2}\ .$$

Hacemos un rectángulo de lados 3 y 1, la diagonal es $\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$. Bajamos con el compás igual que antes.



$\sqrt{11} = \sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{(\sqrt{10})^2 + 1^2}$

Ahora hacemos otra vez un rectángulo, de lados $\sqrt{10}$ y 1, y hacemos la diagonal: $\sqrt{(\sqrt{10})^2 + 1^2} = \sqrt{10+1} = \sqrt{11}$ y bajar.



POTENCIAS DE EXPONENTE FRACCIONARIO:

La raíz se puede escribir con forma de número elevado (↑) a fracción. ¿cómo?

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Recuerda que:
$\sqrt{7} = \sqrt[2]{7^1}$

Ejemplos

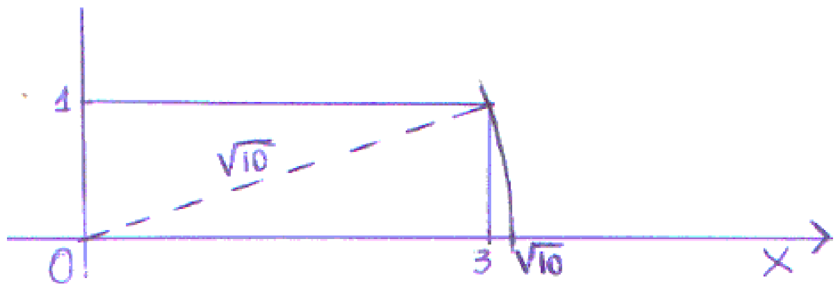
a) $\sqrt{7} = 7^{1/2}$

b) $\sqrt[3]{2^4} = 2^{4/3}$

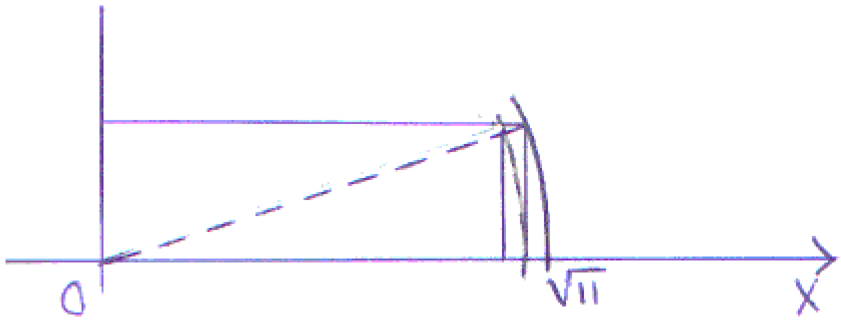
c) $\sqrt[5]{6^2} = 6^{2/5}$

b) Representemos ahora $\sqrt{11}$. Para esto descomponemos 11 como suma de cuadrados: $11 = 3^2 + 1^2 + 1^2 \Rightarrow \sqrt{11} = \sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2}$.

Para representarlo haremos primero un rectángulo con los dos primeros sumandos que tendrá diagonal $\sqrt{10}$, y a continuación trasladaremos esta medida sobre el eje OX:



Ahora hacemos un rectángulo en el que un lado mide $\sqrt{10}$ y el otro lado mide1, entonces la diagonal medirá $\sqrt{11}$, que podemos trasladar nuevamente sobre el eje OX.



POTENCIAS DE EXPONENTE FRACCIONARIO:

Podemos expresar las raíces como potencias de exponente fraccionario de la siguiente forma:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

<u>Ejemplos</u>

d) $\sqrt{7} = 7^{1/2}$

e) $\sqrt[3]{2^4} = 2^{4/3}$

f) $\sqrt[5]{6^2} = 6^{2/5}$

anterior = antes

Con esa forma, podemos saber si 2 radicales son equivalentes (sí o no).
Primero ponemos los radicales con forma $a^{m/n}$. Si los números de arriba son iguales, los radicales son iguales.

$$¿\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[q]{a^t}?$$
$$\downarrow \quad \downarrow$$
$$¿a^{m/n} = a^{t/q}? \rightarrow \text{si } \frac{m}{n} = \frac{t}{q} \Rightarrow \text{los dos radicales son iguales}$$

Ejemplo

a) $¿\sqrt{4^3} = \sqrt[6]{4^9}? \Rightarrow ¿4^{3/2} = 4^{9/6}? \rightarrow ¿\frac{3}{2} = \frac{9}{6}? \quad \frac{3}{2} \times \frac{9}{6} \quad 3 \cdot 9 = 2 \cdot 6$

sí, entonces $\sqrt{4^3} = \sqrt[6]{4^9}$, las dos son equivalentes.

b) $¿\sqrt{2^8} = \sqrt{2^7}? \rightarrow ¿2^{8/2} = 2^{7/2}$; $¿\frac{8}{2} = \frac{7}{2}?$ No, entonces $\sqrt{2^8} \neq \sqrt{2^7}$, las 2 raíces no son equivalentes.

Las potencias de exponente fraccionario ($a^{m/n}$) tienen propiedades, ¿cuáles? Las mismas que las potencias (a^m) que hemos visto en el tema *anterior*.

1. $a^m . a^n = a^{m+n}$

   Ejemplo:

   $$3^{\frac{11}{3}} \cdot 3^{\frac{5}{3}} = 3^{\frac{11}{3}+\frac{5}{3}} = 3^{\frac{16}{3}}$$

2. $a^m : a^n = a^{m-n}$

   Ejemplo:

   $$2^{\frac{7}{4}} : 2^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{7}{4}-\frac{3}{4}} = 2^{\frac{4}{4}} = 2^1 = 2$$

3. $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$

   Ejemplo:

   $$2^{\frac{7}{2}} \cdot 5^{\frac{7}{2}} = (2 \cdot 5)^{\frac{7}{2}} = 10^{\frac{7}{2}}$$

4. $a^m : b^m = (a : b)^m$

   Ejemplo:

   $$3^{\frac{10}{3}} : 5^{\frac{10}{3}} = (3:5)^{\frac{10}{3}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{10}{3}}$$

5. $\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$

   Ejemplo:

   $$\left(6^{1/2}\right)^{\frac{1}{3}} = 6^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 6^{\frac{1}{6}}$$

Usando esta nueva definición podemos aprender otra forma de calcular si dos radicales son equivalentes. Para ello expresamos los radicales en forma exponencial y usaremos el hecho de que dos potencias de exponente fraccionario son equivalentes si tienen igual base y las fracciones de los exponentes son equivalentes.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[q]{a^t} \Leftrightarrow a^{m/n} = a^{t/q} \Leftrightarrow \quad m/n = t/q$$

Ejemplo

a) $\sqrt{4^3} = \sqrt[6]{4^9} \Leftrightarrow 4^{3/2} = 4^{6/9} \Leftrightarrow \quad 3/2 = 9/6$

b) Para ver si $\sqrt{2^8} = \sqrt{2^7}$ lo expresamos en forma de potencia $2^{8/2} = 2^{7/2}$ y como $\frac{8}{2} \neq \frac{7}{2}$ entonces las 2 raíces no son equivalentes.

Al igual que hemos visto en temas anteriores las potencias de exponente fraccionario tienen las siguientes propiedades:

1. $a^m . a^n = a^{m+n}$

Ejemplo:

$$3^{\frac{11}{3}} \cdot 3^{\frac{5}{3}} = 3^{\frac{11}{3}+\frac{5}{3}} = 3^{\frac{16}{3}}$$

2. $a^m : a^n = a^{m-n}$

Ejemplo:

$$2^{\frac{7}{4}} : 2^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{7}{4}-\frac{3}{4}} = 2^{\frac{4}{4}} = 2^1 = 2$$

3. $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$

Ejemplo:

$$2^{\frac{7}{2}} \cdot 5^{\frac{7}{2}} = (2 \cdot 5)^{\frac{7}{2}} = 10^{\frac{7}{2}}$$

4. $a^m : b^m = (a : b)^m$

Ejemplo:

$$3^{\frac{10}{3}} : 5^{\frac{10}{3}} = (3:5)^{\frac{10}{3}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{10}{3}}$$

5. $\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$

Ejemplo:

$$\left(6^{1/2}\right)^{\frac{1}{3}} = 6^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 6^{\frac{1}{6}}$$

A partir de las propiedades de las potencias, tenemos estas propiedades de los radicales:

1. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ ya que $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

   Ejemplo:
   $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{12} = \sqrt[4]{3 \cdot 12}$

2. $\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a : b}$ ya que $\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = a^{\frac{1}{m}} : b^{\frac{1}{m}} = (a : b)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a : b}$

   Ejemplo:
   $\sqrt[5]{4} : \sqrt[5]{6} = \sqrt[5]{4 : 6} = \sqrt[5]{\frac{4}{6}} = \sqrt[5]{\frac{2}{3}}$

3. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ ya que $(\sqrt[n]{a})^m = \left(a^{1/n}\right)^m = a^{\frac{1}{n} \cdot m} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

   Ejemplo:
   $(\sqrt[7]{8})^6 = \sqrt[7]{8^6}$

4. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$ ya que $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \left(a^{1/m}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[n.m]{a}$

   Ejemplo:
   $\sqrt[14]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[14.3]{2} = \sqrt[42]{2}$

SIMPLIFICACIÓN DE RADICALES

Para simplificar los radicales, primero descomponemos el radicando (el número dentro de la $\sqrt{\ }$) y después, si podemos simplificamos, ¿cómo?

1. Sacar números fuera de la raíz. ¿Cómo? los exponentes divididos (:) entre índice de la raíz. Salen fuera números ¿cuántos? Según cociente. Números dentro ¿cuántos? según resto.

   índice

   Ejemplo:
   $\sqrt[3]{41472} = \sqrt[3]{2^9 \cdot 3^4}$ (9 y 4 son exponentes)

   descomponemos en factores

9	3		4	3
0	3		1	1
dentro 2^0	Fuera 2^3		dentro 3^1	Fuera 3^1

   $\sqrt[3]{41472} = \sqrt[3]{2^9 \cdot 3^4} = 2^3 \cdot 3^1 \cdot \sqrt[3]{3}$

A partir de las propiedades de las potencias se pueden obtener las siguientes propiedades de los radicales:

1. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ ya que $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

   Ejemplo:
   $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{12} = \sqrt[4]{3 \cdot 12}$

2. $\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a : b}$ ya que $\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = a^{\frac{1}{m}} : b^{\frac{1}{m}} = (a : b)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a : b}$

   Ejemplo**:**
   $\sqrt[5]{4} : \sqrt[5]{6} = \sqrt[5]{4 : 6} = \sqrt[5]{\frac{4}{6}} = \sqrt[5]{\frac{2}{3}}$

3. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ ya que $(\sqrt[n]{a})^m = \left(a^{1/n}\right)^m = a^{\frac{1}{n} \cdot m} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

   Ejemplo**:**
   $(\sqrt[7]{8})^6 = \sqrt[7]{8^6}$

4. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$ ya que $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \left(a^{1/m}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[n.m]{a}$

   Ejemplo:
   $\sqrt[14]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[14.3]{2} = \sqrt[42]{2}$

SIMPLIFICACIÓN DE RADICALES

Para simplificar radicales, descompondremos en factores el radicando y después realizaremos, si se puede, las siguientes simplificaciones:

2. Extraer factores de la raíz. Para ello dividiremos el exponente de cada factor entre el índice de la raíz. Saldrán tantos factores como indica el cociente y quedan dentro de la raíz tantos factores como indica el resto.

   Ejemplo:
   $\sqrt[3]{41472} = \sqrt[3]{2^9 \cdot 3^4}$

   descomponemos en factores

   $\begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ \hline 0 & 3 \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{r|l} 4 & 3 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$

   quedan 2^0 salen 2^3 $\qquad$ quedan 3^1 salen 3^1

   $\sqrt[3]{41472} = \sqrt[3]{2^9 \cdot 3^4} = 2^3 \cdot 3^1 \cdot \sqrt[3]{3}$

2. Dividir el índice y todos los exponentes de dentro de la raíz (:) entre un mismo número. (A veces no se puede)

Ejemplo:

Para simplificar $\sqrt[6]{2^4 \cdot 5^2}$, yo sé que 6 (índice), 4 y 2 (exponentes) son pares, entonces puedo dividir :2.

$\sqrt[6:2]{2^{4:2} \cdot 5^{2:2}} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 5^1}$

REDUCCIÓN DE RADICALES A INDICE COMÚN

Ya hemos visto que un radical se puede poner en forma $a^{\frac{b}{c}}$. Recuerda que las fracciones se pueden cambiar a otras fracciones con igual denominador (número abajo); las raíces también se pueden cambiar a otras con el mismo índice.

Se hacen estos pasos:

1) $\sqrt[c]{a^b} \rightarrow a^{\frac{b}{c}}$
2) Hacer el m. c. m. de los denominadores (números abajo)
3) Cambiar otra vez de $a^{\frac{b}{c}} \rightarrow \sqrt[c]{a^b}$

Ejemplo:

Yo quiero $\sqrt[5]{4^3}\ y\ \sqrt[2]{7^5}$ con el mismo índice

1º $\sqrt[5]{4^3},\ \sqrt[2]{7^5} \rightarrow 4^{3/5}, 7^{5/2}$

2º $\frac{3}{5}, \frac{5}{2} \rightarrow \frac{(10:5)\cdot 3 = 6}{10}; \frac{(10:2)\cdot 5 = 25}{10} \rightarrow \frac{6}{10}, \frac{25}{10}$

3º Cambio otra vez $\sqrt[10]{4^6}\ y\ \sqrt[10]{7^{25}}$, ya el índice es igual (10).

Hay otra forma.

Si por ejemplo yo tengo $\sqrt[n_1]{a^{m_1}}$ y $\sqrt[n_2]{a^{m_2}}$, y yo quiero el índice igual.

1. Hacer m. c. m. de n_1 y n_2: m. c. m.(n_1 , n_2) = n → índice nuevo.

2. Dividimos n por n_1 y lo multiplicamos por m_1.
(n : n_1) × m_1 = nuevo exponente (número arriba) de a.

3. Dividimos n por n_2 y lo multiplicamos por m_2.
(n : n_2) × m_2 = nuevo exponente (número arriba) de b.

Este método vale para 3 o para más raíces.

2. Dividir índice y todos los exponentes por un mismo número. Esto sólo se puede hacer si el índice y todos los exponentes tienen divisores comunes

   Ejemplo:

   Para simplificar $\sqrt[6]{2^4 \cdot 5^2}$, como el índice (6) y todos los exponentes (4 y 2) son divisibles por 2, podemos dividir índice y exponentes por 2:

   $$\sqrt[6]{2^4 \cdot 5^2} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 5^1}$$

REDUCCIÓN DE RADICALES A INDICE COMÚN

Ya hemos visto que un radical se puede expresar como potencia de exponente fraccionario.

Igual que las fracciones se pueden transformar en otras equivalentes con igual denominador, también las raíces se pueden transformar en otras con el mismo índice.

Para reducir a índice común varias raíces se siguen los siguientes pasos:

1. Se expresan las raíces como potencias de exponente fraccionario.
2. Se transforman las fracciones en otras con igual denominador, haciendo el mínimo común múltiplo de los denominadores.
3. Se vuelven a expresar las potencias como raíces.

   Ejemplo:

   Vamos a expresar las siguientes raíces con índice común: $\sqrt[5]{4^3}$, $\sqrt[2]{7^5}$

   1º $\sqrt[5]{4^3}$, $\sqrt[2]{7^5} \rightarrow 4^{3/5}, 7^{5/2}$

   2º $\frac{3}{5}, \frac{5}{2} \rightarrow \frac{6}{10}, \frac{25}{10}$

   3º volvemos a pasar a radicales $\sqrt[10]{4^6}, \sqrt[10]{7^{25}}$ que como vemos tienen igual índice.

Existe otra forma de reducir radicales a índice común .

Así para trasformar dos radicales $\sqrt[n_1]{a^{m_1}}$ y $\sqrt[n_2]{a^{m_2}}$ a índice común seguiremos los siguientes pasos:

3. Se calcula el m. c. m. de los índices n_1 y n_2: m. c. m.(n_1 , n_2) = n.
   Este número n será el nuevo índice.

4. Dividimos n por n_1 y lo multiplicamos por m_1.
   $(n : n_1) \times m_1$ = nuevo exponente de a.

3. Dividimos n por n_2 y lo multiplicamos por m_2.
   $(n : n_2) \times m_2$ = nuevo exponente de b.

Este método se puede generalizar para tres o más raíces.

Ejemplo:

Yo quiero $\sqrt[5]{4^3}$ *y* $\sqrt[2]{7^5}$ con el índice igual.

1º m. c. m. (5, 2) = 10, índice nuevo
2º (10 : 5) × 3 = 6, nuevo exponente (número arriba) de 4.
3º (10 : 2) × 5 = 25, nuevo exponente (número arriba) de 7.

$\sqrt[5]{4^3}$ y $\sqrt[2]{7^5}$ equivalentes a: $\sqrt[10]{4^6}$ y $\sqrt[10]{7^{25}}$

OPERACIONES CON RADICALES

SUMA

¿La suma se puede hacer siempre? No. Sólo con radicales equivalentes. Para sumar se saca factor común el radical.

$$\boxed{b.\sqrt[n]{\mathbf{a}} + c \cdot \sqrt[n]{\mathbf{a}} = (b+c) \cdot \sqrt[n]{\mathbf{a}}}$$

factor común

Para sumar varios radicales:

1. Simplificar
2. Juntar raíces iguales.

Cuando la raíz no tiene un número delante quiere decir que tiene un 1.

$\sqrt{2} = 1 \cdot \sqrt{2}$

Ejemplos:

a) $\sqrt{2}$ $-3\sqrt{2}$ $+4\sqrt{2}$ $+5\sqrt{2}$ $=$

todos las radicales son iguales ($\sqrt{2}$), entonces sacar factor común $\sqrt{2}$.

$1\ \sqrt{2}\ -3\sqrt{2}\ +4\sqrt{2}\ +5\sqrt{2} = (1 - 3 + 4 + 5) \cdot \sqrt{2} = 7 \cdot \sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16} + \sqrt{4} - \sqrt{9}$

54	2		16	2
27	3		8	2
9	3		4	2
3	3		2	2
1			1	

los radicales son distintos, primero simplificar:

$\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16} + \sqrt{4} - \sqrt{9} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} - \sqrt[3]{2^4} + \sqrt{2^2} - \sqrt{3^2} =$

$3 \cdot \sqrt[3]{2} - 2 \cdot \sqrt[3]{2} + 2 - 3 =$

4	2		9	3
2	2		3	3
1			1	

y juntar raíces iguales:

$(3 - 2) \cdot \sqrt[3]{2} + 2 - 3 = \sqrt[3]{2} - 1$

Ejemplo:

Vamos a expresar las siguientes raíces con índice común: $\sqrt[5]{4^3}$, $\sqrt[2]{7^5}$

1º n = m. c. m. (5, 2) = 10, nuevo índice
2º (10 : 5) × 3 = 6, nuevo exponente de 4.
3º (10 : 2) × 5 = 25, nuevo exponente de 7.

Luego las raíces anteriores serán equivalentes a: $\sqrt[10]{4^6}, \sqrt[10]{7^{25}}$

OPERACIONES CON RADICALES

SUMA

Sólo se podrá efectuar la suma de radicales cuando sean equivalentes, es decir, cuando simplificados tengan el mismo índice y el mismo radicando. Para efectuar la suma se sacará como factor común el radical:

$$\boxed{b.\sqrt[n]{a} + c \cdot \sqrt[n]{a} = (b + c) \cdot \sqrt[n]{a}}$$

Por tanto para sumar varios radicales:

1. Se simplifican las raíces todo lo posible
2. Juntamos las raíces que sean iguales, como se indica en la fórmula.

Ejemplos:

a) $\sqrt{2}$ -3$\sqrt{2}$ + 4$\sqrt{2}$ + 5$\sqrt{2}$ =

Como todos los radicales son iguales, basta con sacar factor común $\sqrt{2}$.

$1\sqrt{2} -3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = (1 - 3 + 4 + 5) \cdot \sqrt{2} = 7 \cdot \sqrt{2}$

Cuando una raíz no tiene un número delante es como si tuviese un 1. Así:

$\sqrt{2} = 1 \cdot \sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16} + \sqrt{4} - \sqrt{9}$

Como los radicales son diferentes, primero expresamos los radicandos descompuestos como producto de factores y simplificamos las raíces:

54	2	16	2
27	3	8	2
9	3	4	2
3	3	2	2
1		1	

4	2	9	3
2	2	3	3
1		1	

$\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16} + \sqrt{4} - \sqrt{9} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} - \sqrt[3]{2^4} + \sqrt{2^2} - \sqrt{3^2} =$
$3 \cdot \sqrt[3]{2} - 2 \cdot \sqrt[3]{2} + 2 - 3 =$

y juntamos las raíces que son iguales:

$(3 - 2) \cdot \sqrt[3]{2} + 2 - 3 = \sqrt[3]{2} - 1$

Recuerda:
$(2^2)^3 = 2^{2\cdot 3} = 2^6$

$(2^6 \cdot 2^6 = 2^{6+6} = 2^{12})$

MULTIPLICACIÓN

Para multiplicar radicales ($\sqrt{\ }$) hay 2 formas, depende:

a) Si los radicales tienen el índice igual, se hace la fórmula:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}}$$

b) Si los radicales tienen el índice distinto, primero se pone el índice igual y después se hace la fórmula.

Siempre al final simplificar.

<u>Ejemplos</u>:

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{6}$ (mismo índice $\rightarrow 3) = \sqrt[3]{2 \cdot 3 \cdot 6} = \sqrt[3]{36}$

b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{4}$

índice distinto, primero se hace el índice común, el m. c. m.:

m. c. m. (2, 3, 4) = 12

$\sqrt{2} = \sqrt[12]{2^6}$; $\sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^4}$; $\sqrt[4]{4} = \sqrt[12]{4^3}$

Entonces:

$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{4} = \sqrt[12]{2^6} \cdot \sqrt[12]{3^4} \cdot \sqrt[12]{4^3} = \sqrt[12]{2^6 \cdot 3^4 \cdot 4^3}$

Ahora simplificamos:

$\sqrt[12]{2^6 \cdot 3^4 \cdot 4^3} = \sqrt[12]{2^6 \cdot 3^4 \cdot (2^2)^3} = \sqrt[12]{2^6 \cdot 3^4 \cdot 2^6} = \sqrt[12]{2^{12} \cdot 3^4} \underset{\text{sacar números}}{=} 2 \cdot \sqrt[12]{3^4} \underset{\text{dividir índice y exponente por 4}}{=} 2 \cdot \sqrt[3]{3}$

DIVISIÓN

Igual que la multiplicación, hay 2 formas:

a) Si los radicales tienen el índice igual, se hace la fórmula:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}}$$

b) Si los radicales tienen distinto el índice, primero se pone el índice igual y después se hace la fórmula.

Al final siempre simplificar.

<u>Ejemplos</u>:

a) $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}}$ (mismo índice $\rightarrow$ 3) $= \sqrt[3]{\dfrac{4}{2}} = \sqrt[3]{2}$

MULTIPLICACIÓN

Para multiplicar radicales tendremos que distinguir dos casos:

a) Si los radicales tienen el mismo índice entonces, usaremos la fórmula:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}}$$

b) Si los radicales tienen distinto índice, hay que reducirlos primero a índice común y ya se puede efectuar la operación de multiplicar como en el apartado a).

Siempre después de efectuar el producto hay que simplificar el resultado.

<u>Ejemplos</u>:

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{2 \cdot 3 \cdot 6} = \sqrt[3]{36}$

b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{4}$

Como no tienen el mismo índice, hallamos primero el índice común, es decir el m. c. m. de los índices:

m. c. m. (2, 3, 4) = 12

Ahora expresamos todas las raíces con índice 12:

$\sqrt{2} = \sqrt[12]{2^6}$; $\sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^4}$; $\sqrt[4]{4} = \sqrt[12]{4^3}$

Entonces:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{4} = \sqrt[12]{2^6} \cdot \sqrt[12]{3^4} \cdot \sqrt[12]{4^3} = \sqrt[12]{2^6 \cdot 3^4 \cdot 4^3}$$

Ahora simplificamos:

$$\sqrt[12]{2^6 \cdot 3^4 \cdot 4^3} = \sqrt[12]{2^6 \cdot 3^4 \cdot \left(2^2\right)^3} = \sqrt[12]{2^{12} \cdot 3^4} = 2 \cdot \sqrt[12]{3^4} = 2 \cdot \sqrt[3]{3}$$

DIVISIÓN

Al igual que en la operación anterior distinguimos dos casos:

a) Si los radicales tienen el mismo índice entonces, usaremos la fórmula:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}}$$

b) Si los radicales tienen distinto índice, hay que reducirlos primero a índice común y ya se puede efectuar la operación de dividir como en el apartado a).

Siempre después de efectuar el cociente hay que simplificar el resultado.

<u>Ejemplos</u>:

a) $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{4}{2}} = \sqrt[3]{2}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{4}}$

el índice es distinto (3 y 4), primero se hace el m. c. m. (3, 4) = 12

$\sqrt[3]{2} = \sqrt[12]{2^4}$; $\sqrt[4]{4} = \sqrt[12]{4^3}$

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{4}} = \frac{\sqrt[12]{2^4}}{\sqrt[12]{4^3}} = \sqrt[12]{\frac{2^4}{4^3}} =$$

simplificar:

Recuerda:
$$\frac{2^4}{2^6} = \frac{1}{2^{6-4}} = \frac{1}{2^2}$$

$$\sqrt[12]{\frac{2^4}{4^3}} = \sqrt[12]{\frac{2^4}{\left(2^2\right)^3}} = \sqrt[12]{\frac{2^4}{2^6}} = \sqrt[12]{\frac{1}{2^2}} = \sqrt[12]{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \text{ (simplificar 12:2=6)} = \sqrt[6]{\frac{1}{2}}$$

POTENCIACIÓN

De un radical, su potencia es = otro radical. Fórmula:

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}}$$

(Es meter el exponente dentro)

Al final simplificar.

Ejemplos:

a) $\left(\sqrt[3]{25}\right)^5 = \sqrt[3]{25^5} = \sqrt[3]{\left(5^2\right)^5} = \sqrt[3]{5^{10}} = 5^3 \cdot \sqrt[3]{5}$

b) $\left(\sqrt{42}\right)^3 = \sqrt{42^3} = \sqrt{(2 \cdot 3 \cdot 7)^3} = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7} = 42 \cdot \sqrt{42}$

RADICACIÓN

Un radical con raíz es = otro radical. Fórmula:

$$\boxed{\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right) = \sqrt[m \cdot n]{a}}$$

Al final simplificar

Ejemplos:

a) $\sqrt{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[2 \cdot 3]{4} = \sqrt[6]{4} = \sqrt[6]{2^2}$ = (simplificar 6:2=3) = $\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{4}}$

Como el índice es distinto, primero expresamos las dos raíces con el mismo índice, es decir el m. c. m. (3, 4) = 12

$\sqrt[3]{2} = \sqrt[12]{2^4}$; $\qquad\qquad$ $\sqrt[4]{4} = \sqrt[12]{4^3}$

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{4}} = \frac{\sqrt[12]{2^4}}{\sqrt[12]{4^3}} = \sqrt[12]{\frac{2^4}{4^3}} =$$

Si simplificamos tenemos:

$$\sqrt[12]{\frac{2^4}{4^3}} = \sqrt[12]{\frac{2^4}{\left(2^2\right)^3}} = \sqrt[12]{\frac{2^4}{2^6}} = \sqrt[12]{\frac{1}{2^2}} = \sqrt[12]{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt[6]{\frac{1}{2}}$$

POTENCIACIÓN

La potencia de un radical es otro radical y se calcula con la fórmula:

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}}$$

Siempre después de efectuar la potenciación hay que simplificar el resultado.

Ejemplos:

a) $\left(\sqrt[3]{25}\right)^5 = \sqrt[3]{25^5} = \sqrt[3]{\left(5^2\right)^5} = \sqrt[3]{5^{10}} = 5^3 \cdot \sqrt[3]{5}$

b) $\left(\sqrt{42}\right)^3 = \sqrt{42^3} = \sqrt{(2 \cdot 3 \cdot 7)^3} = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7} = 42 \cdot \sqrt{42}$

RADICACIÓN

La raíz de un radical es otro radical y se calcula con la fórmula:

$$\boxed{\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right) = \sqrt[m\cdot n]{a}}$$

Siempre después de efectuar el cociente hay que simplificar el resultado.

Ejemplos:

a) $\sqrt{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[6]{4} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}$

Si por ejemplo hay una raíz y dentro un número multiplicado por una raíz ($\sqrt[n]{a\cdot\sqrt[m]{b}}$) también se pueden juntar y poner sólo una $\sqrt{\ }$, ¿cómo? Fórmula.

$$\boxed{\sqrt[n]{a\cdot\sqrt[m]{b}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^m\cdot b}} = \sqrt[n\cdot m]{a^m\cdot b}}$$

Ejemplo:

$$\sqrt{2\cdot\sqrt{3}} = \sqrt{\sqrt{2^2\cdot 3}} = \sqrt[4]{12}$$

RACIONALIZAR

Quiere decir quitar $\sqrt{\ }$ de abajo (denominador). Hay 2 formas:

a) **Abajo (denominador) hay una $\sqrt{\ }$ sóla:** $\sqrt[n]{a^m}$

Si n>m ¿cómo? Multiplicar arriba y abajo por $\sqrt[n]{a^{n-m}}$

$$\boxed{\frac{b}{c\cdot\sqrt[n]{a^m}} = \frac{b\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}{c\cdot\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}} = \frac{b\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}{c\cdot a}}$$

Ejemplos:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

b) $\dfrac{6}{\sqrt[7]{5^3}} = \dfrac{6\cdot\sqrt[7]{5^{(7\cdot 3)}}}{\sqrt[7]{5^3}\,\sqrt[7]{5^{(7-3)}}} = \dfrac{6\sqrt[7]{5^4}}{\sqrt[7]{5^3}\sqrt[7]{5^4}} = \dfrac{6\sqrt[7]{5^4}}{\sqrt[7]{5^7}} = \dfrac{6\sqrt[7]{5^4}}{5}$

Recuerda:

$\sqrt{7^5} = 7^2\cdot\sqrt{7}$ $\quad 5 \,\underline{|\,2}$ $\quad$ 1 (dentro) $\quad$ 2 (fuera)

dentro fuera

$\sqrt{7}\cdot\sqrt{7} = \sqrt[2]{7^2} = 7$

Si n < m, primero simplificar, sacar números fuera de $\sqrt{\ }$ y después hacer la misma fórmula de antes.

Ejemplo:

$$\frac{3}{\sqrt{7^5}} = \frac{3}{7^2\sqrt{7^1}} = \frac{3\sqrt{7}}{7^2.\sqrt{7}\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7^2.7} = \frac{3\sqrt{7}}{343}$$

Si la situación que nos encontramos es del tipo $\sqrt[n]{a \cdot \sqrt[m]{b}}$ podemos también realizar la unión de las dos raíces de la siguiente forma:

$$\boxed{\sqrt[n]{a \cdot \sqrt[m]{b}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^m \cdot b}} = \sqrt[n \cdot m]{a^m \cdot b}}$$

Ejemplo:

$$\sqrt{2 \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{\sqrt{2^2 \cdot 3}} = \sqrt[4]{12}$$

RACIONALIZAR

Racionalizar es quitar la raíz del denominador haciendo los cálculos más convenientes. Vamos a distinguir dos casos:

a) **Cuando en el denominador aparece sólo un radical:** $\sqrt[n]{a^m}$

Para racionalizar si es n es mayor que m entonces el proceso consiste en multiplicar numerador y denominador por $\sqrt[n]{a^{n-m}}$

$$\boxed{\frac{b}{c \cdot \sqrt[n]{a^m}} = \frac{b \cdot \sqrt[n]{a^{n-m}}}{c \cdot \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^{n-m}}} = \frac{b \cdot \sqrt[n]{a^{n-m}}}{c \cdot a}}$$

Ejemplos:

a) $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{6}{\sqrt[7]{5^3}} = \frac{6\sqrt[7]{5^4}}{\sqrt[7]{5^3}\sqrt[7]{5^4}} = \frac{6\sqrt[7]{5^4}}{5}$

Si es n es menor que m entonces primero simplificamos extrayendo fuera de la raíz los factores que podamos y después lo racionalizamos como en el caso anterior.

Ejemplo:

$$\frac{3}{\sqrt{7^5}} = \frac{3}{7^2\sqrt{7^1}} = \frac{3\sqrt{7}}{7^2 . \sqrt{7}\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7^2 . 7} = \frac{3\sqrt{7}}{343}$$

b) **Abajo (denominador) hay** $\sqrt{\ } + \sqrt{\ }$ ó $\sqrt{\ } - \sqrt{\ }$ ó número $\pm\sqrt{\ }$ ó $\sqrt{\ }\pm$ número, etc... (Hay sumas o restas)

Para racionalizar se multiplica arriba (numerador) y abajo (denominador) por el conjugado de abajo (denominador)
¿el conjugado qué es? Cambiar de suma → resta, o de resta → suma

$$\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2} = \frac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$$

$$\frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{c(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{c(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2} = \frac{c(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$$

......

Ejemplos:

a) Racionalizar: $\frac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ el conjugado es $\sqrt{2}-\sqrt{3}$

$$\frac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{6\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)} = \frac{6\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{6\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{2-3} =$$

$$\frac{6\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{-1} = -6\cdot\sqrt{2}+6\cdot\sqrt{3}$$

b) Para racionalizar $\frac{2+\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; $2\cdot\sqrt{2}-\sqrt{3}$ el conjugado es $2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{3}$

$$\frac{2+\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{\left(2+\sqrt{2}\right)\cdot\left(2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(2\cdot\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)} =$$

$$\frac{4\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\left(2\cdot\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} =$$

$$\frac{4\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{4}+\sqrt{6}}{4\cdot 2-3} = \frac{4\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{3}+2\cdot 2+\sqrt{6}}{8-3} =$$

$$\frac{4\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{3}+4+\sqrt{6}}{5}$$

b) **Cuando en el denominador aparecen sumas o diferencias con raíces cuadradas**: $\sqrt{a}+\sqrt{b}$; $\sqrt{a}-\sqrt{b}$; $a+\sqrt{b}$; $\sqrt{a}-b$; ...

Para racionalizar se multiplica numerador y denominador por la expresión conjugada del denominador:

$$\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2}=\frac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$$

$$\frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{c(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{c(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2}=\frac{c(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$$

......

Ejemplos:

a) Vamos a racionalizar: $\frac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

$$\frac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{6\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}=\frac{6\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{6\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{2-3}=$$

$$\frac{6\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{-1}=-6\cdot\sqrt{2}+6\cdot\sqrt{3}$$

b) Para racionalizar $\frac{2+\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

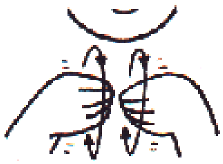
$$\frac{2+\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)\cdot\left(2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(2\cdot\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}=$$

$$\frac{4\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\left(2\cdot\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$\frac{4\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{4}+\sqrt{6}}{4\cdot 2-3}=\frac{4\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{3}+2\cdot 2+\sqrt{6}}{8-3}=$$

$$\frac{4\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{3}+4+\sqrt{6}}{5}$$

PROBLEMAS RESUELTOS


1. Teniendo en cuenta que cualquier expresión decimal periódica, de período cero o distinto de cero, corresponde al desarrollo decimal de un número racional, y sabiendo que $\sqrt{2}$ no es racional ¿ cómo será su desarrollo decimal ?.

Solución:
$\sqrt{2}$ no es racional

Tu sabes que: un número racional, su desarrollo decimal es... ¿cómo? $\rightarrow$ decimal exacto, periódico puro o periódico mixto

Entonces $\sqrt{2}$ su desarrollo decimal es ¿como?: decimal exacto, periódico puro y periódico mixto $\rightarrow$ no puede.

Entonces $\sqrt{2}$ tiene un desarrollo decimal infinito y no periódico.

2. Sabiendo que la raíz cuadrada de un número natural que no sea un cuadrado perfecto es un número irracional (no racional), ¿ qué desarrollo decimal tendrán los números: $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$?

Solución:
El problema dice : $\sqrt{a}$ la solución puede ser dos cosas:
- Número natural.
- Número irracional

$\sqrt{3}$ (calculadora) ¿número natural? $\rightarrow$No. Entonces es irracional y su desarrollo será un número decimal infinito y no periódico.

$\sqrt{4}$ (calculadora) ¿número natural? $\rightarrow$Si. $\sqrt{4} = 2$.

$\sqrt{5}$ (calculadora) ¿número natural? $\rightarrow$No. Entonces es irracional y su desarrollo será un número decimal infinito y no periódico.

$\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$ $\rightarrow$Son números irracionales. Motivo: el desarrollo es un número decimal infinito y no periódico.

$\sqrt{4} = 2$. $\rightarrow$ es natural, entonces es racional. Motivo: los números naturales están dentro de los números racionales.

determinar = decir

3. De las siguientes expresiones decimales, *determina* cuáles corresponden a un número racional y cuáles a un irracional :
a) 3´1416 ; b) 4´373737....... ; c) π = 3´141592......

Solución:
a) 3´1416 tiene FIN $\rightarrow$racional.
b) 4´373737...= $4'\overset{\frown}{37}$ no tiene FIN, pero sí tiene periodo $\rightarrow$ racional
c) π = 3´141592...... no tiene FIN, no tiene periodo $\rightarrow$irracional

margen

Recuerda :
$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

respectivamente = cada uno

Confeccionar = hacer

4. De la expresiones siguientes, determina cuáles dan lugar a un número racional y cuáles a un irracional:

a) $\sqrt{42}$ b) $(5+\sqrt{2})\cdot(5-\sqrt{2})$ c) $7-\pi$

Solución:

a) $\sqrt{42}$ (calculadora) ¿Solución = número natural? $\rightarrow$ No $\rightarrow$ irracional.

b) $(5+\sqrt{2})\cdot(5-\sqrt{2})$ Hacemos la operación (fórmula del *margen*):
$(5+\sqrt{2})\cdot(5-\sqrt{2}) = 5^2 - (\sqrt{2})^2 = 25 - 2 = 23 \rightarrow$ no es irracional $\rightarrow$ es racional.

c) $7-\pi$
π es irracional: no tiene FIN, no tiene periodo entonces $7-\pi \rightarrow$ no tiene FIN, no tiene periodo $\rightarrow 7-\pi$ es irracional.

5. Halla dos números cuyas raíces cuadradas sean, *respectivamente*: 11 y $\frac{9}{4}$.

Solución:
El problema quiere decir :
Busca dos números
El primer número, se llama a, el problema dice: $\sqrt{a} = 11 \rightarrow a = 11^2$, porque $\sqrt{11^2} = 11 \rightarrow a = 11^2 = 121$.

El segundo número, se llama b, el problema dice: $\sqrt{b} = 9/4 \rightarrow b = (9/4)^2$, motivo $\sqrt{(9/4)^2} = 9/4 \rightarrow b = (9/4)^2 = 9^2/4^2 = 81/16$.

6. *Confecciona* una tabla con los cuadrados de los números enteros comprendidos entre 1 y 10. Con ayuda de esta tabla, confecciona otra tabla con los números enteros comprendidos entre 1 y 100, que tengan raíz cuadrada exacta, es decir, que su resultado sea un número entero. Intenta memorizar el mayor número posible.

Solución:

Número	Cuadrado de número
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100

Nº con raíz cuadrada exacta ¿ cuales?
1,4,9,16,...100

motivo : $\sqrt{1} = 1$

$\sqrt{4} = 2$

$\sqrt{9} = 3$

....

$\sqrt{\ }$ es lo contrario de $\uparrow^2$ SIEMPRE

ejemplo: $1^2 = \mathbf{1} \leftrightarrow \sqrt{\mathbf{1}} = 1$

$2^2 = \mathbf{4} \leftrightarrow \sqrt{\mathbf{4}} = 2$

$3^2 = \mathbf{9} \leftrightarrow \sqrt{\mathbf{9}} = 3$

......

Luego la nueva tabla es

Nº raíz exacta	$\sqrt{\ }$
1	1
4	2
9	3
16	4
25	5
36	6
49	7
64	8
81	9
100	10

7. Halla 3 números *cuyas* raíces cúbicas sean, respectivamente: 3; 10 y $\frac{3}{5}$.

cuyas = suyas

Solución:
Buscar tres números:

Primer número, de nombre a, yo quiero que:

$\sqrt[3]{a} = 3 \rightarrow a = 3^3$, porque $\sqrt[3]{3^3} = 3 \rightarrow a = 3^3 = 27$

Segundo número, de nombre b, yo quiero que:

$\sqrt[3]{b} = 10 \rightarrow b = 10^3 = 1000$, porque $\sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{10^3} = 10$

Tercer número, de nombre c, yo quiero que:

$\sqrt[3]{c} = 3/5 \rightarrow c = (3/5)^3 = 27/125$, porque $\sqrt[3]{27/125} = \sqrt[3]{3^3/5^3} = 3/5$

Tu antes has aprendido que $\sqrt{\ }$ es lo contrario de $\uparrow^2$ Ahora aprende que $\sqrt[3]{\ }$ es lo contrario de $\uparrow^3$

Despeja x quiere decir poner x = nº

operación = +, -, ×, :, $\uparrow^2$, $\uparrow^3$, $\uparrow^4$, ..., $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, ...

8. *Despeja x* de cada una de las siguientes igualdades:

a) $x^2 = 16$ b) $x^3 = 27$ c) $\sqrt{x} = 5$ d) $\sqrt{x} = \frac{10}{3}$

Solución:
El problema quiere decir:
x = nombre de un número que tú no conoces, tienes que buscarlo; después cambiar x por el número y ver que nº = nº.

a) $x^2=16$

Busca x = número que cumple: $\uparrow^2$ da 16. Tú sabes que $\sqrt{\ }$ es la *operación* contraria de $\uparrow^2$. Entonces $x = \sqrt{16} = 4$

Comprobación: $4^2 = 16$

b) $x^3 = 27$

Busca x = número, $\uparrow^3$ da 27, $\sqrt[3]{\ }$ es la *operación* contraria de $\uparrow^3$. Entonces $x = \sqrt[3]{27} = 3$

Comprobación: $3^3 = 27$

c) $\sqrt{x} = 5$

Busca x = número, la $\sqrt{\ }$ del número da 5, $\uparrow^2$ es la *operación* contraria de $\sqrt{\ }$. Entonces $x = 5^2 = 25$

Comprobación: $\sqrt{25} = 5$

d) $\sqrt{x} = \frac{10}{3}$

Busca x = número, la $\sqrt{\ }$ del número da $\frac{10}{3}$, $\uparrow^2$ es la *operación* contraria de $\sqrt{\ }$. Entonces $x = \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{100}{9}$

Comprobación: $\sqrt{\frac{100}{9}} = \frac{10}{3}$

9. *Halla* tres números cuya raíz cuarta, quinta y sexta sean, respectivamente: $6, -3$ y $\frac{2}{3}$.

Solución:
Buscar tres números:

El primer número, se llama x, yo quiero que:
$\sqrt[4]{x} = 6 \rightarrow x = 6^4 = 1296$, porque $\sqrt[4]{1296} = \sqrt[4]{6^4} = 6$

Segundo número, su nombre también es x, yo quiero que:

$\sqrt[5]{x} = -3 \rightarrow x = (-3)^5 = -243$, motivo $\sqrt[5]{-243} = \sqrt[5]{(-3)^5} = -3$

Tercer número, de nombre x, yo quiero que:

$\sqrt[6]{x} = 2/3 \rightarrow x = (2/3)^6 = 2^6/3^6 = \frac{64}{729}$, porque $\sqrt[6]{\frac{64}{729}} = \sqrt[6]{2^6/3^6} = \frac{2}{3}$

10. ¿Existe la raíz cuarta de cualquier número? ¿Y la raíz quinta?

radicando = número dentro de la $\sqrt{\ }$

Solución:

Tu has estudiado:

1. Si n es par y el *radicando* es +, hay 2 soluciones.

2. Si n es par y el *radicando* es -, no hay solución.

3. Si n es impar, el número de dentro de la $\sqrt{\ }$ da igual, hay una solución:

   Si el número de dentro de la $\sqrt{\ }$ es +, solución +

   Si el número de dentro de la $\sqrt{\ }$ es -, solución -

n par, a positivo $\rightarrow \sqrt[n]{a} = \pm b$

n par, a negativo $\rightarrow \sqrt[n]{a}$ no existe

n impar, a positivo $\rightarrow \sqrt[n]{a} = +b$

n impar, a negativo $\rightarrow \sqrt[n]{a} = -b$

Entonces:
Raíz cuarta (par) hay sólo de los números positivos
Raíz quinta (impar) hay de todos los números

11. Completa la siguiente tabla, indicando el número de soluciones y su signo, en función de los valores del índice y del signo del radicando:

Radicando→ / Indice↓	**Positivo**	**Negativo**
Par		
Impar		

Solución:
Tu has estudiado ya:

Radicando→ / Indice↓	**Positivo**	**Negativo**
Par	2 soluciones: una positiva y otra negativa	No hay solución
Impar	1 solución positiva	1 solución negativa

previamente = antes

12. Descomponiendo *previamente* el radicando, simplifica índice y exponente:

a) $\sqrt[8]{64}$ b) $\sqrt[9]{27}$

Solución:

a) $\sqrt[8]{64} = \sqrt[8]{2^6} = \sqrt[4]{2^3}$

$\uparrow$: entre 2 índice y exponente

$$\begin{array}{r|l} 64 & 2 \\ 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

descomponer

b) $\sqrt[9]{27} = \sqrt[9]{3^3} = \sqrt[3]{3^1} = \sqrt[3]{3}$

$\uparrow$: entre 3 índice y exponente

$$\begin{array}{r|l} 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

13. Transformándolos previamente en radicales del mismo índice, ordena de menor a mayor:

a) 1, $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[3]{-5}$, -3.

b) $3, \sqrt{18}, \sqrt{7}, 5$

Solución:

Tu debes aprender: Para ordenar números con raíces, ¿qué se hace? 1º.- Poner todos los números en forma de radical. Con raíces de índice igual. 2º.- Ordenar mirando los radicandos (nº dentro de la raíz)

a) 1, $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[3]{-5}$, -3

Primero $\rightarrow$ índice común: 3 (sólo hay 3)

$1 \rightarrow \sqrt[3]{1^3} = \sqrt[3]{1}$

$\sqrt[3]{10} \rightarrow \sqrt[3]{10}$

$\sqrt[3]{-5} \rightarrow \sqrt[3]{-5}$

$-3 \rightarrow \sqrt[3]{(-3)^3} = \sqrt[3]{-27}$

Segundo $\rightarrow$ los radicandos son: 1,10,-5 y –27. Orden... ¿Cuál?

$$-27 < -5 < 1 < 10$$
$$\Downarrow$$
$$\sqrt[3]{-27} < \sqrt[3]{-5} < \sqrt[3]{1} < \sqrt[3]{10}$$
$$\Downarrow$$
$$-3 < \sqrt[3]{-5} < 1 < \sqrt[3]{10}$$

b) $3, \ \sqrt{18}, \ \sqrt{7}, \ 5$

Recuerda:

$\sqrt{\ } = \sqrt[2]{\ }$

Primero $\rightarrow$ índice común: 2(sólo hay 2)

$3 \rightarrow \sqrt{3^2} = \sqrt{9}$

$\sqrt{18} \rightarrow \sqrt{18}$

$\sqrt{7} \rightarrow \sqrt{7}$

$5 \rightarrow \sqrt{5^2} = \sqrt{25}$

Segundo $\rightarrow$ los radicandos son: 9; 18; 7 y 25. Orden... ¿Cuál?

$$7 < 9 < 18 < 25$$
$$\Downarrow$$
$$\sqrt{7} < \sqrt{9} < \sqrt{18} < \sqrt{25}$$
$$\Downarrow$$
$$\sqrt{7} < 3 < \sqrt{18} < 5$$

14. *Transforma*, los siguientes grupos de radicales, en radicales equivalentes con índice común:

Transformar = cambia

a) $2, \ \sqrt{2}, \ \sqrt[3]{2}, \ \sqrt[6]{2}$. b) $\sqrt[3]{5}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[6]{3}, \sqrt[12]{2}$.

Solución:

a) $2, \ \sqrt{2}, \ \sqrt[3]{2}, \ \sqrt[6]{2}$.

Los índices son 2, 3 y 6

El índice común = m. c. m. (2, 3, 6) = 6

$2 = \sqrt[6]{2^6} = \sqrt[6]{64}$

$\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}$ $\xrightarrow{\text{explicación}}$ $6 : 2 = 3 \text{ x } 1 = 3$

$\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{4}$

$\sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{2}$ $\qquad \sqrt{2} = \sqrt[2]{2^1} \qquad \sqrt[6]{2^3}$

Entonces

$2, \ \sqrt{2}, \ \sqrt[3]{2}, \ \sqrt[6]{2}. \ \rightarrow \ \sqrt[6]{64}, \sqrt[6]{8}, \sqrt[6]{4}, \sqrt[6]{2}$

b) $\sqrt[3]{5}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[6]{3}, \sqrt[12]{2}$

Índices: 3, 4, 6 y 12

Índice común = m. c. m. (3, 4, 6, 12) = 12

$\sqrt[3]{5} = \sqrt[12]{5^4} = \sqrt[12]{625}$

$\sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{2^3} = \sqrt[12]{8}$

$\sqrt[6]{3} = \sqrt[12]{3^2} = \sqrt[12]{9}$

$\sqrt[12]{2} = \sqrt[12]{2}$

Entonces

$\sqrt[3]{5}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[6]{3}, \sqrt[12]{2}. \ \rightarrow \ \sqrt[12]{625}, \sqrt[12]{8}, \sqrt[12]{9}, \sqrt[12]{2}$

Extraer = sacar fuera

15. *Extraer* todos los factores posibles de los siguientes radicales:

a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt{27}$ c) $\sqrt[3]{81}$ d) $\sqrt{a^5 \cdot b^6 \cdot c^{27}}$

Solución:

a) $\sqrt{8}$

8	2
4	2
2	2
1	

2, 2, 2 hay 3, para ver cuantos se sacan fuera, ¿qué se hace?
DIVIDIR EXPONENTE ENTRE EL ÍNDICE

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2^1.\sqrt{2}$$

$$\begin{array}{l|l} 3 & 2 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$$

b) $\sqrt{27}$

27	3
9	3
3	3
1	

$$\sqrt{27} = \sqrt{3^3} = 3^1.\sqrt{3}$$

c) $\sqrt[3]{81}$

81	3
27	3
9	3
3	3
1	

$$\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^4} = 3^1 \cdot \sqrt[3]{3^1} = 3 \cdot \sqrt[3]{3}$$

$$\begin{array}{l|l} 4 & 3 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$$

d) $\sqrt{a^5 \cdot b^6 \cdot c^{27}}$

Para ver cuántas **a** puedo sacar fuera, ¿qué se hace?

$$\begin{array}{l|l} 5 & 2 \\ \hline 1 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow \textbf{a} \text{ salen } 2 : a^2 \\ \longrightarrow \textbf{a} \text{ dentro } 1 : a^1 \end{array}$$

Para ver cuántas **b** puedo sacar, ¿qué se hace?

$$\begin{array}{l|l} 6 & 2 \\ \hline 0 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow \textbf{b} \text{ salen } 3 : b^3 \\ \longrightarrow \textbf{b} \text{ dentro } 0 : b^0 \end{array}$$

Para ver cuántas **c** puedo sacar, ¿qué se hace?

$$\begin{array}{l|l} 27 & 2 \\ \hline 1 & 13 \end{array} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow \textbf{c} \text{ salen } 13 : c^{13} \\ \longrightarrow \textbf{c} \text{ dentro } 1 : c^1 \end{array}$$

$$\sqrt{a^5 \cdot b^6 \cdot c^{27}} = a^2 \cdot b^3 \cdot c^{13} \cdot \sqrt{a^1 \cdot b^0 \cdot c^1} = a^2 \cdot b^3 \cdot c^{13} \cdot \sqrt{a \cdot c}$$

16. *Introduce* los factores dentro del radical y ordena de menor a mayor $2 \cdot \sqrt{3}$, $\sqrt{18}$.

Introducir = meter

Solución:

Recuerda:
Para meter factores en la raíz, ¿qué se hace?
MULTIPLICAR ÍNDICE × EXPONENTE

$2 \cdot \sqrt{3}$

queremos meter 2 dentro de la $\sqrt{}$:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Exponente de 2, no hay} \rightarrow 1 \\ \text{Índice de la } \sqrt{} \text{, no hay} \rightarrow 2 \end{array}\right\} \text{Nuevo exponente de 2} \rightarrow 1 \times 2 = 2$$

recuerda:

si no hay exponente entonces el exponente = 1

si no hay índice, entonces el índice = 2

$$2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{12}$$

Para ordenar $\sqrt{12}$, $\sqrt{18}$

los índices son iguales, entonces ordenar los radicales (número dentro de la raíz)

$$\begin{array}{c} 12 < 18 \\ \Downarrow \\ \sqrt{12} < \sqrt{18} \\ \Downarrow \\ 2 \cdot \sqrt{3} < \sqrt{18} \end{array}$$

17. Realiza las siguientes operaciones con radicales y simplifica todo lo posible:

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{36}\cdot\sqrt{18}$ b) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{6}$ c) $3\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}\cdot4\cdot\sqrt{20}$

Solución:

Tú sabes:

Para **multiplicar** ¿qué se hace?

a) Si los radicales tienen el índice igual, hacemos la fórmula: $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$

b) Si los radicales tienen el índice distinto, primero ponemos el índice igual y después hacemos la fórmula.

Siempre al final simplificar.

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{36}\cdot\sqrt{18}$

Índice igual → YA. Entonces hacemos la fórmula

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{36}\cdot\sqrt{18}=\sqrt{2\cdot36\cdot18}$

Ahora simplificar. Primero descomponer en factores

$$\begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\sqrt{2\cdot36\cdot18}=\sqrt{2\cdot2^2\cdot3^2\cdot2\cdot3^2}=\sqrt{2^4\cdot3^4}\underset{\uparrow}{=}2^2\cdot3^2=36$$

dividir índice y exponente: 2

b) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{6}$

Índice igual → YA. Entonces hacemos la fórmula

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{2\cdot\pi\cdot6}$

Ahora simplificar.

$$\sqrt{2\cdot\pi\cdot6}=\sqrt{2\cdot\pi\cdot2\cdot3}=\sqrt{2^2\cdot\pi\cdot3}=2\cdot\sqrt{\pi\cdot3}$$

c) $3\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}\cdot4\cdot\sqrt{20}$

Hay números y $\sqrt{\ }$. ¿Qué se hace?

Multiplicamos los números juntos: $3\cdot4$

y las $\sqrt{\ }$ juntas: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{20}$

Después juntar

$3\cdot4=12$

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{20}=\sqrt{2\cdot8\cdot20}=\sqrt{2\cdot2^3\cdot2^2\cdot5}=\sqrt{2^6\cdot5}=2^3\cdot\sqrt{5}=8\cdot\sqrt{5}$$

$12\cdot8\cdot\sqrt{5}=96\cdot\sqrt{5}$

18. Realiza las siguientes operaciones con radicales y simplifica todo lo posible:

a) $\dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{3}}$

Solución:

Tú sabes:

Para **dividir** ¿qué se hace?

a) Si los radicales tienen el índice igual, hacemos la fórmula: $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b}$

b) Si los radicales tienen distinto índice, primero ponemos los índices iguales y después hacemos la fórmula.

Al final siempre simplificar.

a) $\dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$

Índice igual → Ya. Entonces hacemos la fórmula

$$\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{48}{3}} = \sqrt{16} = \sqrt{2^4} = 2^2 = 4$$

b) $$\frac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[4]{\frac{48}{3}} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$$

19. Realiza las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{48}}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{18\cdot\sqrt{18}}{9\cdot\sqrt{2}}$

Solución:

Ahora multiplicar y dividir. ¿Qué se hace?

1º: índice común

2º: juntar radicandos (números dentro de la raíz)

a) $\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{48}}{\sqrt{2}}$

1º: índice común → YA

2º: juntar radicandos

$$\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{48}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3\cdot 48}{2}} = \sqrt{72} = \sqrt{2^3\cdot 3^2} = 2\cdot 3\cdot\sqrt{2} = 6\cdot\sqrt{2}$$

b) $\dfrac{18\cdot\sqrt{18}}{9\cdot\sqrt{2}}$

Hay números y $\sqrt{\ }$. Hacer:

Números juntos: $\dfrac{18}{9}=2$

$\sqrt{\ }$ juntas: $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{18}{2}}=\sqrt{9}=3$

$$\frac{18\cdot\sqrt{18}}{9\cdot\sqrt{2}}=\frac{18}{9}\cdot\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}=2\cdot3=6$$

20. Realiza las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[4]{3}}{\sqrt{5}}$.

Solución:

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}$

Primero: índice común. m. c. m. (2, 3) = 6

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{3^3}\cdot\sqrt[6]{3^2}$$

Segundo: fórmula

$$\sqrt[6]{3^3}\cdot\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{3^3\cdot3^2}=\sqrt[6]{3^5}=\sqrt[6]{243}$$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[4]{3}}{\sqrt{5}}$

Primero: índice común. m. c. m. (3, 4, 2) = 12

$$\frac{\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[4]{3}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt[12]{6^4}\cdot\sqrt[12]{3^3}}{\sqrt[12]{5^6}}$$

Segundo: fórmula

$$\frac{\sqrt[12]{6^4}\cdot\sqrt[12]{3^3}}{\sqrt[12]{5^6}}=\sqrt[12]{\frac{6^4\cdot3^3}{5^6}}=\sqrt[12]{\frac{(2\cdot3)^4\cdot3^3}{5^6}}=\sqrt[12]{\frac{2^4\cdot3^4\cdot3^3}{5^6}}=\sqrt[12]{\frac{2^4\cdot3^7}{5^6}}$$

21. *Aplicando* la propiedad correspondiente, expresa mediante un sólo radical y simplifica lo posible:

a) $\sqrt{\sqrt[3]{9}}$ b) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[5]{64}}}$

Solución:

Tú sabes: $\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)=\sqrt[m\cdot n]{a}$

a) $\sqrt{\sqrt[3]{9}} \underset{\uparrow}{=} \sqrt[6]{9} = \sqrt[6]{3^2} \underset{\uparrow}{=} \sqrt[3]{3}$

$2 \cdot 3$: 2 índice y exponente

b) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[5]{64}}} \underset{\uparrow}{=} \sqrt[30]{64} = \sqrt[30]{2^6} \underset{\uparrow}{=} \sqrt[5]{2}$

$2 \cdot 3 \cdot 5$: 6 índice y exponente

22. Racionalizar el denominador de las siguientes fracciones:

a) $\dfrac{3}{\sqrt{6}}$ b) $\dfrac{2}{3\cdot\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt[5]{5}}$ d) $\dfrac{3\cdot\sqrt[4]{2}}{2\cdot\sqrt[6]{2}}$

Solución:

> Recuerda:
>
> RACIONALIZAR Quiere decir quitar $\sqrt{\ }$ de abajo.
>
> Si abajo hay una $\sqrt{\ }$ sola: $\sqrt[n]{a^m}$ con n > m ¿cómo se quita?:
>
> Multiplicando arriba (numerador) y abajo (denominador) por $\sqrt[n]{a^{n-m}}$:
>
> $$\frac{b}{c\cdot\sqrt[n]{a^m}} = \frac{b\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}{c\cdot\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}} = \frac{b\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}{c\cdot a}$$

a) $$\frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{3\cdot\sqrt{6}}{6} \underset{\uparrow}{=} \frac{\sqrt{6}}{2}$$

: 3 numerador y denominador

b) $$\frac{2}{3\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3\cdot 2} \underset{\uparrow}{=} \frac{\sqrt{2}}{3}$$

: 2 numerador y denominador

c) $$\frac{\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt[5]{5}} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{5^4}}{2\cdot\sqrt[5]{5}\cdot\sqrt[5]{5^4}} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{5^4}}{2\cdot\sqrt[5]{5^5}} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{5^4}}{2\cdot 5} \underset{\uparrow}{=} \frac{\sqrt[10]{3^5}\cdot\sqrt[10]{5^8}}{10} = \frac{\sqrt[10]{3^5\cdot 5^8}}{10}$$

hacemos el producto de $\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{5^4}$ $\rightarrow$ hacer m. c. m. para $\sqrt{\ }$ iguales

d) $$\frac{3\cdot\sqrt[4]{2}}{2\cdot\sqrt[6]{2}} = \frac{3\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[6]{2^5}}{2\cdot\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[6]{2^5}} = \frac{3\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[6]{2^5}}{2\cdot\sqrt[6]{2^6}} \underset{\uparrow}{=} \frac{3\cdot\sqrt[12]{2^3}\cdot\sqrt[12]{2^{10}}}{2\cdot 2} = \frac{3\cdot\sqrt[12]{2^{13}}}{4} \underset{\uparrow}{=}$$

hacemos el producto $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[6]{2^5}$ simplificamos

$$\frac{3\cdot 2\cdot\sqrt[12]{2}}{4} = \frac{3\cdot\sqrt[12]{2}}{2}$$

¿*Qué nos indican?* = ¿qué quiere decir?

23. Con ayuda de una calculadora, comprueba si son ciertas las siguientes igualdades, dando distintos valores a a y b: $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$ y $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{a-b}$. ¿*Qué nos indican* estos resultados?

Solución:
El problema dice: Tú inventa dos números que se llaman a y b.
Ejemplo: a = 9; b = 16.
Después cambia a por 9 y b por 16 y prueba si la fórmula está bien o mal

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$$
$$\Downarrow$$
$$\sqrt{9}+\sqrt{16}=\sqrt{9+16}$$
$$\Downarrow$$
$$3+4=5$$

MAL. FÓRMULA FALSA

Ahora haces lo mismo con la fórmula $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{a-b}$.
Ejemplo: a y b los mismos de antes

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{a-b}$$
$$\Downarrow$$
$$\sqrt{9}-\sqrt{16}=\sqrt{9-16}$$
$$\Downarrow$$
$$3-4=\sqrt{-7}$$
$$\Downarrow$$
$$-1=\sqrt{-7}$$

MAL. FÓRMULA FALSA

24. Calcula y simplifica:

a) $3\sqrt{8}-2\sqrt{50}+8\sqrt{32}$

b) $\sqrt[3]{81}-\sqrt{8}+\sqrt[3]{24}+\sqrt{36}+\sqrt{72}$

c) $3\sqrt{24}-\frac{1}{4}\sqrt{48}+2\sqrt{54}+\frac{5}{3}\sqrt{243}$

d) $\frac{4}{\sqrt{2}}+5\sqrt{32}-\sqrt[6]{8}$

e) $\frac{2}{\sqrt{50}}-\frac{5}{\sqrt{18}}$

Solución:

Tú sabes:
Para sumar varios radicales:
1. simplificar
2. Juntar raíces iguales: $\mathbf{b.\sqrt[n]{a}+c\cdot\sqrt[n]{a}=(b+c)\cdot\sqrt[n]{a}}$

a) $3\sqrt{8}-2\sqrt{50}+8\sqrt{32}=$

$3\sqrt{2^3}-2\sqrt{2\cdot 5^2}+8\sqrt{2^5}=$

$3\cdot 2\cdot\sqrt{2}-2\cdot 5\cdot\sqrt{2}+8\cdot 2^2\cdot\sqrt{2}=$

$6\cdot\sqrt{2}$ - $10\cdot\sqrt{2}$ + $32\cdot\sqrt{2}$ =
$(6 - 10 + 32)\cdot\sqrt{2} =$
$28\cdot\sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{81}-\sqrt{8}+\sqrt[3]{24}+\sqrt{36}+\sqrt{72}=$
$\sqrt[3]{3^4}-\sqrt{2^3}+\sqrt[3]{3\cdot 2^3}+\sqrt{2^2\cdot 3^2}+\sqrt{2^3\cdot 3^2}=$
$3\cdot\sqrt[3]{3}-2\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt[3]{3}+2\cdot 3+2\cdot 3\cdot\sqrt{2}=$
$3\cdot\sqrt[3]{3}-2\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt[3]{3}+6+6\cdot\sqrt{2}=$
$(3+2)\cdot\sqrt[3]{3}+(-2+6)\cdot\sqrt{2}+6=$
$5\cdot\sqrt[3]{3}+4\cdot\sqrt{2}+6$

c) $3\sqrt{24}-\frac{1}{4}\sqrt{48}+2\sqrt{54}+\frac{5}{3}\sqrt{243}=$
$3\sqrt{3\cdot 2^3}-\frac{1}{4}\sqrt{2^4\cdot 3}+2\sqrt{2\cdot 3^3}+\frac{5}{3}\sqrt{3^5}=$
$3\cdot 2\cdot\sqrt{3\cdot 2}-\frac{1}{4}\cdot 2^2\cdot\sqrt{3}+2\cdot 3\cdot\sqrt{2\cdot 3}+\frac{5}{3}\cdot 3^2\cdot\sqrt{3}=$
$6\cdot\sqrt{6}-\frac{1}{4}\cdot 4\cdot\sqrt{3}+6\cdot\sqrt{6}+\frac{5}{3}\cdot 9\cdot\sqrt{3}=$
$6\cdot\sqrt{6}-\frac{4}{4}\cdot\sqrt{3}+6\cdot\sqrt{6}+\frac{45}{3}\cdot\sqrt{3}=$
$6\cdot\sqrt{6}-1\cdot\sqrt{3}+6\cdot\sqrt{6}+15\cdot\sqrt{3}=$
$(6+6)\cdot\sqrt{6}+(-1+15)\cdot\sqrt{3}=$
$12\cdot\sqrt{6}+14\cdot\sqrt{3}$

d) $\frac{4}{\sqrt{2}}+5\sqrt{32}-\sqrt[6]{8}$

Recuerda:
Si hay raíces en el denominador, entonces 1º RACIONALIZAR

$$\frac{4}{\sqrt{2}}=\frac{4\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{4\cdot\sqrt{2}}{2}=2\cdot\sqrt{2}$$

Ahora se hace la operación cambiando $\frac{4}{\sqrt{2}}$ por $2\cdot\sqrt{2}$

$\frac{4}{\sqrt{2}}+5\sqrt{32}-\sqrt[6]{8}=$
$2\cdot\sqrt{2}+5\sqrt{2^5}-\sqrt[6]{2^3}=$
$2\cdot\sqrt{2}+5\cdot 2^2\cdot\sqrt{2}-\sqrt{2}=$
$2\cdot\sqrt{2}+20\cdot\sqrt{2}-\sqrt{2}=$
$(2+20-1)\cdot\sqrt{2}=$
$21\cdot\sqrt{2}$

e) $\dfrac{2}{\sqrt{50}} - \dfrac{5}{\sqrt{18}}$

Primero racionalizar

$$\frac{2}{\sqrt{50}} = \frac{2\cdot\sqrt{50}}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{50}} = \frac{2\cdot\sqrt{50}}{\sqrt{50^2}} = \frac{2\cdot\sqrt{50}}{50} = \frac{2\cdot\sqrt{2\cdot 5^2}}{50} = \frac{2\cdot 5\cdot\sqrt{2}}{50} = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

$$\frac{5}{\sqrt{18}} = \frac{5\cdot\sqrt{18}}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{18}} = \frac{5\cdot\sqrt{18}}{\sqrt{18^2}} = \frac{5\cdot\sqrt{18}}{18} = \frac{5\cdot\sqrt{2\cdot 3^2}}{18} = \frac{5\cdot 3\cdot\sqrt{2}}{18} = \frac{5\sqrt{2}}{6}$$

Ahora hacer

$$\frac{2}{\sqrt{50}} - \frac{5}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{2}}{5} - \frac{5\sqrt{2}}{6} = \frac{6\sqrt{2} - 25\sqrt{2}}{30} = \frac{-19\sqrt{2}}{30}$$

25. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$ b) $\sqrt{\sqrt[4]{36}}$ c) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{3}}\right)^{18}$

d) $\dfrac{2\cdot\sqrt{8}-5}{3\sqrt{2}}$ e) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}$.

Solución:

a) $\dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{10}} =$ $3\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} =$ $3\cdot\sqrt{\dfrac{5}{10}} =$ $3\cdot\sqrt{\dfrac{1}{2}} =$ $3\cdot\dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} =$ $3\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} =$ $3\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} =$ $3\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} =$ $\dfrac{3\cdot\sqrt{2}}{2}$	b) $\sqrt{\sqrt[4]{36}} =$ $\sqrt[8]{36} =$ $\sqrt[8]{2^2\cdot 3^2} =$ $\sqrt[4]{2\cdot 3} =$ $\sqrt[4]{6}$	c) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{3}}\right)^{18} =$ $\left(\sqrt[6]{3}\right)^{18} =$ $\sqrt[6]{3^{18}} =$ índice y exponente : 6 $= 3^3 = 27$

d) $\dfrac{2\cdot\sqrt{8}-5}{3\sqrt{2}}=$ $\dfrac{\left(2\cdot\sqrt{8}-5\right)\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\sqrt{2}}=$ $\dfrac{2\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}-5\sqrt{2}}{3\cdot 2}=$ $\dfrac{2\cdot\sqrt{16}-5\sqrt{2}}{6}=$ $\dfrac{2\cdot 4-5\sqrt{2}}{6}=$ $\dfrac{8-5\sqrt{2}}{6}$	e) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}=$ $\sqrt[12]{a^6}\cdot\sqrt[12]{a^8}\cdot\sqrt[12]{a^9}=$ $\sqrt[12]{a^6\cdot a^8\cdot a^9}=$ $\sqrt[12]{a^{23}}=$ $a\cdot\sqrt[12]{a^{11}}$

26. Racionaliza el denominador y simplifica:

a) $\dfrac{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ b) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}}$

c) $\dfrac{\sqrt{3+x}}{\sqrt{3-x}}$ d) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt[8]{81}}$

Solución:

> Recuerda:
>
> Para racionalizar si abajo (denominador) hay $\sqrt{\ }+\sqrt{\ }$ ó $\sqrt{\ }-\sqrt{\ }$ ó número $\pm\sqrt{\ }$ ó $\sqrt{\ }\pm$ número, etc... (Hay sumas o restas), se multiplica arriba (numerador) y abajo (denominador) por el conjugado del denominador.
>
> ¿ el conjugado qué es? Cambiar de suma → resta o de resta → suma
>
> $$\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2}=\frac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$$
>
> $$\frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{c(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{c(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2}=\frac{c(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$$
>
> .....

a) $$\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}=\frac{\left(2\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(3\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)}{\left(3\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\cdot\left(3\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)}=\frac{\left(2\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(3\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)}{\left(3\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=$$

$$\frac{\left(2\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(3\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)}{3^2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{2\cdot 3\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}-3\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}{9\cdot 2-5}$$

$$=\frac{6\cdot\sqrt{10}+2\cdot\sqrt{25}-3\cdot\sqrt{4}-\sqrt{10}}{18-5}=\frac{5\cdot\sqrt{10}+2\cdot 5-3\cdot 2}{13}=\frac{5\cdot\sqrt{10}+4}{13}$$

Recuerda:
Hay fórmulas importantes que dicen:
a · (b + c + ...) = a · b + a · c + ...

(a + b) · (a - b) = $a^2 - b^2$

$(a + b)^2 =$ $a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b$

$(a - b)^2 =$ $a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b$

(a + b) · (c + d) = a · c + a · d + b · c + b · d

....

b) $$\frac{1-\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}} = \frac{\left(1-\sqrt{3}\right)\cdot\left(4+2\sqrt{3}\right)}{\left(4-2\sqrt{3}\right)\cdot\left(4+2\sqrt{3}\right)} = \frac{\left(1-\sqrt{3}\right)\cdot\left(4+2\sqrt{3}\right)}{4^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2} =$$

$$\frac{4+2\sqrt{3}-4\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{3}}{16-2^2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{4+2\sqrt{3}-4\sqrt{3}-2\sqrt{3^2}}{16-4\cdot 3} =$$

$$\frac{4+2\sqrt{3}-4\sqrt{3}-2\cdot 3}{16-12} = \frac{4+2\sqrt{3}-4\sqrt{3}-6}{4} = \frac{-2-2\sqrt{3}}{4} =$$

$$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$$

c) $$\frac{\sqrt{3+x}}{\sqrt{3-x}}$$

Aquí hay + y - pero dentro de la $\sqrt{\ }$, entonces la fórmula de antes no vale, se hace como el problema 22.

$$\frac{\sqrt{3+x}}{\sqrt{3-x}} = \frac{\sqrt{3+x}\cdot\sqrt{3-x}}{\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{3-x}} = \frac{\sqrt{(3+x)\cdot(3-x)}}{\sqrt{(3-x)^2}} = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3-x}$$

d) $$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt[8]{81}}$$

En el denominador (abajo) hay 2 $\sqrt{\ }$ pero multiplicando, entonces es igual que el problema 22

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt[8]{81}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3^3}\cdot\sqrt[8]{3^4}} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[8]{3^4}}{\sqrt[4]{3^3}\cdot\sqrt[8]{3^4}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[8]{3^4}} =$$

$$\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[8]{3^4}}{\sqrt[4]{3^4}\cdot\sqrt[8]{3^8}} = \frac{\sqrt[8]{3^4}\cdot\sqrt[8]{3^2}\cdot\sqrt[8]{3^4}}{3\cdot 3} = \frac{\sqrt[8]{3^{10}}}{9} = \frac{3\sqrt[8]{3^2}}{9} = \frac{\sqrt[4]{3}}{3}$$

27. Calcula y simplifica:

a) $\left(2\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{6}+4\sqrt{3}-\sqrt{2}$

b) $\left(2\sqrt{5}+4\right)\cdot\left(4-2\sqrt{5}\right)$

c) $\left(2\sqrt{2}-4\sqrt{8}+6\sqrt{50}\right)\cdot\sqrt{2}-8$

d) $3-\left(4\sqrt{5}\right)^2+5\sqrt{3^2}-2\left(\sqrt{3}-1\right)$

e) $2\sqrt{48}+\dfrac{14}{5}\sqrt{1+\dfrac{26}{49}}-\sqrt{12}-\dfrac{9}{4}\sqrt{1-\dfrac{33}{81}}$

f) $\sqrt[3]{\sqrt{32}}\cdot\sqrt{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}$

g) $\dfrac{\sqrt{81\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3\sqrt[3]{9\sqrt[6]{27}}}}{\sqrt[6]{9\sqrt[4]{81}}}$

h) $\sqrt[3]{3\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{81}}$

Solución:

a) $\left(2\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{6}+4\sqrt{3}-\sqrt{2}=$

$2\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}-3\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}+4\sqrt{3}-\sqrt{2}=$

$2\sqrt{12}-3\sqrt{18}+4\sqrt{3}-\sqrt{2}=$

$2\sqrt{2^2\cdot 3}-3\sqrt{2\cdot 3^2}+4\sqrt{3}-\sqrt{2}=$

$2\cdot 2\cdot\sqrt{3}-3\cdot 3\cdot\sqrt{2}+4\sqrt{3}-\sqrt{2}=$

$4\cdot\sqrt{3}-9\cdot\sqrt{2}+4\sqrt{3}-\sqrt{2}=$

$(4+4)\cdot\sqrt{3}+(-9-1)\cdot\sqrt{2}=$

$8\cdot\sqrt{3}-10\cdot\sqrt{2}$

b) $\left(2\sqrt{5}+4\right)\cdot\left(4-2\sqrt{5}\right)=$

$\left(4+2\sqrt{5}\right)\cdot\left(4-2\sqrt{5}\right)=$ HAY UNA FÓRMULA IMPORTANTE

$4^2-\left(2\sqrt{5}\right)^2=$

$16-2^2\left(\sqrt{5}\right)^2=$

$16-4\cdot 5=16-20=-4$

c) $\left(2\sqrt{2}-4\sqrt{8}+6\sqrt{50}\right)\cdot\sqrt{2}-8$

$2\sqrt{2}\sqrt{2}-4\sqrt{8}\sqrt{2}+6\sqrt{50}\cdot\sqrt{2}-8=$

$2\sqrt{4}-4\sqrt{16}+6\sqrt{100}-8=$

$2\cdot 2-4\cdot 4+6\cdot 10-8=$

$4-16+60-8=40$

d) $3-\left(4\sqrt{5}\right)^2+5\sqrt{3^2}-2\left(\sqrt{3}-1\right)=$

$3-4^2\cdot\left(\sqrt{5}\right)^2+5\cdot 3-2\sqrt{3}+2=$

$3-16\cdot 5+15-2\sqrt{3}+2=$

$3-80+15-2\sqrt{3}+2=$

$-60-2\sqrt{3}$

e) $2\sqrt{48}+\frac{14}{5}\sqrt{1+\frac{26}{49}}-\sqrt{12}-\frac{9}{4}\sqrt{1-\frac{33}{81}}=$

$2\sqrt{48}+\frac{14}{5}\sqrt{\frac{75}{49}}-\sqrt{12}-\frac{9}{4}\sqrt{\frac{48}{81}}=$

$2\sqrt{2^4\cdot 3}+\frac{14}{5}\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{49}}-\sqrt{2^2\cdot 3}-\frac{9}{4}\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{81}}=$

$2\cdot 2^2\cdot\sqrt{3}+\frac{14}{5}\frac{\sqrt{3\cdot 5^2}}{7}-2\sqrt{3}-\frac{9}{4}\frac{\sqrt{2^4\cdot 3}}{9}=$

$8\cdot\sqrt{3}+\frac{14}{5}\frac{5\cdot\sqrt{3}}{7}-2\sqrt{3}-\frac{9}{4}\frac{2^2\cdot\sqrt{3}}{9}=$

$8\cdot\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{3}-2\sqrt{3}-\sqrt{3}=7\cdot\sqrt{3}$

$1+\frac{26}{49}=\frac{75}{49}$

$1-\frac{33}{81}=\frac{48}{81}$

f) $\sqrt[3]{\sqrt{32}} \cdot \sqrt{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} =$

$\sqrt[6]{32} \cdot \sqrt{\sqrt{2^2 \cdot 2}} \cdot \sqrt{2} =$

$\sqrt[6]{2^5} \cdot \sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt{2} =$

$\sqrt[12]{2^{10}} \cdot \sqrt[12]{2^9} \cdot \sqrt[12]{2^6} =$

$\sqrt[12]{2^{25}} =$

$2^2 \cdot \sqrt[12]{2} =$

$4 \cdot \sqrt[12]{2}$

g) $\dfrac{\sqrt{81\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3\sqrt[3]{9\sqrt[6]{27}}}}{\sqrt[6]{9\sqrt[4]{81}}} =$

$\dfrac{\sqrt{3^4 \cdot \sqrt{3}} \cdot \sqrt{3\sqrt[3]{3^2\sqrt[6]{3^3}}}}{\sqrt[6]{3^2\sqrt[4]{3^4}}} =$

$\dfrac{\sqrt{\sqrt{3^8 \cdot 3}} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{3^3 \cdot 3^2\sqrt[6]{3^3}}}}{\sqrt[6]{3^2 \cdot 3}} =$

$\dfrac{\sqrt[4]{3^9} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{3^5\sqrt[6]{3^3}}}}{\sqrt[6]{3^3}} =$

$\dfrac{\sqrt[4]{3^9} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[6]{3^{30} \cdot 3^3}}}}{\sqrt[6]{3^3}} =$

$\dfrac{\sqrt[4]{3^9} \cdot \sqrt[36]{3^{33}}}{\sqrt[6]{3^3}} =$

$\dfrac{\sqrt[36]{3^{81}} \cdot \sqrt[36]{3^{33}}}{\sqrt[36]{3^{18}}} =$

$\sqrt[36]{3^{81+33-18}} =$

$\sqrt[36]{3^{96}} =$

$3^2 \cdot \sqrt[36]{3^{24}} =$

$3^2 \cdot \sqrt[36]{3^{24}} =$ (dividimos índice y exponente por 12)

$3^2 \cdot \sqrt[3]{3^2} =$

$9 \cdot \sqrt[3]{9}$

h) $\sqrt[3]{3\sqrt[4]{3+\sqrt[4]{81}}} =$

$\sqrt[3]{3\sqrt[4]{3+\sqrt[4]{3^4}}} =$

$\sqrt[3]{3\sqrt[4]{3+3}} =$

$\sqrt[3]{3\sqrt[4]{6}} =$

$\sqrt[3]{\sqrt[4]{3^4 \cdot 6}} =$

$\sqrt[12]{3^4 \cdot 2 \cdot 3} =$

$\sqrt[12]{3^5 \cdot 2}$

28. Demuestra que: $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$ siendo a y b números reales positivos cualesquiera.

Solución:
Queremos ver que la fórmula $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$ es falsa.

Recuerda: Para demostrar que es falso → buscamos un contraejemplo (un ejemplo que no cumpla la fórmula)

Ejemplo a = 9; b = 16

$$\sqrt{9}+\sqrt{16}=\sqrt{9+16}$$
$$\Downarrow$$
$$3 + 4 = 5$$
$$\Downarrow$$
$$7 = 5$$

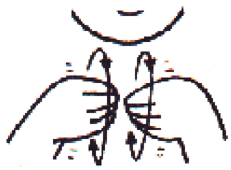
Falso, entonces la fórmula $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$ está mal.

29. Demuestra que: $\sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{a.b}$, siendo a y b números reales positivos cualesquiera.

Solución:
Recuerda: Para demostrar que es verdad → hacemos la demostración, no un ejemplo.

$$\sqrt{a}.\sqrt{b} = a^{1/2} \cdot b^{1/2} = (a \cdot b)^{1/2} = \sqrt{a.b}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS



1. ¿ Cómo será el desarrollo decimal de cualquier número irracional?

2. ¿Qué números irracionales conoces?

3. De las siguientes expresiones decimales, determina cuáles *corresponden* a un número racional y cuáles a un irracional :
   a) 2´353553555...
   b) 4´8646464...
   c) 3´232332333...
   d) 3´ 0101101110...

corresponden = son

4. Escribe tres expresiones decimales que correspondan a números racionales y otras tres a números irracionales.

5. De la expresiones siguientes, *determina* cuáles dan lugar a un número racional y cuáles a un irracional:
   a) $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (Número áureo)
   b) $\dfrac{\text{Longitud de una circunferencia}}{\text{Diámetro}}$
   c) $\sqrt{(6+\sqrt{20})\cdot(6-\sqrt{20})}$

determina = di

6. Halla cuatro números cuyas raíces cuadradas sean, *respectivamente*: 14, $\dfrac{-5}{3}$, 7, $\dfrac{1}{4}$.

respectivamente = de cada uno

7. *Confecciona* una *tabla* con los cuadrados de los números enteros *comprendidos entre 10 y 30*. Con ayuda de esta, confecciona una tabla con los números enteros comprendidos entre 100 y 900, que tengan raíz cuadrada exacta, es decir, que su resultado sea un número entero. Intenta *memorizar* el mayor número posible.

Confecciona = hacer

tabla

comprendidos entre 10 y 30 = desde 10 hasta 30

memorizar = aprender de memoria

8. *Halla* tres números cuyas *raíces cúbicas* sean, respectivamente: −4, −5 y $-\dfrac{2}{3}$.

Halla = encuentra

raíces cúbicas = $\sqrt[3]{}$

9. *¿Existe* la raíz cuadrada de un número real positivo *cualquiera*? ¿Y la raíz cúbica?

10. *¿Existe* la raíz cuadrada de un número real negativo *cualquiera*? ¿Y la raíz cúbica?

¿Existe? = ¿Hay?

cualquiera = ¿cuál? da igual

indicar = decir

11. Completa la tabla siguiente, *indicando* si tienen o no solución, cuántas tienen y el signo de esas soluciones:

Radicando→ / Indice↓	**Positivo**	**Negativo**
Dos		
Tres		

Despejar x quiere decir poner x = nº

12. *Despeja x* de las siguientes igualdades:

a) $x^3 = 27$ b) $x^3 = -8$ c) $\sqrt[3]{x} = -4$ d) $\sqrt[3]{x} = 7$

13. Halla tres números cuya raíz cuarta, quinta y sexta sean, respectivamente: 6, – 3 y $\frac{2}{3}$.

14. Simplifica índice y exponente:

a) $\sqrt[6]{2^{18}}$ b) $\sqrt[12]{5^{30}}$ c) $\sqrt[8]{7^{20}}$

Transformándolos = cambiándolos *previamente* = antes

15. *Transformándolos previamente* en radicales del mismo índice, ordena de menor a mayor:

a) $2, \sqrt[4]{17}, \sqrt[4]{49}, 4$

b) $2, \sqrt[3]{4}, \sqrt{2}, \sqrt{4}$

16. *Transforma*, los siguientes grupos de radicales, en radicales equivalentes con índice común:

a) $\sqrt{2}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[6]{8}, \sqrt[8]{16}$ b) $\sqrt{3}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{5}, \sqrt[6]{2}$

Extraer = sacar fuera

17. *Extraer* todos los factores posibles de los siguientes radicales:

a) $\sqrt{72}$ b) $\sqrt{75}$ c) $\sqrt[3]{32}$ d) $\sqrt{128}$

e) $\sqrt{108}$ f) $\sqrt{1000}$ g) $\sqrt{288}$ h) $\sqrt{84}$

Introducir = meter

18. *Introduce* los factores dentro del radical y ordena de menor a mayor:

a) $3 \cdot \sqrt[4]{5}, 5 \cdot \sqrt[4]{3}$ b) $4 \cdot \sqrt{3}, 5 \cdot \sqrt{2}, 3 \cdot \sqrt{5}$.

Realizar = hacer *operaciones* = +, –, :, ×, ...

19. *Realiza* las siguientes *operaciones* con radicales y simplifica todo lo posible:

a) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{16}$ b) $\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt{40}$ c) $\left(3 \cdot \sqrt[3]{3}\right) \cdot \left(5 \cdot \sqrt[3]{9}\right)$

20. *Realiza* las siguientes operaciones con radicales y simplifica todo lo posible:

a) $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{28}}$ b) $\dfrac{\sqrt{100}}{\sqrt{16}}$

Realizar = Hacer

21. *Realiza* las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$ b) $\dfrac{8\cdot\sqrt[3]{\pi}}{10\cdot\sqrt[3]{2}}$

22. Realiza las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}}$ b) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[6]{8}$

23. *Aplicando* la propiedad correspondiente, expresa *mediante* un sólo radical y simplifica lo posible:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{3}}$ b) $\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{5}}}$ c) $\sqrt[3]{\sqrt{27}}$

Aplicar = utilizar
mediante = con

24. *Racionalizar* el denominador de las siguientes fracciones:

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{6}{4.\sqrt{36}}$

Racionalizar = quitar $\sqrt{\ }$ de abajo (denominador)

25. ¿Es cierta la igualdad: $\sqrt{36}+\sqrt{64}=\sqrt{36+64}$? ¿Y la igualdad: $\sqrt{81}+\sqrt{144}=\sqrt{81+144}$?

26. Con ayuda de una calculadora, comprueba si son *ciertas* las siguientes igualdades: $\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a+b}$ y $\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a-b}$, dando distintos valores a **a**, **b** y **n**. ¿*Qué nos indican* estos resultados?

ciertas = verdad

Qué nos indican = qué quieren decir

27. Calcula y simplifica:

a) $5\sqrt{2}-2\sqrt{2}+7\sqrt{2}$

b) $2\sqrt[4]{3}-4\sqrt[4]{3}+12\sqrt[4]{3}$

c) $2\sqrt{7}-6\sqrt{7}+8\sqrt{7}-5\sqrt{7}$.

28. Simplificando previamente los radicales, calcula y simplifica:

a) $\sqrt{8}+\sqrt{50}-\sqrt{18}$

b) $3\cdot\sqrt[3]{4}-2\cdot\sqrt[3]{32}$

c) $2\sqrt{3}-\sqrt{12}-3\cdot\sqrt{27}-\sqrt{48}$

¿*Qué podemos deducir* de estos resultados?

Qué podemos deducir = ¿qué quiere decir?

esquema = resumen

29. Realiza un *esquema* de cómo deben sumarse o restarse expresiones radicales.

30. Calcula y simplifica:

a) $3\sqrt{7}-4\sqrt{7}+8\sqrt{7}$

b) $3\sqrt{5}-4\sqrt{2}+5\sqrt{5}-8\sqrt{2}$

c) $3\sqrt[3]{2}-6\sqrt[3]{2}+\sqrt[4]{2}-4$

31. Calcula y simplifica:

a) $2\sqrt{3}-\frac{1}{3}\sqrt{3}+\frac{7}{6}\sqrt{3}$

b) $4\sqrt[3]{4}+\frac{3}{4}\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{4}$

c) $\frac{1}{4}\sqrt{3}-\frac{2}{3}\sqrt{5}+\frac{5}{4}\sqrt{3}-\frac{5}{6}\sqrt{5}$

32. Calcula y simplifica:

a) $\sqrt{2}.\left(2\sqrt{3}-\sqrt{18}+3\right)$ b) $\left(4-2\sqrt{3}\right)\cdot\left(4+2\sqrt{3}\right)$ c) $\left(2-\sqrt{5}\right)^2$

33. Racionaliza el denominador y simplifica:

a) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$ b) $\frac{4}{\sqrt[6]{8}}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}}$ d) $\frac{3\sqrt[3]{3}}{2\sqrt[3]{4}}$

34. Racionaliza el denominador y simplifica:

a) $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ b) $\frac{4\sqrt{3}-\sqrt{5}}{3\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ c) $\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{27}+\sqrt{2}}$

d) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-\sqrt{8}}$ e) $\frac{4-\sqrt{5}}{6-2\sqrt{5}}$ f) $\frac{4+\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$

g) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$ h) $\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ i) $\frac{2+4\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+4}$

35. Racionaliza el denominador y simplifica:

a) $\frac{\sqrt{4+x^2}}{\sqrt{4-x^2}}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[6]{16}}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[7]{8}\cdot\sqrt[3]{27}}$ d) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt[3]{16}\cdot\sqrt[4]{4}}$

36. Calcula y simplifica:

a) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}}$

b) $\dfrac{\sqrt{x^5} \cdot \sqrt[5]{x^6} \cdot \sqrt[6]{x^4}}{\sqrt[3]{x^2}}$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[6]{x^{11}} \cdot \sqrt[4]{x^6}}{\sqrt[8]{x^6}}$

d) $\sqrt[3]{4x^2} \cdot \sqrt[9]{64x^7} \cdot \sqrt[6]{16x^5}$

e) $\left(2\sqrt{27} - 3\sqrt{32}\right)\cdot\left(2\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)$

f) $\left(2\sqrt{8} + 3\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{125} - 4\sqrt{32}\right)$

g) $\left(3\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54} + \sqrt[6]{256}\right)\cdot\left(2\sqrt{27} + 3\sqrt{48}\right)$

h) $\left(2\sqrt{27} - 3\sqrt{32}\right)\cdot\left(4\sqrt[4]{9} - \sqrt[6]{8}\right)$

i) $\left(3\sqrt{54} - 4\sqrt[4]{9}\right)\cdot\left(\sqrt[8]{16} + \sqrt{48}\right)$

37. Calcula y simplifica:

a) $\dfrac{2}{3\sqrt{3}} + \sqrt[4]{25} + \dfrac{3}{4}\sqrt{225} - \dfrac{3}{10}\sqrt{75} + \sqrt{80}$

b) $\dfrac{3}{\sqrt{8}} + \sqrt[4]{9} + \dfrac{3}{4}\sqrt{144} - \dfrac{3}{10}\sqrt{75} + \sqrt{72}$

c) $\dfrac{3}{\sqrt{27}} + \sqrt[4]{4} + \dfrac{3}{4}\sqrt{225} - \dfrac{3}{10}\sqrt{12} + \sqrt{72}$

d) $3 \cdot \sqrt{\dfrac{1}{32}} + \sqrt[4]{\dfrac{1}{9}} + 2\sqrt[4]{144} - 2\sqrt{75} + \sqrt{450}$

38. Calcula y simplifica:

a) $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{32}} \cdot \sqrt{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt[6]{2}}$

b) $\sqrt[5]{2\sqrt[3]{3 + \sqrt[5]{32}}}$

SOLUCIONES

1. Un número con infinitas cifras decimales no periódicas.

2. a) La raíz cuadrada de cualquier número natural que no sea un cuadrado perfecto.
b) La raíz cúbica de cualquier número entero que no sea un cubo perfecto.
c) El número π.

3. a) Irracional b) Racional c) Irracional d) Irracional

4. Números racionales: 3´ 43 ; 4´232323... ; 5´ 3425425425...
Números irracionales: 2´121221222.... ; 7´0101101110..... ; 4´414414441.....

5. a) Irracional b) Irracional c) Racional

6. 196 ; $\frac{25}{9}$; 49 ; $\frac{1}{16}$

7. $\sqrt{100}=10$; $\sqrt{121}=11$; $\sqrt{144}=12$; $\sqrt{169}=13$; $\sqrt{196}=14$
$\sqrt{225}=15$; $\sqrt{256}=16$; $\sqrt{289}=17$; $\sqrt{324}=18$; $\sqrt{361}=19$
$\sqrt{400}=20$; $\sqrt{441}=21$; $\sqrt{484}=22$; $\sqrt{529}=23$; $\sqrt{576}=24$
$\sqrt{625}=25$; $\sqrt{676}=26$; $\sqrt{729}=27$; $\sqrt{784}=28$; $\sqrt{841}=29$
$\sqrt{900}=30$

8. -64 ; -125 ; $-\frac{8}{27}$

9. Si . Si

10. No. Si.

11.

Radicando→ / Indice↓	**Positivo**	**Negativo**
Dos	Dos soluciones, una positiva y otra negativa	Ninguna
Tres	Una positiva	Una negativa

12. a) $x=\sqrt[3]{27}=3$ b) $x=\sqrt[3]{-8}=-2$
c) $x=(-4)^3=-64$ d) $x=7^3=343$

13. 1296 ; -243 ; $\frac{64}{729}$

14. 8 ; $\sqrt{5^5}$; $\sqrt{7^5}$

15. a) $2<\sqrt[4]{17}<\sqrt[4]{49}<4$ b) $\sqrt{2}<\sqrt[3]{4}<2=\sqrt{4}$

16. a) $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ b) $\sqrt[12]{3^6}$, $\sqrt[12]{3^4}$, $\sqrt[12]{5^3}$, $\sqrt[12]{2^2}$

17. a) $6\sqrt{2}$; b) $5\sqrt{2}$; c) $2\sqrt[3]{4}$; d) $8\sqrt{2}$;
e) $6\sqrt{3}$; f) $10\sqrt{10}$; g) $12\sqrt{2}$; h) $2\sqrt{21}$

18. a) $3\cdot\sqrt[4]{5}=\sqrt[4]{405}<\sqrt[4]{1875}=5\cdot\sqrt[4]{3}$
b) $3\cdot\sqrt{5}=\sqrt{45}<\sqrt{48}=4\cdot\sqrt{3}<\sqrt{50}=5\cdot\sqrt{2}$

19. a) 12 ; b) $2\sqrt{2}$; c) 45

20. a) $\sqrt{\frac{5}{7}}$; b) $\frac{5}{2}$

21. a) $5\sqrt{2}$; b) $\frac{4}{5}\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}$

22. a) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{2}}$; b) $2\sqrt[3]{4}$

23. a) $\sqrt[6]{3}$; b) $\sqrt[12]{5}$; c) $\sqrt{3}$

24. a) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$; b) $\sqrt{3}$; c) $\dfrac{1}{4}$

25. No. No.

26. No son ciertas.
Que la suma o diferencia de raíces no son iguales a la raíz de la suma o diferencia de los radicandos.

27. a) $10\sqrt{2}$; b) $10\sqrt[4]{3}$; c) $-\sqrt{7}$

28. a) $4\sqrt{2}$; b) $-\sqrt[3]{4}$; c) $-13\sqrt{3}$
Que si los radicales son semejantes se pueden operar hasta quedar un solo radical.

29. a) Primero se deben simplificar todos los radicales.
b) Agrupar todos los radicales semejantes.
c) Todos los que no sean semejantes se dejaran indicados.

30. a) $7\sqrt{7}$; b) $8\sqrt{5} - 12\sqrt{2}$; c) $-3\sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{2} - 4$

31. a) $\dfrac{17}{6}\sqrt{3}$; b) $\dfrac{15}{4}\sqrt[3]{4}$; c) $\dfrac{3}{2}\sqrt{3} - \dfrac{3}{2}\sqrt{5}$

32. a) $2\sqrt{6} - 6 + 3\sqrt{2}$; b) 4 ; c) $9-4\sqrt{5}$

33. a) $\sqrt[3]{4}$ b) $2\sqrt{2}$ c) $\sqrt[4]{2}$ d) $\dfrac{3\sqrt[3]{6}}{4}$

34. a) $\dfrac{7\sqrt{10} - 16}{18}$ b) $\dfrac{13\sqrt{15} - 27}{42}$ c) $\dfrac{58-15\sqrt{6}}{106}$

d) $\dfrac{2\sqrt{10}+7}{6}$ e) $\dfrac{7+\sqrt{5}}{8}$ f) $\dfrac{19+8\sqrt{3}}{13}$

g) $2\sqrt{2} - 2$ h) $\dfrac{8+\sqrt{6}}{29}$ i) $8-5\sqrt{2}$

35. a) $\dfrac{\sqrt{16-x^4}}{4-x^2}$ b) $\dfrac{\sqrt[6]{2}}{2}$ c) $\dfrac{\sqrt[14]{3^7 \cdot 2^8}}{6}$ d) $\dfrac{3\sqrt[3]{4}}{4}$

36. a) $a\sqrt[4]{a^3}$ b) $x^3 \cdot \sqrt[10]{x^7}$ c) $x^3 \cdot \sqrt[4]{x}$

d) $4x^2 \cdot \sqrt[18]{x^5}$ e) $24\sqrt{6} - 66$ f) $-28\sqrt{10} - 53$

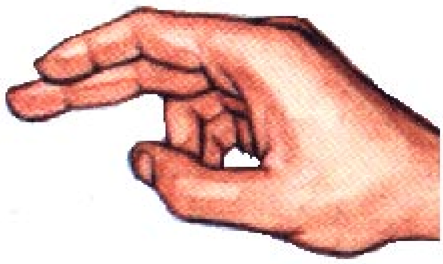
g) $90 \cdot \sqrt[6]{108}$ h) $96 - 54\sqrt{6}$ i) $18\sqrt{3} + 108\sqrt{2} - 4\sqrt{6} - 48$

37. a) $5\sqrt{5} - \dfrac{23}{18}\sqrt{3} + \dfrac{45}{4}$ b) $\dfrac{27}{4}\sqrt{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{3} + 9$

c) $7\sqrt{2} - \dfrac{4}{15}\sqrt{3} + \dfrac{45}{4}$ d) $\dfrac{123}{8}\sqrt{2} - \dfrac{17}{3}\sqrt{3}$

38. a) $2 \cdot \sqrt[12]{2^{11}}$ b) $\sqrt[15]{40}$

TEMA V: LOS NÚMEROS REALES



Autoras:
Ascensión Nicolás Peréñez
Mª José Nicolás Peréñez

NÚMEROS REALES

Los números reales son los números racionales + los números irracionales. Su signo es R.

Recuerda: $\cup$ quiere decir unión

$$\boxed{R = Q \cup I}$$

Resumen de los números que ya hemos visto en los temas 1 hasta el 5:

N = {0, 1, 2, ...}

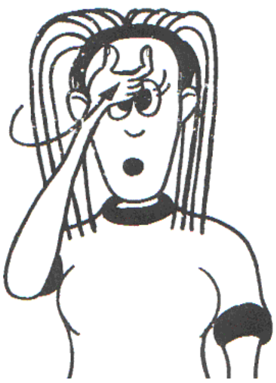
↓

Z = N ∪ {-1, -2, -3, ...} = {....., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}

↓

Q = Z ∪ { fracciones }   I ={números con expresión decimal infinita}

R = Q ∪ I



concepto

En este tema, vamos a explicar algunos *conceptos* que valen para todos los números ya estudiados hasta ahora.

EXPRESIÓN DECIMAL DE UN NÚMERO REAL

Coma

1´8 ó 1,8

Todos los números reales se pueden escribir con formal decimal (con *coma*). Para saber su forma decimal hay dos casos distintos:

1. Cuando un **número es racional**, ¿cómo se hace? se divide el numerador entre el denominador. En el tema 3 ya hemos visto que esa división puede tener como resultado un número: decimal exacto, periódico puro o periódico mixto.

$$\frac{8}{5} = 1{,}6 \rightarrow \text{decimal exacto}$$
$$\frac{1}{3} = 0{,}\widehat{6} \rightarrow \text{periódico puro}$$
$$\frac{5}{6} = 0{,}8\widehat{3} \rightarrow \text{periódico mixto}$$

Infinita: sigue siempre, no hay fin

2. Cuando un **número es irracional**, la forma decimal es *infinita*, entonces escribirlo con forma decimal exacta, no se puede, entonces ¿cómo? Escribir con aproximación, que quiere decir con un número cerca.

Un número irracional se puede aproximar (buscar un número cerca) por defecto, por exceso, y por intervalos encajados. **Por defecto** quiere decir buscar un número cerca un poco antes; **por exceso** quiere decir buscar un número cerca un poco después (un poco más) y **por intervalos encajados** quiere decir entre dos números (un número cerca un poco antes, otro número cerca un poco después). Para calcularlo, hay un método que se llama “tanteo menor-mayor”, ahora lo vamos a explicar con un ejemplo.

LOS NÚMEROS REALES

Llamamos números reales al conjunto formado por los números racionales y los números irracionales. Los números reales se representan como R.

$$\boxed{R = Q \cup I}$$

Así, los números que hemos visto en estas 5 unidades se pueden resumir en:

$N = \{0, 1, 2, ...\}$

$\downarrow$

$Z = N \cup \{-1, -2, -3, ...\} = \{....., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

$\downarrow$

$Q = Z \cup \{\text{ fracciones }\}$ I ={números con expresión decimal infinita}

$R = Q \cup I$

En este tema vamos a definir una serie de conceptos que afectan a todos los números estudiados hasta ahora.

EXPRESIÓN DECIMAL DE UN NÚMERO REAL

Todos los números reales se pueden expresar en forma decimal. Para obtener esta expresión decimal distinguiremos dos casos:

3. Si **el número es racional**, para obtener la expresión decimal dividiremos el numerador entre el denominador. Ya vimos en la tercera unidad que el resultado de la división podía ser: decimal exacto, periódico puro o periódico mixto.

$$\frac{8}{5} = 1{,}6 \rightarrow \text{decimal exacto}$$

$$\frac{1}{3} = 0{,}\widehat{6} \rightarrow \text{periódico puro}$$

$$\frac{5}{6} = 0{,}8\widehat{3} \rightarrow \text{periódico mixto}$$

4. Si **el número es irracional**, su expresión decimal es infinita y, por tanto, nunca lo podremos escribir con una expresión decimal exacta, sino mediante una aproximación.

Podemos aproximar un número irracional de tres formas distintas: por defecto, por exceso o por intervalos encajados. Para hallar cualquiera de estas aproximaciones usaremos el método de tanteo menor-mayor que vamos a explicar con un ejemplo.

Si por ejemplo yo quiero calcular la aproximación por defecto, por exceso y por intervalos encajados del número $\sqrt{\mathbf{2}}$ con 3 cifras decimales (números detrás de la coma $\rightarrow$ 3)

Primero, hacer el cuadrado ($\uparrow^2$) de 1, 2, 3, 4, ... hasta encontrar un cuadrado más pequeño que **2** y otro cuadrado más grande que **2**.

$$\left.\begin{array}{l} 1^2 = 1 \rightarrow \text{menor que } \mathbf{2} \\ 2^2 = 4 \rightarrow \text{mayor que } \mathbf{2} \end{array}\right\} \rightarrow 1 < \sqrt{\mathbf{2}} < 2$$

Ya tenemos la aproximación de $\sqrt{\mathbf{2}}$ con 0 decimales. Ahora hacer el cuadrado ($\uparrow^2$) de 1´0, 1´1, 1´2, ...2´0 para tener 1 decimal.

$$\begin{array}{l} 1'0^2 = 1 \rightarrow \text{menor que } \mathbf{2} \\ 1'1^2 = 1'21 \rightarrow \text{menor que } \mathbf{2} \\ 1'2^2 = 1'44 \rightarrow \text{menor que } \mathbf{2} \\ 1'3^2 = 1'69 \rightarrow \text{menor que } \mathbf{2} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1'4^2 = 1'96 \rightarrow \text{menor que } \mathbf{2} \\ 1'5^2 = 2'25 \rightarrow \text{mayor que } \mathbf{2} \end{array}\right\} \rightarrow 1'4 < \sqrt{\mathbf{2}} < 1'5$$

Ya tenemos la aproximación de $\sqrt{\mathbf{2}}$ con 1 decimal, repetir el cuadrado con 1´40, 1´41, 1´42, ...1´50 para 2 decimales.

$$\left.\begin{array}{l} 1'40^2 = 1'96 \rightarrow \text{menor que } \mathbf{2} \\ 1'41^2 = 1'9881 \rightarrow \text{menor que } \mathbf{2} \\ 1'42^2 = 2'0164 \rightarrow \text{mayor que } \mathbf{2} \end{array}\right\} \rightarrow 1'41 < \sqrt{\mathbf{2}} < 1'42$$

Ya tenemos dos decimales, para tener 3 decimales, repetir el cuadrado con 1´410, 1´411, 1´412, 1´413, ..., 1´42

$$\begin{array}{l} 1'410^2 = 1'9881 \rightarrow \text{menor que } \mathbf{2} \\ 1'411^2 = 1'9909 \rightarrow \text{menor que } \mathbf{2} \\ 1'412^2 = 1'9937 \rightarrow \text{menor que } \mathbf{2} \\ 1'413^2 = 1'9965 \rightarrow \text{menor que } \mathbf{2} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1'414^2 = 1'9993 \rightarrow \text{menor que } \mathbf{2} \\ 1'415^2 = 2'0022 \rightarrow \text{mayor que } \mathbf{2} \end{array}\right\} \rightarrow 1'414 < \sqrt{\mathbf{2}} < 1'415$$

Ya tenemos 3 decimales, entonces:

- la aproximación por defecto de $\sqrt{2}$ es 1´414;
- la aproximación por exceso de $\sqrt{2}$ es 1´415;
- $\sqrt{2}$ está en el intervalo (1´414, 1´415)

Aproximación por defecto: número cerca un poco antes

Aproximación por exceso: número cerca un poco después

Supongamos que queremos hallar la aproximación por defecto, por exceso y por intervalos encajados de $\sqrt{\mathbf{2}}$ con 3 cifras decimales.

Primero, hallamos los cuadrados de 1, 2, 3, 4, ... hasta que uno de estos cuadrados sea menor y el siguiente sea mayor que **2**.

$$\left.\begin{array}{l} 1^2 = 1 \to \text{menor que } \mathbf{2} \\ 2^2 = 4 \to \text{mayor que } \mathbf{2} \end{array}\right\} \to 1 < \sqrt{\mathbf{2}} < 2$$

Esto es una aproximación de $\sqrt{\mathbf{2}}$ con 0 cifras decimales. Ahora hallamos los cuadrados de 1´0, 1´1, 1´2, ...2´0 para obtener una aproximación con 1 cifra decimal.

$$\begin{array}{l} 1´0^2 = 1 \quad \to \text{menor que } \mathbf{2} \\ 1´1^2 = 1´21 \to \text{menor que } \mathbf{2} \\ 1´2^2 = 1´44 \to \text{menor que } \mathbf{2} \\ 1´3^2 = 1´69 \to \text{menor que } \mathbf{2} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1´4^2 = 1´96 \to \text{menor que } \mathbf{2} \\ 1´5^2 = 2´25 \to \text{mayor que } \mathbf{2} \end{array}\right\} \to 1´4 < \sqrt{\mathbf{2}} < 1´5$$

Tenemos una aproximación de $\sqrt{\mathbf{2}}$ con 1 cifra decimal, repetimos el proceso con 1´40, 1´41, 1´42, ...1´50 para obtener una aproximación con 2 cifras decimales.

$$1´40^2 = 1´96 \quad \to \text{menor que } \mathbf{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1´41^2 = 1´9881 \to \text{menor que } \mathbf{2} \\ 1´42^2 = 2´0164 \to \text{mayor que } \mathbf{2} \end{array}\right\} \to 1´41 < \sqrt{\mathbf{2}} < 1´42$$

Ahora tenemos dos cifras decimales, para conseguir 3 cifras decimales, repetiremos el proceso con 1´410, 1´411, 1´412, 1´413, ..., 1´420

$$\begin{array}{l} 1´410^2 = 1´9881 \quad \to \text{menor que } \mathbf{2} \\ 1´411^2 = 1´9909 \quad \to \text{menor que } \mathbf{2} \\ 1´412^2 = 1´9937 \quad \to \text{menor que } \mathbf{2} \\ 1´413^2 = 1´9965 \quad \to \text{menor que } \mathbf{2} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1´414^2 = 1´9993 \quad \to \text{menor que } \mathbf{2} \\ 1´415^2 = 2´0022 \quad \to \text{mayor que } \mathbf{2} \end{array}\right\} \to 1´414 < \sqrt{\mathbf{2}} < 1´415$$

Como ya tenemos 3 cifras decimales, diremos que:

- la aproximación por defecto de $\sqrt{2}$ es 1´414;
- la aproximación por exceso de $\sqrt{2}$ es 1´415;
- $\sqrt{2}$ está en el intervalo (1´414, 1´415)

ERROR

Cuando un número racional se escribe en forma de fracción $(\frac{n^o}{n^o})$, no hay error. Pero ese mismo número con forma decimal, puede:

a) si el número es decimal exacto: tú pones todos los números decimales $\rightarrow$ no hay error.

b) si el número es decimal infinito, periódico. Nosotros no ponemos todos los números, cortamos $\rightarrow$ entonces sí hay error.

Ejemplo:

Yo digo $\frac{1}{3} = 0{,}33$ hay error, porque $\frac{1}{3} = 0{,}3\underbrace{33.....}_{\text{sigue}}$

Yo puedo calcular el error exacto.

Error absoluto es el número menos la aproximación con valor absoluto (sin signo + ni -).

En el ejemplo anterior, el error absoluto es:

Yo digo $\frac{1}{3} = 0{,}33$

Error absoluto = $\left|\frac{1}{3} - 0{,}33\right| = \left|\frac{1}{3} - \frac{33}{100}\right| = \left|\frac{100-99}{300}\right| = \frac{1}{300}$

También se puede calcular el error por unidad, (en cada uno), eso se llama error relativo.

Error relativo es error absoluto : número.

En el ejemplo de antes:

Error relativo = $\frac{1}{300} : \frac{1}{3} = \frac{3}{300} = \frac{1}{100} = 0{,}01$

Cuando un número irracional se escribe con forma decimal, siempre hay error. Ese error no se puede saber exacto, se puede acotar (error menor que un número, el error exacto no lo sé, pero sé que es más pequeño que un número).

Antes hemos dicho $1 < \sqrt{2} < 2$, tiene un error menor que $2 - 1 = 1$. Error menor que 1.

Si decimos $1'41 < \sqrt{2} < 1'42$, hay un error menor que $1'42 - 1'41 = 0{,}01$. Error menor que $0'01$.

ERROR

Cuando un número racional se expresa mediante una fracción, no se comete ningún error. Pero, si este mismo número lo expresamos en forma decimal, entonces puede ocurrir:

c) Que sea decimal exacto. En este caso si escribimos todas las cifras decimales, tampoco cometemos error.

d) Que tenga una expresión decimal infinita, periódica. En este caso si lo escribimos con un número finito de cifras decimales, sí cometemos error.

Ejemplo:

Si tomamos como valor de $\frac{1}{3} = 0{,}33$ cometemos un error pues $\frac{1}{3} = 0{,}333....$ y no termina.

En este caso podemos calcular el error cometido de forma exacta. Así definimos:

Error absoluto es el valor absoluto de la diferencia entre el número y su aproximación.

Así en el ejemplo anterior el error absoluto cometido al tomar como valor de $\frac{1}{3} = 0{,}33$ es:

$$\text{Error absoluto} = \left|\frac{1}{3} - 0{,}33\right| = \left|\frac{1}{3} - \frac{33}{100}\right| = \left|\frac{100-99}{300}\right| = \frac{1}{300}$$

También puede ser interesante calcular el error cometido por unidad, es decir, el error relativo.

Error relativo es el cociente entre el error absoluto y el número.

En el ejemplo anterior el error relativo es:

$$\text{Error relativo} = \frac{1}{300} : \frac{1}{3} = \frac{3}{300} = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

Si es un número irracional el que se expresa de forma decimal, siempre se comete error. En este caso el error no se puede calcular de forma exacta sino que se puede acotar.

Así, cuando decíamos que $1 < \sqrt{2} < 2$, cometemos un error menor que: $2 - 1 = 1$.

Si lo que decimos es que $1'41 < \sqrt{2} < 1'42$, cometemos un error menor que: $1'42 - 1'41 = 0{,}01$.

INTERVALOS Y ENTORNOS

A veces trabajamos con un conjunto de números reales (desde un número hasta otro número), quiere decir que no trabajamos con toda la recta real trabajamos con una parte. Ejemplo:

- todos los números de 0 hasta 2
- todos números más grandes que 3
- ...

Esas frases (ejemplos) se pueden explicar más fácilmente y más corto con intervalos y entornos. Ahora vamos a explicar los tipos de intervalos y entornos y las operaciones (cálculos) con intervalos y con entornos.

- **Intervalo abierto (a, b)**: Todos los puntos de a hasta b, sin a y sin b (a y b no). En matemáticas, ¿cómo se escribe?

$(a, b) = \{x \in R \ / \ a < x < b\}$

o dibujo:

$(a, b) = \{x \in R \ / \ a < x < b\}$

se dice:

conjunto de x pertenecientes a los números reales (los x son números reales) pero

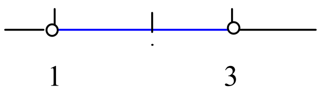
/ $\underbrace{\text{.............}}_{\text{obligación}}$

Este ejemplo dice que a es menor que x, y también x es menor que b.

Ejemplo:
El intervalo (1, 3) es el conjunto de puntos desde 1 hasta 3, sin 1 y sin 3. En matemáticas se escribe:

$$(1, 3) = \{x \in R \ / \ 1 < x < 3\}$$

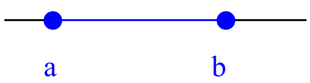
y dibujo es:



- **Intervalo cerrado [a, b]**: es el conjunto de puntos de a hasta b, a y b también. En matemáticas se escribe:

$[a, b] = \{x \in R \ / \ a \leq x \leq b\}$

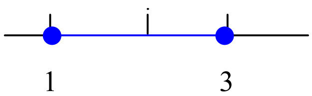
o dibujo:



Ejemplo:
El intervalo [1, 3] son los puntos desde 1 hasta 3, el 1 y el 3 también. En matemáticas se escribe:

$$[1, 3] = \{x \in R \ / \ 1 \leq x \leq 3\}$$

y el dibujo:



INTERVALOS Y ENTORNOS

A veces tendremos que trabajar con un conjunto de números reales que van desde un número hasta otro, es decir, con un trozo de la recta real. Así, por ejemplo:

- Todos los números que hay desde 0 hasta 2
- Todos los números mayores que 3.
- ...

En estos casos podremos simplificar estas expresiones usando intervalos y entornos.

Vamos a continuación a definir los distintos tipos de intervalos y de entornos, así como las operaciones elementales que usaremos al trabajar con intervalos y con entornos.

$\{x \in R \ / \ a < x < b\}$

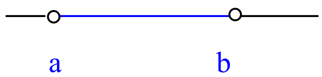
se lee:

conjunto de x pertenecientes a los números reales tales que a es menor que x y, x es menor que b.

- **Intervalo abierto (a, b)**: es el conjunto de todos los puntos que están entre a y b, sin incluir ni a ni b. Esto se puede expresar como:

  $(a, b) = \{x \in R \ / \ a < x < b\}$

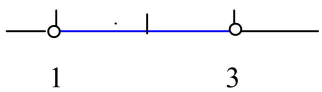
  o gráficamente, se puede representar como:



Ejemplo:
El intervalo (1, 3) es el conjunto de puntos que van desde 1 hasta el 3, sin incluir el 1 ni el 3. Es decir:

$$(1, 3) = \{x \in R \ / \ 1 < x < 3\}$$

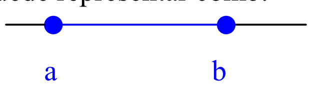
y gráficamente es:



- **Intervalo cerrado [a, b]**: es el conjunto de todos los puntos que están entre a y b, incluyendo a y b. Esto se puede expresar como:

  $[a, b] = \{x \in R \ / \ a \leq x \leq b\}$

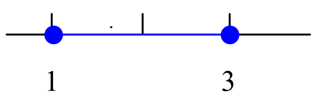
  o gráficamente, se puede representar como:



Ejemplo:
El intervalo [1, 3] es el conjunto de puntos que van desde 1 hasta el 3, incluyendo el 1 y el 3. Es decir:

$$[1, 3] = \{x \in R \ / \ 1 \leq x \leq 3\}$$

y gráficamente es:



– **Intervalo semiabierto o semicerrado (a, b] y [a, b)**:

(a, b] todos los puntos de a hasta b, sin a pero con b.
[a, b) todos los puntos de a hasta b, a sí, b no.

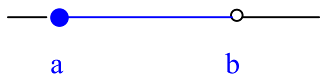
Se escribe:

(a, b] = {x∈R / a < x ≤ b}
[a, b) = {x∈R / a ≤ x < b}

o dibujo:

(a, b]

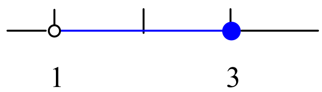
[a, b)



Ejemplos:
El intervalo (1, 3] es el conjunto de puntos desde 1 hasta 3, sin el 1, el 3 sí. En matemáticas se escribe:

(1, 3] = {x∈R / 1 < x ≤ 3}

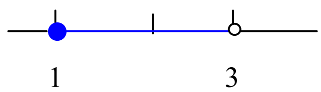
y el dibujo es:



El intervalo [1, 3) es el conjunto de puntos desde 1 hasta 3, el número 1 sí, el 3 no. Es lo mismo que:

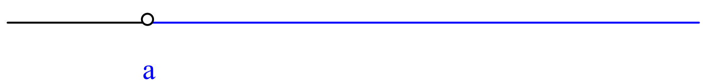
[1, 3) = {x∈R / 1 ≤ x < 3}

y el dibujo:

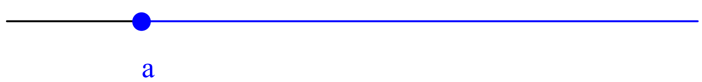


Cuando a = -∞ o b = ∞ también se llaman intervalos y se escribe:

(a, ∞) es el conjunto de puntos mayores (más grandes) que a.
(a, ∞) = {x ∈ R / x > a}



[a, ∞) es el conjunto de puntos más grandes o igual que a.
[a, ∞) = {x ∈ R / x ≥ a}



- **Intervalo semiabierto o semicerrado (a, b] y [a, b)**:

(a, b] es el conjunto de todos los puntos que están entre a y b, sin incluir a pero incluyendo b.

[a, b) es el conjunto de todos los puntos que están entre a y b, incluyendo a pero no incluyendo b.

Estos intervalos se puede expresar como:

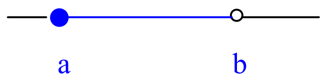
$(a, b] = \{x \in R \ / \ a < x \leq b\}$

$[a, b) = \{x \in R \ / \ a \leq x < b\}$

o gráficamente, se puede representar como:

(a, b]

[a, b)

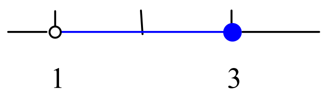


Ejemplos:

El intervalo (1, 3] es el conjunto de puntos que van desde 1 hasta el 3, sin incluir el 1 pero incluyendo el 3. Es decir:

$$(1, 3] = \{x \in R \ / \ 1 < x \leq 3\}$$

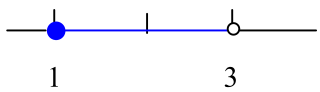
y gráficamente es:



El intervalo [1, 3) es el conjunto de puntos que van desde 1 hasta el 3, incluyendo el 1 pero sin incluir el 3. Es decir:

$$[1, 3) = \{x \in R \ / \ 1 \leq x < 3\}$$

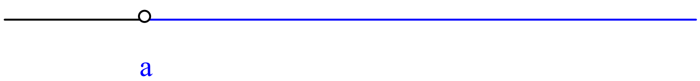
y gráficamente es:



Cuando $a = -\infty$ o $b = \infty$ también se llaman intervalos y su definición es:

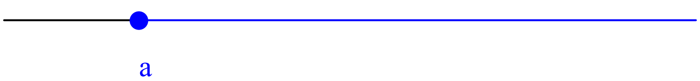
(a, ∞) es el conjunto de puntos mayores que a.

$(a, \infty) = \{x \in R \ / \ x > a\}$

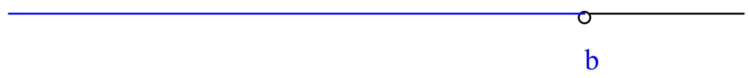


$[a, \infty)$ es el conjunto de puntos mayores o iguales que a.

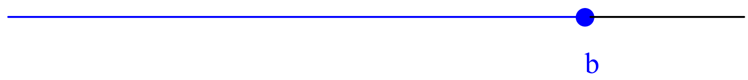
$[a, \infty) = \{x \in R \ / \ x \geq a\}$



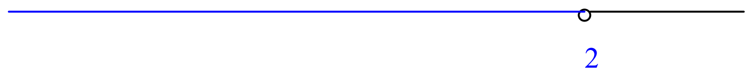
$(-\infty, b)$ es el conjunto de puntos más pequeños que b.
$(-\infty, b) = \{x \in R \,/\, x < b\}$



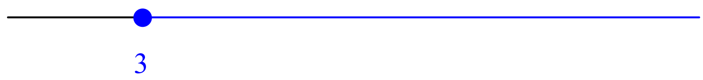
$(-\infty, b]$ es el conjunto de puntos más pequeños que b o igual que b.
$(-\infty, b] = \{x \in R \,/\, x \leq b\}$



Ejemplos:
$(-\infty, 2)$ son todos los números más pequeños que 2.
$(-\infty, 2) = \{x \in R \,/\, x < 2\}$



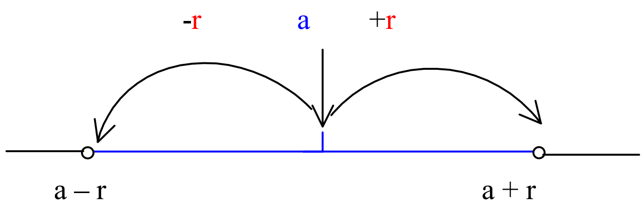
$[3, \infty)$ son todos los números más grandes que 3 o igual que 3.
$[3, \infty) = \{x \in R \,/\, x \geq 3\}$



Otra forma para escribir una parte de la recta es con entornos, pero entonces sólo vale para las partes de la recta que son intervalos abiertos no infinitos.

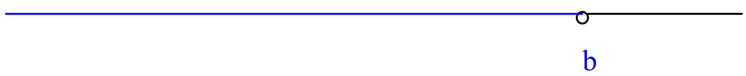
Vamos a estudiar varios tipos de entornos:

Entorno simétrico de centro a y radio r, se escribe E (a, r) = intervalo (a - r, a + r)

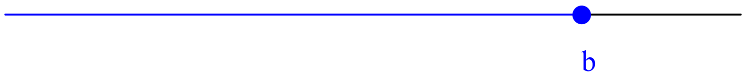


Ejemplo:
E(2, 3) = (2-3, 2+3) = (-1, 5)

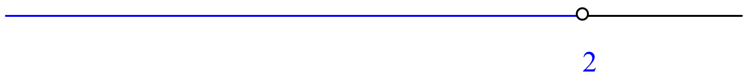
$(-\infty, b)$ es el conjunto de puntos menores que b.
$(-\infty, b) = \{x \in R \,/\, x < b\}$



$(-\infty, b]$ es el conjunto de puntos menores o iguales que b.
$(-\infty, b] = \{x \in R \,/\, x \leq b\}$

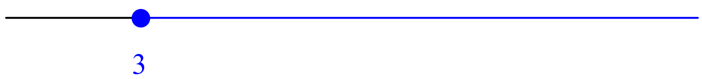


Ejemplos:
$(-\infty, 2)$ son todos los números menores que 2.
$(-\infty, 2) = \{x \in R \,/\, x < 2\}$



$[3, \infty)$ son todos los números mayores o iguales que 3.

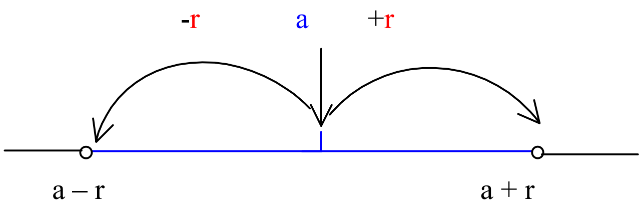
$[3, \infty) = \{x \in R \,/\, x \geq 3\}$



Otra forma de definir un trozo de la recta real es mediante entornos aunque, en este caso, sólo podremos usarlos para definir trozos de recta que sean iguales a intervalos abiertos no infinitos.

Los tipos de entornos que vamos a estudiar son:

Entorno simétrico de centro a y radio r, se denota como E (a, r) y es igual al intervalo (a - r, a + r)

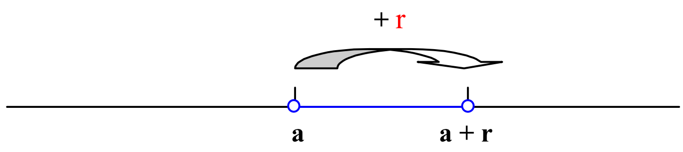


Ejemplo:
$E(2, 3) = (2\text{-}3,\ 2\text{+}3) = (-1,\ 5)$

E^+ + quiere decir por la derecha

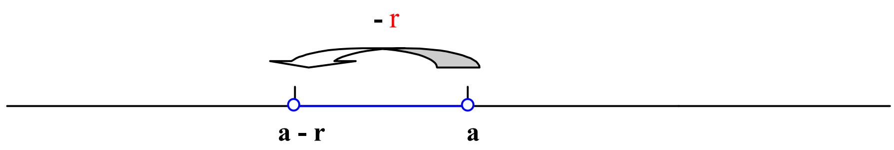
E^- - quiere decir por la izquierda

Entorno lateral por la derecha de centro a y radio r. Es el intervalo abierto (a, a + r) y se escribe E^+ (a, r).



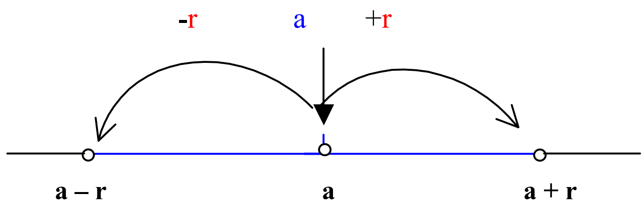
Ejemplo:
E^+ (2, 3) = (2, 2+3) = (2, 5)

Entorno lateral por la izquierda de centro a y radio r. Es el intervalo abierto (a - r, a) y se escribe E^- (a, r).



Ejemplo:
E^- (2, 3) = (2-3, 2) = (-1, 2)

Entorno reducido de centro a y radio r. Es el entorno con centro a y radio r sin el centro, intervalo abierto (a - r, a + r) - {a} y se escribe E^* (a, r).

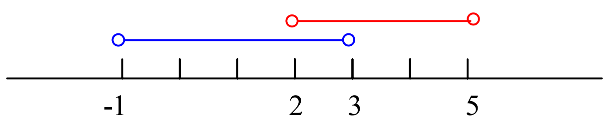


Ejemplo:
E^* (2, 3) = (2-3, 2+3) - {2}= (-1, 5) - {2}

Con los intervalos y los entornos podemos hacer operaciones. Las más importantes son:

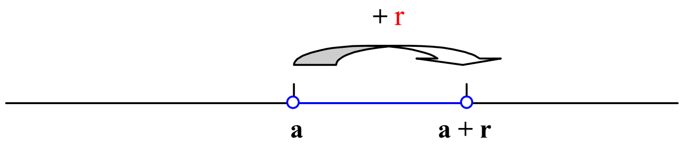
– **La unión**: ∪. ¿Qué es unión?. Unión de dos intervalos o más = conjunto puntos dentro de un intervalo o dentro de otro intervalo.

Ejemplos:
1º (-1, 3) ∪ (2, 5)



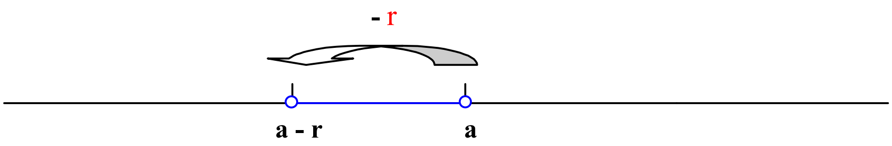
(-1, 3) ∪ (2, 5) = (-1, 5) todos los puntos de la línea azul y la línea roja.

Entorno lateral por la derecha de centro a y radio r. Es el intervalo abierto (a, a + r) y se denota como E^{+} (a, r).



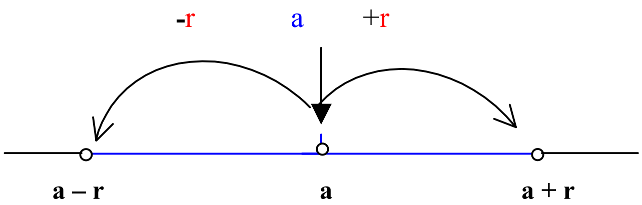
Ejemplo:
E^{+} (2, 3) = (2, 2+3) = (2, 5)

Entorno lateral por la izquierda de centro a y radio r. Es el intervalo abierto (a - r, a) y se denota como E^{-} (a, r).



Ejemplo:
E^{-} (2, 3) = (2-3, 2) = (-1, 2)

Entorno reducido de centro a y radio r. Es el entorno de centro a y radio r sin el centro, es decir, el intervalo abierto (a - r, a + r) - {a} y se denota como E^{*} (a, r).

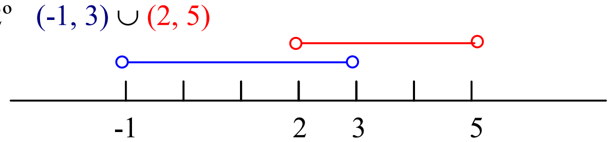


Ejemplo:
E^{*} (2, 3) = (2-3, 2+3) - {2}= (-1, 5) - {2}

Tanto al trabajar con intervalos como con entornos, podremos realizar una serie de operaciones. Las más importantes son:

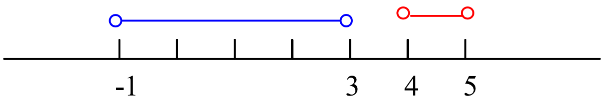
– **La unión** que se representa como ∪. Se define la unión de dos o más intervalos como el conjunto de puntos que pertenecen al menos a uno de estos intervalos.

Ejemplos:
2º (-1, 3) ∪ (2, 5)



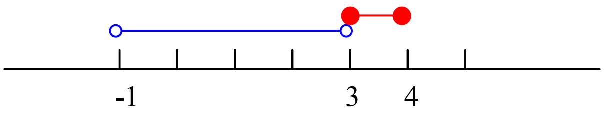
(-1, 3) ∪ (2, 5) = (-1, 5) todos los puntos donde hay línea azul o roja.

3º $(-1, 3) \cup (4, 5)$



$(-1, 3) \cup (4, 5) = (-1, 3) \cup (4, 5)$ todos los puntos de la línea azul + puntos de la línea roja.

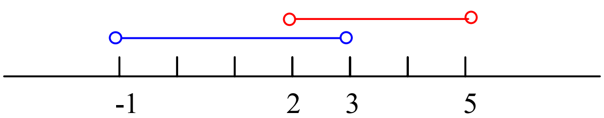
4º $(-1, 3) \cup [3, 4]$



$(-1, 3) \cup (4, 5) = (-1, 4]$

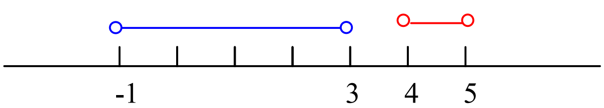
– **La intersección**: $\cap$. ¿Qué es?. Intersección de dos intervalos o más = conjunto de puntos dentro de un intervalo y al mismo tiempo también dentro del otro intervalo.

Ejemplos:
1º $(-1, 3) \cap (2, 5)$



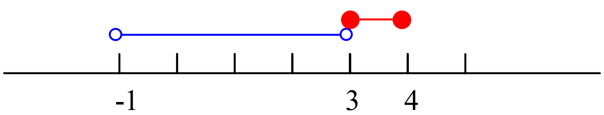
$(-1, 3) \cap (2, 5) = (2, 3)$ puntos dentro de la línea azul y también dentro de la línea roja.

2º $(-1, 3) \cap (4, 5)$



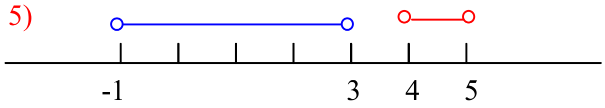
$(-1, 3) \cap (4, 5) = \varnothing$ (conjunto vacío = ninguno). Porque puntos dentro de la línea roja y también dentro de la línea azul no hay.

3º $(-1, 3) \cap [3, 4]$



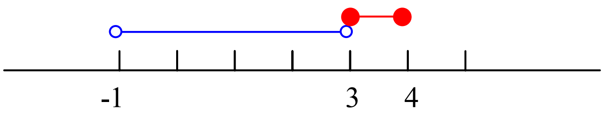
$(-1, 3) \cap (4, 5) = \varnothing$

5º $(-1, 3) \cup (4, 5)$



$(-1, 3) \cup (4, 5) = (-1, 3) \cup (4, 5)$ todos los puntos donde hay línea azul o roja.

6º $(-1, 3) \cup [3, 4]$

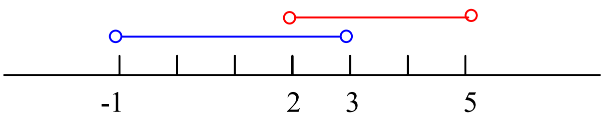


$(-1, 3) \cup [3, 4] = (-1, 4]$

– La intersección que se representa como $\cap$. Se define la intersección de dos o más intervalos como el conjunto de puntos que pertenecen a todos estos intervalos.

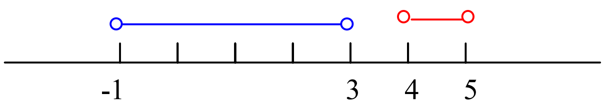
Ejemplos:

1º $(-1, 3) \cap (2, 5)$



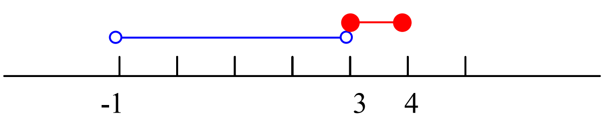
$(-1, 3) \cap (2, 5) = (2, 3)$ todos los puntos donde están las dos líneas, la azul y la roja.

2º $(-1, 3) \cap (4, 5)$



$(-1, 3) \cap (4, 5) = \varnothing$ (es decir el conjunto vacío, pues no hay nada en común).

3º $(-1, 3) \cap [3, 4]$



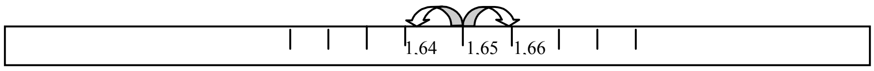
$(-1, 3) \cap [3, 4] = \varnothing$

mides → del verbo medir

ESTIMACIÓN

Muchas veces cuando tú *mides* una cosa, no puedes decir el número exacto, dices el número aproximadamente (más o menos), eso se llama estimación y también tienes que decir cuánto error hay.

Ejemplo:
Julia mide 1,65 metros de altura, con un error de 0,01. Eso quiere decir: Julia tiene una altura entre 1,64 y 1,66 metros.



a es estimación de un número x con un error menor que r cuando x está dentro del intervalo (a – r, a + r)

Ejemplo:

1. Un gusano mide entre 0,08 metros y 0,09 metros. Una estimación puede ser:

$$a = \frac{0{,}08 + 0{,}09}{2} = \frac{0{,}17}{2} = 0{,}085\,\text{m.}$$

el error máximo es:

$$r = 0{,}09 - 0{,}085 = 0{,}005 \text{ m.}$$

2. Hay un número, que yo no conozco, pero yo sé que su estimación es 3,148 con un error más pequeño que 0,002, entonces el número que yo no conozco está dentro del intervalo:

$$(3{,}148 - 0{,}002,\quad 3{,}148 + 0{,}002) = (3{,}146,\quad 3{,}15)$$

REDONDEO

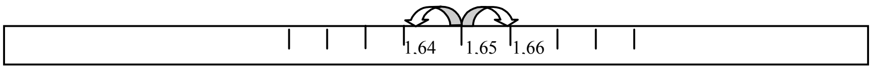
Muchas veces un número tiene muchos decimales y no los decimos todos, cortamos. Por ejemplo hacemos ejercicios con la calculadora, en la calculadora hay ocho decimales y nosotros queremos coger sólo dos decimales. Entonces hacemos una técnica que se llama “redondeo”.

PASOS	**Ejemplo**: 0,8731 Redondeo con 2 decimales	**Ejemplo**: 0,8783 Redondeo con 2 decimales
Miramos el número que queremos quitar	0,87 ⋰ 31	0,87 ⋰ 83 +1
Número =5 o más de 5 hacemos la aproximación por exceso (uno más)		0,88 sumar 1 al número antes ⋰ y cortar.
Número menos de 5 hacemos la aproximación por defecto.	0,87 cortar y fin	

ESTIMACIÓN

Muchas veces es difícil decir el valor exacto de una medida, más bien damos una estimación indicando el margen de error.

Ejemplo:
Julia mide 1,65 metros con un margen de error de 0,01. Esta afirmación quiere decir que la altura de Julia está entre 1,64 y 1,66 metros.



> Se dice que a es una estimación de un valor x con un error menor que r si x pertenece al intervalo (a – r, a + r)

Ejemplo:

3. Si la longitud de un gusano está entre 0,08 metros y 0,09 metros, podemos tomar como valor estimado de la longitud
$$a = \frac{0{,}08 + 0{,}09}{2} = \frac{0{,}17}{2} = 0{,}085\,\text{m}.$$
y el error máximo cometido será
$$r = 0{,}09 - 0{,}085 = 0{,}005 \text{ m}.$$

4. Por el contrario, si sabemos que el valor estimado de un número es 3,148 con un error menor que 0,002, entonces querrá decir que este número está en el intervalo
$$(3'148 - 0'002,\ 3'148 + 0'002) = (3'146,\ \ 3'15)$$

REDONDEO

Muchas veces nos vemos obligados a cortar la parte decimal de un número, por ejemplo, cuando al resolver un problema con la calculadora, esta nos da 8 cifras decimales y queremos coger sólo dos cifras decimales. En este caso, elegiremos estas 2 cifras decimales usando una técnica llamada redondeo. Esta técnica consiste en lo siguiente:

PASOS	**Ejemplo**: Redondeo con 2 cifras decimales de 0,8731	**Ejemplo**: Redondeo con 2 cifras decimales de 0,8783
Nos fijamos en la primera cifra que queremos quitar.	0,8731	0,8783 1
Si esta cifra es 5 o más, haremos una aproximación por exceso		0,88 el 7 aumenta en 1 y el 83 desaparece
Si esta cifra es menor que 5, haremos una aproximación por defecto.	0,87 el 31 desaparece y lo demás queda igual.	

Ejemplos:

a) Para redondear 0,874531 con 3 decimales: $0{,}\underbrace{874}_{3} \therefore 531$,

el número después $\therefore$ 5 es = 5, entonces 4 +1 = 5, el redondeo es 0,875

b) Para redondear 27,43125 con 2 decimales: $27{,}\underbrace{43}_{2} \therefore 125$,

el número después $\therefore$ 1 es < 5, entonces cortar. El redondeo es 27,43

Algunas veces esa técnica también se utiliza con números grandes. Por ejemplo si una camisa su precio es 4995, normalmente decimos que su precio es 5000, es más fácil, más cómodo.

Esa aproximación es con 1 cifra significativa (se llama así). En el número 4995, primero yo quiero redondear el 9, el 9 es > 5, entonces 4 + 1 = 5 pero los otros números no se quitan, se ponen 0.

$$\begin{array}{cccc} 4 & 9 & 9 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Ejemplo:

Una casa vale 25.647.000 pesetas y yo quiero decir el precio con 2 cifras significativas, entonces miramos la tercera cifra (6) ¿mayor que 5? Sí, entonces se suma 5 + 1 para redondear por exceso (un poco más):

$$25.\overbrace{647.000}$$

+ 1 ↓ Se convierten en 0 ↓

$$26.000.000$$

NOTACIÓN CIENTÍFICA

Seguro que tú has visto algún libro que dice:

- el tamaño de un virus es 0,000000018 metros
- la distancia de la Tierra hasta Sol es 150.000.000.000 metros.

Cuando trabajamos con números muy pequeños o números muy grandes, es mejor escribirlos con **notación científica** (una forma de escribirlos).

> Un número en forma de **notación científica** quiere decir escribir el número de otra forma: $a \cdot 10^n$ donde: a es un número en forma decimal, (con coma), pero es obligación que la parte entera (izquierda de la ´) sólo hay una cifra y n es número entero (normal).

Ejemplos de antes:

8 lugares a la izquierda

$$0{,}00000001 8 = 1{,}8 \cdot 10^{-8}$$

11 lugares a la derecha

$$150.000.000.000 = 1{,}5 \cdot 10^{11}$$

Ejemplos:

c) Para redondear 0,874531 con 3 cifras decimales, primero miramos la cuarta cifra decimal 0,874531, como es 5, entonces haremos una aproximación por exceso 0,875.

d) Para redondear 27,43125 con 2 cifras decimales, primero miramos la tercera cifra decimal 27,43125, como es 1, entonces haremos una aproximación por defecto 27,43.

A veces se usa también esta técnica no para redondear números decimales, sino con números grandes. Por ejemplo si una camisa cuesta 4995 pesetas, solemos pensar que cuesta 5000 pesetas.

En este caso, hemos hecho una aproximación con una cifra significativa. Para ello miramos la primera cifra que queremos redondear, en este caso si queremos dejar una cifra será el 9, como 9 es mayor que 5 haremos una aproximación por exceso. Así, el 4 pasará a 5, pero los números redondeados no se eliminan sino que se convierten en ceros.

4 9 9 5

5 0 0 0

Ejemplo:

Si un piso cuesta 25.647.000 pesetas y queremos dar el precio con 2 cifras significativas, observamos la tercera cifra (6) y como es mayor que 5, redondeamos el precio por exceso:

$$25.\underbrace{647.000}_{\text{Se convierten en 0}}$$

↑ 1

26.000.000

NOTACIÓN CIENTÍFICA

Puede que en algún libro hayas visto:

- El tamaño de un virus es 0,000000018 metros.
- La distancia de la Tierra hasta el Sol es de 150.000.000.000 metros.

Cuando trabajamos con números como estos que son muy pequeños o muy grandes es conveniente expresarlos mediante **notación científica**.

> Un número está expresado en **notación científica** cuando se escribe de la forma $a \cdot 10^n$ donde a es un número en forma decimal con una sola cifra en la parte entera y n es un número entero.

Así, en los ejemplos anteriores:

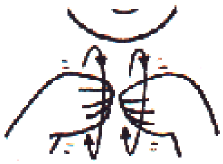
8 lugares a la izquierda

$0{,}000000018 = 1{,}8 \cdot 10^{-8}$

11 lugares a la derecha

$150.000.000.000 = 1{,}5 \cdot 10^{11}$

PROBLEMAS RESUELTOS



1. Escribe *la expresión decimal* de los siguientes números racionales:

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{11}{14}$ c) $\frac{17}{12}$

expresión decimal = forma decimal

Solución:

Recuerda:
Un número en forma decimal, ¿cómo se hace? → DIVIDIR numerador entre denominador

Entonces:

a) $\frac{3}{4} = 0{,}75$

b) $\frac{11}{14} = 1{,}272727.... = 1{,}\overset{\frown}{27}$ (se pone $\overset{\frown}{27}$ porque 27 se repite)

c) $\frac{17}{12} = 1{,}416666.... = 1{,}41\widehat{6}$ (se pone $\widehat{6}$ porque 6 se repite)

2. Escribe los siguientes números irracionales con tres cifras decimales: por defecto, por exceso y mediante un intervalo encajado

a) $\sqrt[3]{2}$ b) π

Solución

a) $\sqrt[3]{2}$. Es raíz cúbica ($\sqrt[3]{\ }$), se hace igual que la raíz cuadrada ($\sqrt{\ }$) pero se elevan a 3 ($\uparrow^3$) los números 1, 2, 3, 4, ... hasta encontrar un *cubo* más pequeño que 2 y otro *cubo* más grande que 2.

cubo = $\uparrow^3$

$$\left.\begin{array}{l} 1^3 = 1 \to \text{menor que } \mathbf{2} \\ 2^3 = 8 \to \text{mayor que } \mathbf{2} \end{array}\right\} \to 1 < \sqrt[3]{2} < 2$$

Ya tenemos la aproximación de $\sqrt[3]{2}$ con 0 decimales. Ahora se hacen los cubos ($\uparrow^3$) de 1´0, 1´1, 1´2, ...2´0 para tener la aproximación con 1 decimal.

$$\begin{array}{l} 1{'}0^3 = 1 \to \text{menor que } \mathbf{2} \\ 1{'}1^3 = 1{'}331 \to \text{menor que } \mathbf{2} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1{'}2^3 = 1{'}728 \to \text{menor que } \mathbf{2} \\ 1{'}3^3 = 2{'}197 \to \text{mayor que } \mathbf{2} \end{array}\right\} \to 1{'}2 < \sqrt[3]{2} < 1{'}3$$

Ya tenemos la aproximación de $\sqrt[3]{2}$ con 1 decimal, ahora se repiten los cubos con 1´20, 1´21, 1´22, ...1´30 para tener la aproximación con 2 decimales.

$$\begin{array}{ll} 1{'}20^3 = 1{'}728 & \to \text{menor que } \mathbf{2} \\ 1{'}21^3 = 1{'}77156 & \to \text{menor que } \mathbf{2} \\ 1{'}22^3 = 1{'}81585 & \to \text{menor que } \mathbf{2} \\ 1{'}23^3 = 1{'}86087 & \to \text{menor que } \mathbf{2} \\ 1{'}24^3 = 1{'}90662 & \to \text{menor que } \mathbf{2} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 1{'}25^3 = 1{'}95312 & \to \text{menor que } \mathbf{2} \\ 1{'}26^3 = 2{'}00038 & \to \text{mayor que } \mathbf{2} \end{array}\right\} \to 1{'}25 < \sqrt[3]{2} < 1{'}26$$

Ya tenemos 2 decimales, para 3 decimales, repetir el cubo con 1´250, 1´251, 1´252, 1´253, ..., 1´26

$1'250^3 = 1'95312 \rightarrow$ menor que **2**
$1'251^3 = 1'95782 \rightarrow$ menor que **2**
$1'252^3 = 1'96251 \rightarrow$ menor que **2**
$1'253^3 = 1'96722 \rightarrow$ menor que **2**
$1'254^3 = 1'97193 \rightarrow$ menor que **2**
$1'255^3 = 1'97666 \rightarrow$ menor que **2**
$1'256^3 = 1'98139 \rightarrow$ menor que **2**
$1'257^3 = 1'98612 \rightarrow$ menor que **2**
$1'258^3 = 1'99087 \rightarrow$ menor que **2**

$$\left.\begin{array}{l} 1'259^3 = 1'99562 \rightarrow \text{menor que } \mathbf{2} \\ 1'26^3 = 2'00038 \rightarrow \text{mayor que } \mathbf{2} \end{array}\right\} \rightarrow 1'259 < \sqrt[3]{2} < 1'260$$

Ya tenemos 3 decimales, entonces:

- la aproximación por defecto de $\sqrt[3]{2}$ es 1´259;
- la aproximación por exceso de $\sqrt[3]{2}$ es 1´260;
- $\sqrt[3]{2}$ está en el intervalo (1´259, 1´260)

b) π. Buscar en cualquier libro o calculadora π es 3,1415927..... Entonces:

- la aproximación por defecto de π es 3,141 (cortar ✄ en 3 cifras decimales);
- la aproximación por exceso de π es 3,142 (cortar ✄ en 3 cifras y añadir 1 a la última)
- π está en el intervalo (3,141, 3,142) (primer número = aproximación por defecto, segundo número = aproximación por exceso)

3. Indica si el desarrollo decimal corresponde a un número racional o irracional.
   a) 3,222222.......... b) 0,1010010001....
   c) 0,43753753..... d) 0,12112111211112.....

Solución

a) 3,2222.... = $3,\widehat{2}$ periódico puro, entonces es racional.

b) 0,1010010001.... no tiene fin, periodo tampoco (no se repite), entonces es irracional.

c) 0,43753753.... = $0,4\widehat{375}$ periódico mixto, entonces es racional.

d) 0,12112111211112.... no tiene fin, periodo tampoco (no se repite), entonces es irracional.

4. Escribe un número real comprendido entre los siguientes:

a) $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ b) π y $\frac{355}{113}$

Solución

a) Primero $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ ➔ forma decimal

$\sqrt{2}$ = 1,4142.... y $\sqrt{3}$ = 1,7320...

Entonces números entre $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ hay muchos. Ejemplo: 1,5; 1,47; 1,6...

b) Primero π y $\frac{355}{113}$ ➔ forma decimal

π = 3,1415927.... y $\frac{355}{113}$ = 3,1415929....

Números entre π y $\frac{355}{113}$ hay muchos también pero más raros, por ejemplo: 3,1415928; 3,14159285; ....

5. ¿Verdadero o falso? ¿Por qué?

a) Todo número real es racional
b) Todo número irracional es real
c) Todo número racional es irracional
d) Todo número real es irracional

Solución

Tú debes aprender que:
Si es **falso** → busca un ejemplo para demostrar porqué. Esto se llama buscar **contraejemplo**
Si es **verdad** → decir el **motivo**.

a) Falso. Contraejemplo: $\sqrt{2}$ es real y no es racional
b) Verdad. Motivo: números reales = conjunto de números racionales + conjunto de números irracionales.
c) Falso. Contraejemplo: $\frac{1}{2}$ es racional y no es irracional.
d) Falso. Contraejemplo: $\frac{1}{2}$ es real y no es irracional.

6. *Razona* con ejemplos si el producto de dos números irracionales, ¿es siempre irracional?

Razona = explica por qué

Solución

El problema dice: pon varios ejemplos y di si es verdad o mentira.

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ → irracional

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2$ → racional

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16}$ → racional

$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{8} = 2$ → racional

Entonces ¿racional siempre? → NO

7. Escribe una aproximación de $\sqrt{11}$ con cuatro cifras decimales:

a) Por defecto
b) Por exceso
c) Con intervalos encajados

Solución

Primero, hacer el cuadrado ($\uparrow^2$) de 1, 2, 3, 4, ... hasta encontrar un cuadrado más pequeño que 11 y otro cuadrado más grande que 11.

$1^2 = 1 \rightarrow$ menor que 11
$2^2 = 4 \rightarrow$ menor que 11
$$\left.\begin{array}{l} 3^2 = 9 \rightarrow \text{menor que } 11 \\ 4^2 = 16 \rightarrow \text{mayor que } 11 \end{array}\right\} \rightarrow 3 < \sqrt{11} < 4$$

Ya tenemos la aproximación de $\sqrt{11}$ con 0 decimales. Ahora hacemos los cuadrados ($\uparrow^2$) de 3´0, 3´1, ...4´0 para tener la aproximación con 1 decimal.

$3'0^2 = 9 \rightarrow$ menor que 11
$3'1^2 = 9'61 \rightarrow$ menor que 11
$3'2^2 = 10'24 \rightarrow$ menor que 11
$$\left.\begin{array}{l} 3'3^2 = 10'89 \rightarrow \text{menor que } 11 \\ 3'4^2 = 11'56 \rightarrow \text{mayor que } 11 \end{array}\right\} \rightarrow 3'3 < \sqrt{11} < 3'4$$

Ya tenemos la aproximación de $\sqrt{11}$ con 1 decimal, repetimos los cuadrados con 3´30, 3´31, 3´32, ...3´40 para tener la aproximación con 2 decimales.

$$\left.\begin{array}{l} 3'30^2 = 10'89 \rightarrow \text{menor que } 11 \\ 3'31^2 = 10'9561 \rightarrow \text{menor que } 11 \\ 3'32^2 = 11'0224 \rightarrow \text{mayor que } 11 \end{array}\right\} \rightarrow 3'31 < \sqrt{11} < 3'32$$

Ya tenemos dos decimales, para 3 decimales, repetimos los cuadrados con 3´310, 3´311, 3´312, 3´313, ..., 3´32

$3'310^2 = 10'9561 \rightarrow$ menor que 11
$3'311^2 = 10'962721 \rightarrow$ menor que 11
$3'312^2 = 10'969344 \rightarrow$ menor que 11
$3'313^2 = 10'975969 \rightarrow$ menor que 11
$3'314^2 = 10'982596 \rightarrow$ menor que 11
$3'315^2 = 10'989225 \rightarrow$ menor que 11
$$\left.\begin{array}{l} 3'316^2 = 10'995856 \rightarrow \text{menor que } 11 \\ 3'317^2 = 11'002489 \rightarrow \text{mayor que } 11 \end{array}\right\} \rightarrow 3'316 < \sqrt{11} < 3'317$$

Ya tenemos tres decimales, para 4 decimales, repetimos los cuadrados con 3´3160, 3´3161, 3´3162, 3´3163, ..., 3´317

$3'3160^2 = 10'995856 \rightarrow$ menor que 11
$3'3161^2 = 10'996519 \rightarrow$ menor que 11
$3'3162^2 = 10'997182 \rightarrow$ menor que 11
$3'3163^2 = 10'997846 \rightarrow$ menor que 11
$3'3164^2 = 10'998509 \rightarrow$ menor que 11
$3'3165^2 = 10'999172 \rightarrow$ menor que 11
$$\left.\begin{array}{l} 3'3166^2 = 10'999836 \rightarrow \text{menor que } 11 \\ 3'3167^2 = 11'000499 \rightarrow \text{mayor que } 11 \end{array}\right\} \rightarrow 3'3166 < \sqrt{11} < 3'3167$$

Ya tenemos 4 decimales, entonces:

- la aproximación por defecto de $\sqrt{11}$ es 3´3166;
- la aproximación por exceso de $\sqrt{11}$ es 3´3167;
- $\sqrt{11}$ está en el intervalo (3´3166, 3´3167)

8. ¿Qué error absoluto y relativo *se comete* al elegir como valor de 1/11 la expresión decimal 0´09?

se comete = hacemos

Solución

Elegir 0,09 como valor de 1/11 quiere decir que yo digo $\frac{1}{11} = 0{,}09$

> Recuerda
> **Error absoluto** es el número menos la aproximación con valor absoluto (sin signo + ni -).
> **Error relativo** es el error absoluto dividido (:) por el número.

$$\text{Error absoluto} = \left|\frac{1}{11} - 0{,}09\right| = \left|\frac{1}{11} - \frac{9}{100}\right| = \left|\frac{100-99}{1100}\right| = \frac{1}{1100}$$

$$\text{Error relativo} = \frac{1}{1100} : \frac{1}{11} = \frac{11}{1100} = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

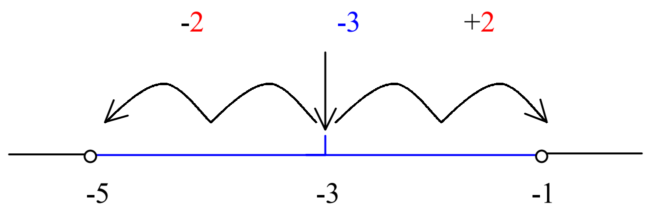
9. Escribe en forma de intervalo abierto un entorno de la recta real *cuyo* centro sea –3 y su radio sea 2.

cuyo = suyo

Solución

E(-3, 2) = (-3 – 2, -3 + 2) = (-5, -1)

Empieza en –3 y da 2 pasos a la derecha y 2 pasos a la izquierda.



10. Escribe en forma de entorno el intervalo (3, 7). *Deduce previamente* el centro y el radio.

Deduce = Encuentra

previamente = antes

Solución

Para encontrar el entorno necesitamos ¿qué? → el centro y el radio.

centro: Siempre SUMAR EXTREMOS DEL INTERVALO Y DIVIDIR POR 2

$$\text{centro} = a = \frac{3+7}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

radio: DIFERENCIA desde el centro hasta el extremo = RESTAR

radio = 7 – 5 = 2

Entonces el entorno es E (5, 2)

pertenezcan = están dentro

11. Escribe cinco puntos que *pertenezcan* a los siguientes intervalos:
a) (-1/2, 1/2] b) (3, 7) c) [1/4, 1]

Solución

a) (-1/2, 1/2] es el conjunto de puntos desde –1/2 (0,5) hasta 1/2 (0,5), el número -0,5 no está dentro porque hay (, el número 0,5 sí porque hay].

5 puntos dentro del ejemplo: 0,5; 0; 0,3; -0,3; 0,2; -0,2; ...

b) (3, 7) es el conjunto de puntos desde 3 hasta 7, los números 3 y 7 no porque hay (y).

5 puntos dentro del ejemplo: 4; 5; 6; 4,3; 5,8; 3,2; ...

c) [1/4, 1] es el conjunto de puntos desde 1/4 (0,25) hasta 1, los números 0,25 y 1 sí porque hay [y].

5 puntos dentro del ejemplo: 0,25; 1; 0,5; 0,7; 0,8; 0,85; ...

indicar = decir

pertenecen = están dentro

12. De los siguientes puntos, *indica* cuales *pertenecen* al intervalo (-1, 5]
-1,5; 3,01; -0,9; 4,95; 0; 5,00001

Solución

El intervalo (-1, 5] es el conjunto puntos desde –1 hasta el 5, el número -1 no, el número 5 sí.

Ahora miramos cada punto que debe más grande que –1 y más pequeño o igual que 5.

¿-1,5 mayor que –1? NO → NO pertenece

¿3,01 mayor que –1? SI
¿3,01 menor que 5 ó 5? SI } → SI pertenece

¿-0,9 mayor que –1? SI
¿-0,9 menor que 5 ó 5? SI } → SI pertenece

¿4,95 mayor que –1? SI
¿4,95 menor que 5 ó 5? SI } → SI pertenece

¿0 mayor que –1? SI
¿0 menor que 5 ó 5? SI } → SI pertenece

¿5,00001 mayor que –1? SI
¿5,00001 menor que 5 ó 5? NO } → NO pertenece

13. *Expresa* en forma de intervalo los siguientes conjuntos:

a) $A = \{x \in R \ / \ -3 < x \leq 1\}$
b) $B = \{x \in R \ / \ 2/3 \leq x < 5\}$

Expresa = di = escribe

Solución

$A = \{x \in R \ / \ -3 < x \leq 1\}$ es el conjunto de puntos desde –3 hasta 1, el 1 también. Esto es igual que $(-3, \ 1]$

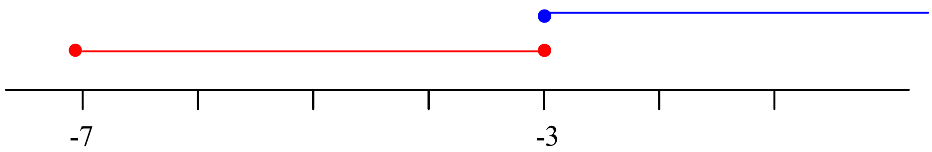
$A = \{x \in R \ / \ 2/3 \leq x < 5\}$es el conjunto de puntos desde 2/3 hasta 5, el número 2/3 también. Esto es igual que $[2/3, \ 5)$.

14. Dibuja en una recta los intervalos $[-3, +\infty)$ y $[-7, -3]$ y *responde*:

a) ¿*Presentan* puntos *comunes*?
b) Si la respuesta es *afirmativa*, ¿cómo *representarías* el conjunto de puntos comunes?

responde = contesta
Presentan = tienen
comunes = dentro de los dos intervalos al mismo tiempo
afirmativa = sí
representar = dibujar

Solución



a) Sí, el –3.
b) Sólo es un punto, se escribe {3}

Recuerda:
Cuando son puntos sueltos, no intervalos, se escribe:
{números}

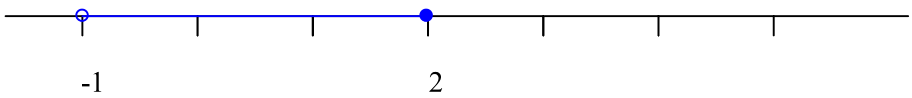
Ejemplo los números 2 y 3 se escriben
{2, 3}

15. Define los siguientes intervalos y represéntalos.

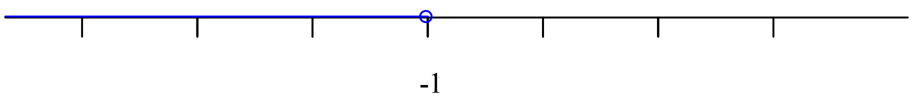
a) $(-1, \ 2]$ b) $(-\infty, \ -1)$

Solución

a) $(-1, \ 2] = \{x \in R \ / \ -1 < x \leq 2\}$ (definir es escribirla con esa forma)



b) $(-\infty, \ -1) = \{x \in R \ / \ x < -1\}$



16. Define los siguientes entornos.

a) $E^{+}(-1, 4)$ b) $E^{-}(-5, 7)$ c) $E(-1, \ 5/6)$

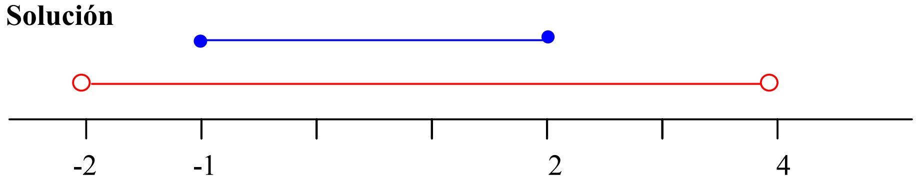
Solución

a) $E^{+}(-1, \ 4) = (-1, \ -1 + 4) = (-1, \ 3)$ ($E^{+} \rightarrow +$ quiere decir sólo por la derecha)
b) $E^{-}(-5, \ 7) = (-1 - 7, \ -1) = (-8, \ -1)$ ($E^{-} \rightarrow -$ quiere decir sólo por la izquierda)
c) $E(-1, \ 5/6) = (-1 - 5/6, \ -1 + 5/6) = (-11/6, \ -1/6)$

Dados = me dan
determina = di

17. *Dados* los intervalos I = (-2, 4) y J = [-1, 2] *determina* la unión e intersección de ambos.

Solución



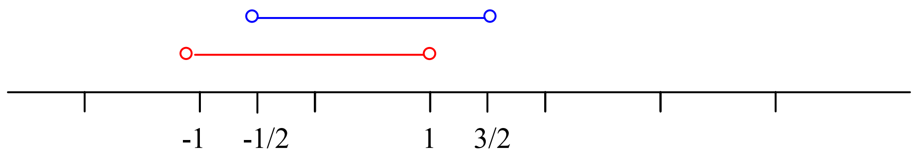
$I \cup J$ todos los puntos de la línea azul y la línea roja
$I \cup J = (-2,\ 4)$

$I \cap J$ puntos dentro de la línea azul y también de la línea roja
$I \cap J = [-1,\ 2]$

intersección = $\cap$

18. Calcula la *intersección* de los entornos: E(0, 1) y E (1/2, 1).

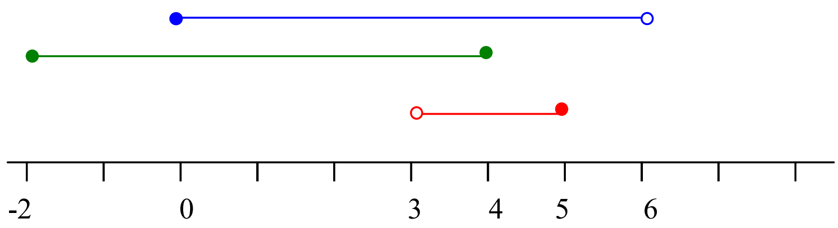
Solución
E (0, 1) = (0 – 1, 0 + 1) = (- 1, 1)
E (1/ 2, 1) = (1/2 – 1, 1/2 + 1) = (- 1/2, 3/2)



E(0, 1) $\cap$ E (1/2, 1) puntos dentro de la línea azul y también dentro de la línea roja.
E(0, 1) $\cap$ E (1/2, 1) = (-1/2, 1)

19. Dados los intervalos I = (3, 5], J = [-2, 4] y K = [0, 6), calcula:
a) $I \cup J$ b) $J \cap K$
c) $(J \cup K) \cap I$ d) $I \cup J \cup K$

Solución

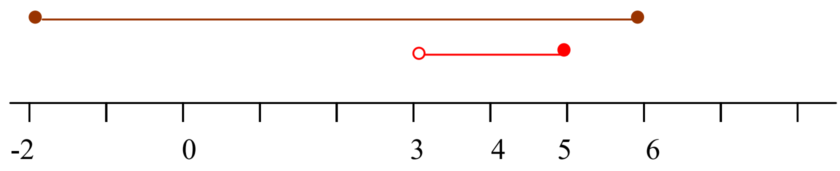


a) $I \cup J$ puntos de la línea roja y de la verde; $I \cup J = [-2,\ 5]$

b) $J \cap K$ puntos dentro de la línea verde y también dentro de la línea azul; $J \cap K = [0, 4]$

c) $(J \cup K) \cap I$

Primero hacemos el paréntesis $(J \cup K) \rightarrow$ puntos de la línea verde y de la azul; $J \cup K = [-2,\ 6)$



Ahora (J ∪ K) ∩ I puntos dentro de la línea marrón y también dentro de la línea roja
(J ∪ K) ∩ I = (3, 5]

d) I ∪ J ∪ K puntos en la línea roja o la azul o la verde: I ∪ J ∪ K = [-2, 6)

20. Encuentra la estimación y la cota de error de un número que *se halla* en el intervalo (-9,382, -9,298).

se halla = está

Solución

Recuerda
La estimación es encontrar el número que está en el centro del intervalo La cota de error es encontrar cuanto mide desde la estimación hasta el extremo.

Intervalo = (-9,382, -9,298)
Estimación = centro del intervalo, hallar ¿cómo?. Siempre SUMAR EXTREMOS DEL INTERVALO Y DIVIDIR POR 2

extremos
(a,   b)

$$\text{Estimación} = a = \frac{-9{,}382 + (-9{,}298)}{2} = -9{,}34$$

La cota de error ⇒ desde la estimación hasta el extremo = RESTAR

Cota de error = -9,34 – (-9,382) = 0,042

21. Si al *tomar* 12,458 como estimación de un número real se *comete* un error menor que 0,0005, ¿en qué intervalo *se encuentra* el número?

tomar = coger
comete = hace
se encuentra = está

Solución
Hay un número que yo no conozco, pero yo sé que su estimación es 12,458 con un error más pequeño que 0,0005, entonces el número que no conozco está dentro del intervalo:

(estimación – error,   estimación + error) =
(12,458 – 0,0005,   12,458 + 0,0005) = (12,4575,   12,4585)

22. Redondea a décimas los siguientes números:
a) 234,67   b) 4,955   c) 0,123   d) 3,515

Solución

Recuerda:
Décimas = 1 cifra decimal Centésimas = 2 cifras decimales Milésimas = 3 cifras decimal Diezmilésimas ...

a) Para redondear 234,67 con 1 cifra decimal: 234,6 ∴ 7.

El número después ∴ 7 es mayor que 5, entonces 6+1 = 7. El redondeo es 234,7

b) Para redondear 4,955 con 1 cifra decimal: 4,9 ∴ 55.

El número después ∴ 5 es igual que 5, entonces 9+1 = 10. El redondeo es 5,0

c) Para redondear 0,123 con 1 cifra decimal: 0,1 ∴ 23.

El número después ∴ 2 es menor que 5, entonces cortar. El redondeo es 0,1

d) Para redondear 3,515 con 1 cifra decimal: 3,5 ∴ 15.

El número después ∴ 1 es menor que 5, entonces cortar. El redondeo es 3,5.

23. Halla redondeando la longitud de una piscina circular cuyo radio se ha estimado en 11,15 m.

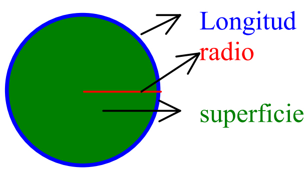
Solución

Recuerda
La longitud de una circunferencia, su fórmula es $2\cdot\pi\cdot r$, r es el radio.

≅ quiere decir más o menos y en español se dice aproximadamente

Radio = $r \cong 11{,}5$
$\pi \cong 3{,}14$

Entonces longitud $\cong 2 \cdot 3{,}14 \cdot 11{,}5 = 72{,}22$ m.



24. Halla redondeando la superficie de la piscina del ejercicio anterior.

Solución

Recuerda:
La superficie de un círculo, su fórmula es $\pi \cdot r^2$, r es el radio.

Radio (r) $\cong 11{,}5$
$\pi \cong 3{,}14$

Entonces la superficie $\cong 3{,}14 \cdot 11{,}5^2 = 415{,}265\ m^2$.

25. Expresa en notación científica:

a) 0,0003725 b) 1420.000.000
c) –0,00000000431 d) –2.764.000.000.000

Solución

4 lugares a la izquierda

a) 0,0003725 = 3,725 · 10^{-4}

9 lugares a la derecha

b) 1.420.000.000 =1,42 · 10^{9}

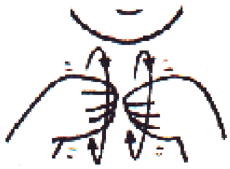
9 lugares a la izquierda

c) - 0,00000000431 = - 4,31 · 10^{-9}

12 lugares a la derecha

d) – 2.764.000.000.000 = - 2,764 · 10^{12}

PROBLEMAS PROPUESTOS



1. Escribe la expresión decimal de los siguientes números racionales:

a) $\frac{142}{25}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{6}$

2. Escribe los siguientes números irracionales con tres cifras decimales: por defecto, por exceso y mediante un intervalo encajado

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt[3]{3}$

3. Indica si el desarrollo decimal *corresponde* a un número racional o irracional.

corresponde = es

a) $3/5$ b) 0,494949.... c) $\sqrt{7}$

d) 3,75 e) 0,1411441114441..... f) $\frac{\pi}{2}$

4. Escribe un número real *comprendido* entre los siguientes:

[nº______________ nº]

comprendido = dentro

a) $\frac{1}{3}$ y $\frac{21}{5}$ b) $\frac{1}{6}$ y $\frac{5}{6}$

5. Escribe una aproximación de $\sqrt{15}$ con cuatro cifras decimales:

a) Por defecto
b) Por exceso
c) Con intervalos encajados

6. Escribe una aproximación de $\sqrt{21}$ con cuatro cifras decimales:

a) Por defecto
b) Por exceso
c) Con intervalos encajados

7. ¿Qué error absoluto y relativo se comete al elegir como valor de 20/7 la expresión decimal 2´85?

8. Escribe en forma de intervalo el entorno de centro 2 y radio 1/5.

9. Escribe en forma de intervalo el entorno de centro -2 y radio 1/5.

10. Escribe en forma de intervalo el entorno de centro 0 y radio 1/5.

11. Escribe en forma de entorno el intervalo (-1, 7). *Deduce previamente* el centro y el radio.

Deduce = encuentra
previamente = antes

12. Escribe en forma de entorno el intervalo (-1, 1).

13. Escribe cinco puntos que *pertenezcan* a los siguientes entornos:

pertenezcan = estén dentro

a) E (-1, 1) b) E^{+} (0, 3) c) E^{-} (0, 1/2)

indicar = decir

14. De los siguientes puntos, *indica* cuales no pertenecen al E (2, 7/2)

2; 3,5; 2,538; 2,1; 3,5101; 3,49

15. Expresa en forma de intervalo los siguientes conjuntos:

a) $A = \{x \in R \,/\, x \leq 1\}$

b) $B = \{x \in R \,/\, -1/2 < x < 3\}$

representar = dibujar

16. Define los siguientes intervalos y *represéntalos*.

a) $[0, \infty)$ b) $[-1, 2)$

17. Define los siguientes entornos.

a) $E(2, 3)$ b) $E^{+}(-1, 4)$ c) $E^{*}(5, 1/4)$

intersección = $\cap$
casos = ejemplos

18. Calcula la unión y la *intersección* de I y J en cada uno de los *casos* siguientes:

a) $I = (8, 19)$ $J = (7, 9]$

b) $I = E(0, 2)$ $J = E^{+}(1, 1)$

c) $I = (-1, 5)$ $J = [5, 6)$

d) $I = (-1, 5]$ $J = [5, 6)$

19. Dados los intervalos $I = (-2, 4]$, $J = (-3, 5)$ y $K = (4, 7)$, calcula:

a) $I \cup J$ b) $J \cap K$ c) $(J \cup K) \cap I$

d) $I \cup J \cup K$ d) $(I \cap J) \cup K$ e) $I \cap J \cap K$

se halla = está

20. Encuentra la estimación y la cota de error de un número que *se halla* en el intervalo (-19,3, -19,29).

21. Encuentra la estimación y la cota de error de un número que *se halla* en el intervalo (0,895, 0,9).

comete = hace

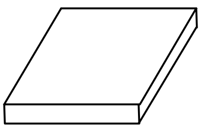
22. Si al tomar 112,58 como estimación de un número real se *comete* un error menor que 0,02, ¿en qué intervalo se encuentra el número?

23. Si al tomar 11.000.000 como estimación de un número real se comete un error menor que 1000, ¿en qué intervalo se encuentra el número?

dimensiones = tamaño = medidas

24. Redondea a centésimas los siguientes números:

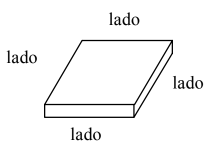
a) 1897,670 b) 987,514 c) 123,133



tablero

25. Redondea a milésimas los siguientes números:

a) 34,2345 b) 0,8765 c) 0,12315



perímetro = lado + lado + lado + lado

26. Las *dimensiones* de un *tablero* rectangular son 8,75m. De largo por 5,6 m. de ancho. Calcula redondeando su *perímetro* y su superficie.

27. Expresa en notación científica:

a) Distancia de la Tierra a la Luna: 384 millones de metros

b) Tamaño de un virus: 0,000000002.

SOLUCIONES A LOS NÚMEROS REALES

1. a) 5,68 b) $0,\widehat{6}$ c) $0,1\widehat{6}$

2.

	Defecto	Exceso	Intervalo
$\sqrt{3}$	1,732	1,733	[1,732, 1,733]
$\sqrt{5}$	2,236	2,237	[2,236, 2,237]
$\sqrt[3]{3}$	1,442	1,443	[1,442, 1,443]

3. a) racional; b) racional c) irracional
d) racional e) irracional f) irracional.

4. a) $\sqrt{5}$ b) $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

5. a) 3,8729 b) 2,8730 c) [3,8729, 3,8730]

6. a) 4,5825 b) 4,5826 c) [4,5825, 4,5826]

7. Error absoluto: 1/140
Error relativo: 1/400

8. (9/5, 11/5)

9. (-11/5, -9/5)

10. (-1/5, 1/5)

11. Centro: 3; Radio: 4; E(3, 4)

12. E(0, 1)

13. a) -0,92, -0,1, 0, 0,31 y 0,83
b) 0,157, 0,98, 1, 2 y 2,55
c) -0,43, -0,321, -0,21, -0,1 y -0,039

14. Pertenecen todos los números.

15. a) $(-\infty, 1]$ b) (-1/2, 3)

16. a) $A = \{x \in R / x \geq 0\}$
b) $B = \{x \in R / -1 \leq x < 2\}$

17. a) $A = \{x \in R / -1 < x < 5\}$
b) $B = \{x \in R / -1 < x < 3\}$
c) $C = \{x \in R / 19/4 < x < 21/4\} - \{5\}$

18. a) $I \cup J = (7, 19)$ $I \cap J = (8, 9]$
b) $I \cup J = E(0, 2)$ $I \cap J = E^{+}(1, 1)$
c) $I \cup J = (-1, 6)$ $I \cap J = \Phi$
d) $I \cup J = (-1, 6)$ $I \cap J = \{5\}$

19. a) (-3, 5) b) (4, 5) c) (-2, 4]
d) (-3, 7) e) (-2, 7) f) Φ

20. Estimación: a = -19,295 Cota de error: r = 0,005

21. Estimación: a = 0,8975 Cota de error: r = 0,0025

22. (112,56, 112,6)

23. (10.999.000, 11.001.000)

24. a) 1897,67 b) 987,51 c) 123,13

25. a) 34,235 b) 0,877 c) 0,123

26. Perímetro: $28,7 \approx 29$ m Superficie: 49 m^2

27. a) $3,84 \cdot 10^{8}$ b) $2 \cdot 10^{-9}$

Coordinadora: María Trinidad Cámara Meseguer.
Edita: Servicio de Ordenación Académica y Publicaciones.

ISBN: 84-699-8527-2
Dep. Legal: MU-1081-2002

Gestión editorial:
Ligia Comunicación y Tecnología, S. L.
director@licotec.net